MATEMATIČKI KLOKAN S

RJEŠENJA

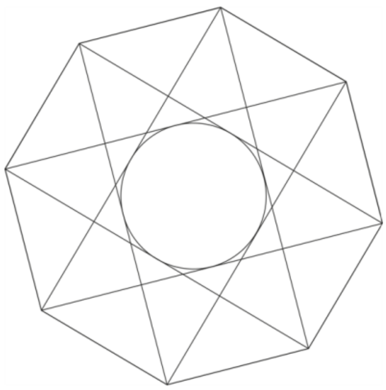
Pitanja za 3 boda:

1. Koji je od danih brojeva najveći?

A) 2013 B) 2^{0+13} C) 20^{13} D) 201^3 E) $20 \cdot 13$

Rješenje: C

2. Pravilni osmerokut na slici ima stranicu duljine 10. Koliki je radijus kružnice upisane malom osmerokutu kojeg tvore dijagonale?



A) 10 B) 7.5 C) 5 D) 2.5 E) 2

Rješenje: C
Ta kružnica ujedno je i upisana kružnica kvadratu sa stranicom duljine 10 (kao i stranica zadanog osmerokuta), pa je njen radijus $\frac{10}{2} = 5$.

3. Koliko bridova ima prizma koja ukupno ima 2013 strana?

A) 2011 B) 2013 C) 4022 D) 4024 E) 6033

Rješenje: E
n-terostrana prizma ima $n + 2$ strane i $3n$ bridova. Dakle radi se o 2011-erostranoj prizmi koja ima $3 \cdot 2011 = 6033$ brida.

4. Koliko iznosi treći korijen broja $3^{(3^3)}$?

A) 3^3 B) $3^{(3^3-1)}$ C) $3^{(2^3)}$ D) $3^{(3^2)}$ E) $\left(\sqrt{3}\right)^3$

Rješenje: D
$\sqrt[3]{3^{(3^3)}} = \sqrt[3]{3^{27}} = 3^{\frac{27}{3}} = 3^9 = 3^{(3^2)}$

5. Godina 2013. ima svojstvo da se sastoji od uzastopnih znamenki 0, 1, 2 i 3. Koliko godina je prošlo od posljednjeg puta kada se godina sastojala od četiri uzastopne znamenke?

A) 467 B) 527 C) 581 D) 693 E) 990

Rješenje: C
Radi se o godini 1432.

6. Neka je f linearna funkcija za koju vrijedi $f(2013) - f(2001) = 100$. Koliko iznosi $f(2031) - f(2013)$?

A) 75 B) 100 C) 120 D) 150 E) 180

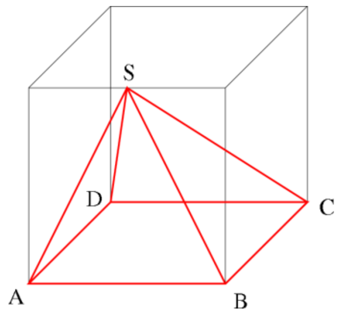
Rješenje: D
Ako je $f(x) = ax + b$, onda je $f(2013) - f(2001) = (2013a + b) - (2001a + b) = 12a$, iz čega vidimo da je $a = \frac{25}{3}$. Isto tako $f(2031) - f(2013) = (2031a - b) - (2013a + b) = 18a = 18 \cdot \frac{25}{3} = 150$.

7. Kada se određena kruta tvar otopi njen se volumen poveća za $\frac{1}{12}$. Koliko se volumen smanji kada se ta ista tvar ponovo skruti?

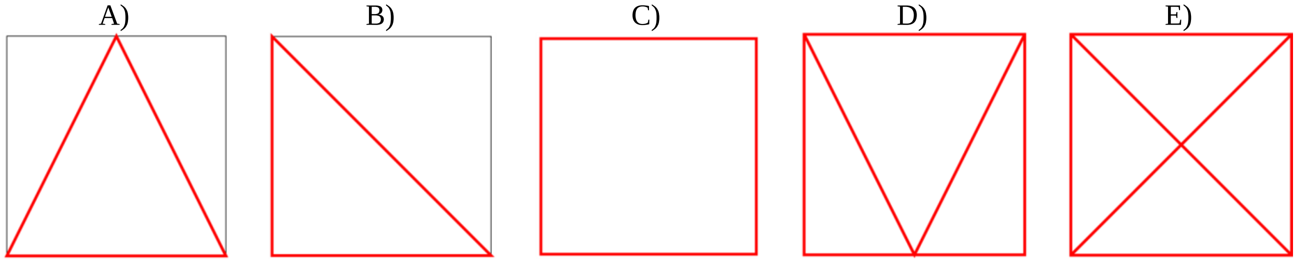
A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{14}$

