Razvijanje algebarskog mišljenja u razrednoj nastavi

Dr. Vida Manfreda Kolar. Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Kongres nastavnika matematike, Zagreb 2018

Pregled sadržaja predavanja

1. Definiranje pojma: algebarsko – aritmetički
2. Primjeri pretvorbe zadatka iz aritmetičkog u algebarski na početku školovanja
3. Prezenatcija sadržaja, koji omogućavaju razvoj algebarskog mišljenja
4. Strani nalazi o razvoju algebarskog mišljenja + primjeri istraživanja
5. Problem „bazen": od 1. razreda do fakulteta

Usporedba aritmetika - algebra

Tradicionalno:

- Aritmetika: računanje s brojevima, automatiziranje osnovnih aritmetičkih radnji, razvoj računskih algoritama koji će olakšati izračunavanje.

- Algebra: više apstraktna matematička disciplina - pravila učenja za manipuliranje matematičkim simbolima.

Preusmjeravanje u posljednjih 20 godina:

- razdoblje elektronike: sposobnost vještih izračuna s velikim brojevima više nije u fokusu.

- Reduciranje značenja standardnih računskih algoritama: proceduralno znanje.

- Preusmjeravanje pozornosti na algebarski pristup aritmetici, tj. povezivanje aritmetike s algebrom: konceptualno i problemsko znanje

- Swafford i Langrall (2000): sposobnost za rad s nepoznatom količinom kao da je poznata količina – algebarsko mišljenje; situacije s poznatim količinama - aritmetičko mišljenje

Kako opisati algebru?

- **Je generalizacija aritmetike**: dok se aritmetika usredotočuje na konkretne izračune (postupke), algebra se odnosi na otkrivanje uzoraka, odnosa, pravila o brojevima i konkretnih aritmetičkih računa (problemsko znanje).

Otkrivanje odnosa, uzoraka, pravila = potraga za genaralizacijama.

Kako promijeniti aritmetički zadatak u algebarski zadatak?

1. primjer:

Zbroji:

10 + 4= ___

10 + 2 =___

10 + 7 =___

10 + 5 =___

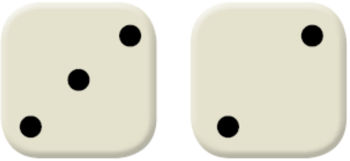
Čisti računi: aritmetika

Preusmjeravanje pozornosti na pravilo kod računanja: oblikovanje generalizacije za