Rješenje: D
Nakon topljenja volumen tvari je $\frac{13}{12}$ početnog volumena. Pri skrućivanju novi volumen se smanji za $\frac{1}{12}$ što je $\frac{1}{13}$ od $\frac{13}{12}$.

8. U kocki na slici vidimo krutu neprozirnu piramidu *ABCDS* s bazom *ABCD*. Vrh piramide *S* leži na polovištu brida kocke. Gledamo piramidu od gore, od dolje, sprijeda, odozada, s lijeve strane, s desne strane. Koji pogled nećemo uočiti?



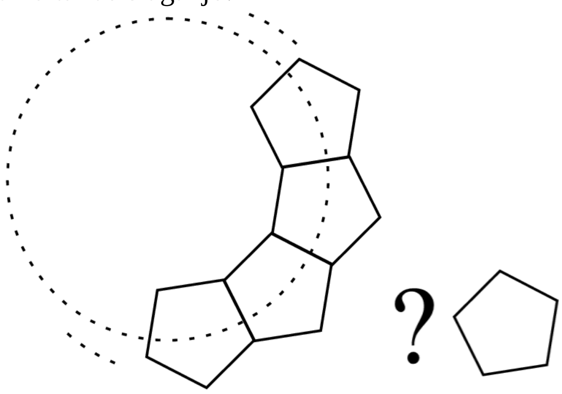
A) B) C) D) E)



Rješenje: E
A – sprijeda, B – strana, C – od dolje, D – od gore.

Pitanja za 4 boda:

9. Rade ima identične plastične dijelove u obliku pravilnog peterokuta. Lijepi ih rub uz rub u krug (kao na slici). Koliko će se peterokuta potrošiti za takvo slaganje?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

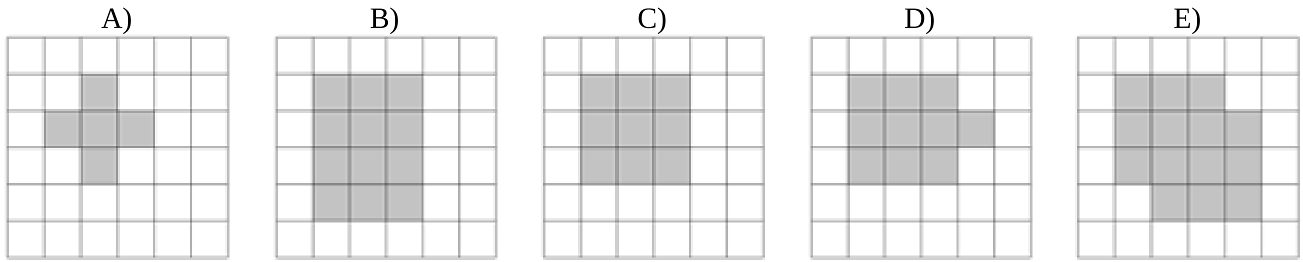
Rješenje: C
Spojimo li središte zamišljene kružnice s vrhovima peterokuta (ona dva vrha koja su najbliža središtu) dobit ćemo kut od 36° (Unutarnji kut pravilnog peterokuta je 108°, pa su kutovi uz osnovicu u konstruiranog jednakokračnog trokuta $180° - 108° = 72°$, a kut nasuprot osnovici je onda $180° - 2 \cdot 72° = 36°$.) Da bi završio krug Radi treba $\frac{360°}{36°} = 10$ dijelova.

10. Koliko ima prirodnih brojeva n za koje je i $\frac{n}{3}$ i $3n$ troznamenkast prirodan broj?

A) 12 B) 33 C) 34 D) 100 E) 300

Rješenje: A
Najmanji n za koji tvrdnja vrijedi je onaj za koji je $\frac{n}{3} = 100$, a najveći onaj za koji je $3n = 999$. To znači da je $300 \leq n \leq 333$, te on mora biti djeljiv s 3. Takvih brojeva ima 12.

11. Pod je popločan kvadratnim pločicama i na njemu se nalazi sag u obliku kruga. Sve pločice koje sa sagom imaju više od jedne zajedničke točke obojene su sivo. Što od navedenog ne može biti rezultat ovog postupka?



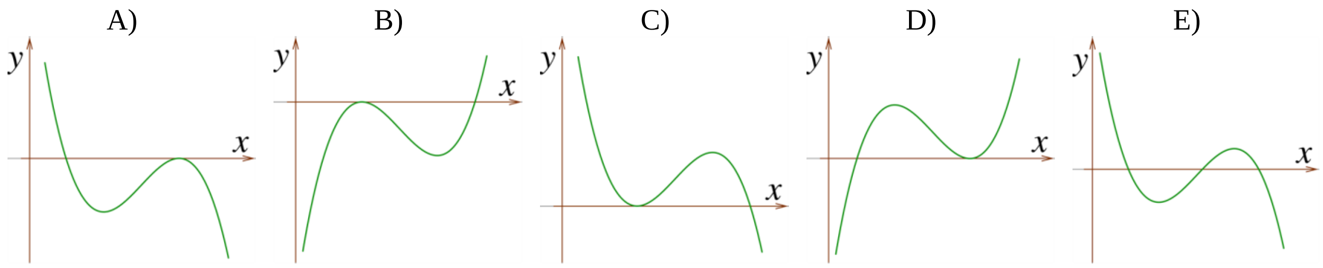
Rješenje: E

12. Što je negacija tvdnje „Za svaki parni broj x, $f(x)$ je paran broj.“?

A) Za svaki parni broj x , $f(x)$ je neparan broj.
B) Za svaki neparni broj x , $f(x)$ je paran broj.
C) Za svaki neparni broj x , $f(x)$ je neparan broj.
D) Postoji parni broj x takav da je $f(x)$ neparan broj.
E) Postoji neparni broj x takav da je $f(x)$ neparan broj.

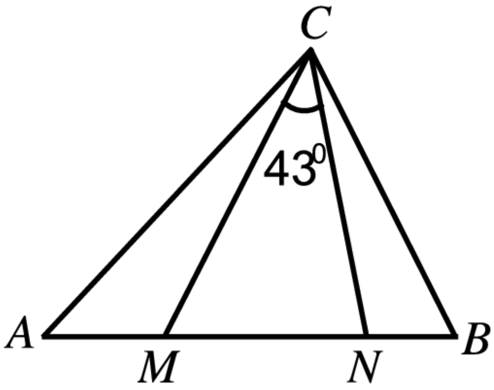
Rješenje: D

13. Na kojoj slici je prikazan graf funkcije $W(x) = (a - x)(b - x)^2$, gdje je $a < b$?



Rješenje: A
Iz zapisa funkcije možemo vidjeti da su nultočke ovog polinoma trećeg stupnja $x_1 = a, x_{2,3} = b$. Kako je $a < b$ zaključujemo da graf prvo siječe x-os u x_1, a onda je dira jer je $x_2 = x_3$. U obzir stoga dolaze samo rješenja A ili D. Nadalje možemo zaključiti da su vrijednosti funkcije za $x \geq a$ (desno od prve nultočke) negativne, pa je rješenje A.

14. U trokutu ABC na slici za točke M i N na stranici $\overline{AB}$ vrijedi $|AN| = |AC|$ i $|BM| = |BC|$. Koja je mjera kuta $\angle ACB$ ako je $\angle MCN = 43°$?



A) 86° B) 89° C) 90° D) 92° E) 94°

Rješenje: E
Kako je $|AN| = |AC|$ iz trokuta ANC slijedi da je $\angle CNA = \angle ACN = x$. Analogno, iz trokuta MBC zbog $|BM| = |BC|$ imamo $\angle MCB = \angle BMC = y$. Iz trokuta MNC vidimo da je $x + y = 180° - 43° = 137°$. Sada je $\angle ACB = x + y - 43° = 137° - 43° = 94°$.

15. Koliko uređenih parova prirodnih brojeva (x, y) zadovoljava jednadžbu $x^2y^3 = 6^{12}$?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E
Vrijedi $x^2 = \left(\frac{6^4}{y}\right)^3$. Budući da su brojevi 2 i 3 relativno prosti, treba samo tražiti one y za koje je izraz u zagradi potpuni kvadrat. Takvi y su $1, 2^2, 2^4, 3^2, 3^4, 2^2 3^2, 2^4 3^4, 2^2 3^4, 2^4 3^2$. Radi se o parovima $(6^6, 1), (18^6, 2^2), (3^6, 2^4), (12^3, 3^2)$, $(2^6, 3^4), (6^3, 6^2), (1, 6^4), (2^3, 18^2), (3^3, 12^2)$.

16. U kutiji se nalazi 900 karata numeriranih od 100 do 999. Svi brojevi na kartama su različiti. Franko izvlači karte i računa sumu znamenaka na svakoj od njih. Koliko najmanje karata on mora izvući kako bi bio siguran da će u ruci imati tri karte sa istom sumom znamenaka?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

Rješenje: C
Moguće su sume znamenki između 1 i 27. Najgori mogući scenarij je da u prvih 27 karata izvučemo sve različite sume, zatim ih sve (osim sume 1 i 27 koje se pojavljuju samo jednom) dupliciramo u sljedećih 25 izvlačenja. Sljedeća izvučena karta mora biti treća po redu sa istom (nekom) sumom znamenaka. Dakle, treba izvući $27 + 25 + 1 = 53$ karte.

Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko ima uređenih parova cijelih brojeva $(x, y), x \leq y$ takvih da je njihov produkt pet puta veći od njihove sume?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

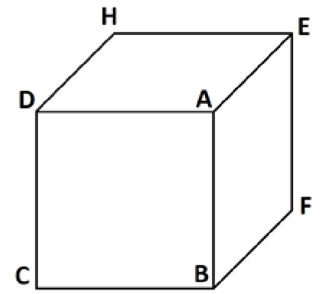
Rješenje: A
Želimo da vrijedi $xy = 5(x + y)$, iz čega slijedi $y = \frac{5x}{x-5} = \frac{5(x-5)+25}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}$. Da bi y bio cijeli broj treba biti $x - 5 \in \{1, -1, 5, -5, 25, -25\}$ tj $x \in \{6, 4, 10, 0, 30, -20\}$. Tada je y redom $30, -20, 10, 0, 6, 4$. Zbog uvjeta $x \leq y$ otpadaju dva rješenja.

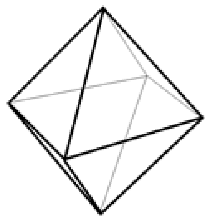
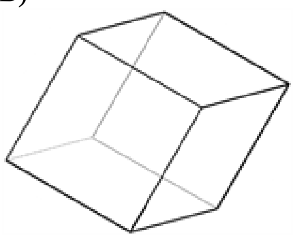
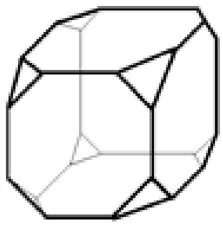
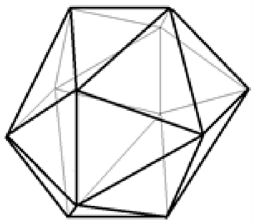
18. Neka je $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija sa sljedećim svojstvima: f je periodična funkcija s periodom 5 i restrikcija te funkcije na interval $[-2,3]$ je $x \longmapsto x^2$. Koliko iznosi $f(2013)$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 9

Rješenje: D
$f(2013) = f(403 \cdot 5 - 2) = f(-2) = (-2)^2 = 4.$

19. Kocka na slici presječena je ravninom koja prolazi kroz tri vrha susjedna vrhu A, to su vrhovi D, E i B. Slično, kocku sijeku ravnine koje prolaze kroz tri susjedna vrha svakog od preostalih sedam vrhova. Kako izgleda onaj dio tako prerezane kocke koji sadrži centar kocke?



A)

B)

C)

D)

E) Centar kocke nalazi se u nekoliko dijelova.

Rješenje: A

20. Neka je $f\colon \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ funkcija definirana sa $f(n) = \frac{n}{2}$ ako je n paran, a $f(n) = \frac{n-1}{2}$ ako je n neparan. Za prirodan broj k sa $f^k(n)$ označavamo izraz $f\big(f(\ldots f(n) \ldots)\big)$, gdje se simbol f pojavljuje k puta. Koliko rješenja ima jednadžba $f^{2013}(n) = 1$?

A) 0 B) 4026 C) 2^{2012} D) 2^{2013} E) beskonačno

Rješenje: D
U svakom koraku imamo grananje na dva slučaja: $f(n) = k$ ako je $n = 2k$ i ako je $n = 2k + 1$. Zato ćemo u 2013 koraka imati 2^{2013} rješenja.

21. U ravnini je nacrtano nekoliko pravaca. Pravac a siječe točno tri druga pravca, a pravac b siječe točno četiri druga pravca. Pravac c siječe točno n drugih pravaca, gdje je $n \notin \{3,4\}$. Koliko je pravaca nacrtano u toj ravnini?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Ništa od navedenog.

Rješenje: C
Ova situacija je moguća samo ako imamo dva međusobno paralelna pravca (jedan od njih je pravac b), još tri međusobno paralelna pravca koja nisu paralelna sa prva dva (jedan od njih je pravac a), i jedan pravac koji ih sve siječe (c).

22. Suma prvih n prirodnih brojeva troznamenkast je broj kojem su sve znamenke jednake. Kolika je suma znamenaka broja n?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

Rješenje: B

Troznamenkast broj kojem su sve znamenke jednake možemo zapisati kao $111k, 1 \leq k \leq 9$. Suma prvih n prirodnih brojeva je $\frac{n(n+1)}{2}$. Mi tražimo rješenje jednadžbe $\frac{n(n+1)}{2} = 111k$ tj $n^2 + n - 222k = 0$ koje je prirodan broj. Zbog Vieteovih formula mora vrijediti: $n_1 + n_2 = -1$ i $n_1 \cdot n_2 = -222k = -2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot k$, pa se lako vidi da je rješenje koje tražimo $n_1 = 36$ $(n_2 = -37)$.

23. Na otoku Viteza i Lupeža žive samo dva tipa ljudi: Vitezovi (koji uvijek govore istinu) i Lupeži (koji uvijek lažu). Sreo sam dva čovjeka koji tamo žive i pitao sam višeg od njih jesu li obojica Vitezovi. On je odgovorio, ali nisam mogao zaključiti što su. Zato sam pitao nižeg je li viši čovjek Vitez. Odgovorio je, i onda sam znao kojem tipu ljudi pripadaju. Koga sam sreo?

    A) Obojica su Vitezovi.
    B) Obojica su Lupeži.
    C) Viši je Vitez, a niži je Lupež.
    D) Viši je Lupež, a niži je Vitez.
    E) Potrebno je još podataka.

Rješenje: D
Ukoliko se radi o dva Viteza odgovori bi bili DA, DA. Ukoliko se radi o dva Lupeža odgovori bi bili DA,DA. Ako je viši Vitez, a niži Lupež odgovori bi bili NE, NE. U slučaju da je viši Lupež, a niži Vitez dobit ćemo odgovore DA, NE. Kako nakon prvog odgovora nismo znali rješenje zaključujemo da se ne radi o trećoj opciji. Nakon drugog odgovora znamo rješenje, a to je moguće samo za četvrti slučaj.

24. Julije je napisao algoritam kako bi ispisao niz brojeva zadanih sa $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, gdje su m i n prirodni brojevi. Koliko iznosi a_{100}?

A) 100 B) 1000 C) 2012 D) 4950 E) 5050

Rješenje: E
Primjetimo da svaki član niza možemo zapisati pomoću njegovog prethodnika
$a_{m+1} = a_1 + a_m + m = a_m + m + 1$.
Tako imamo
$a_{100} = a_{99} + 100 = a_{98} + 99 + 100 = a_{97} + 98 + 99 + 100 = \cdots$
Možemo zaključiti da je $a_{100} = 1 + 2 + \cdots 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.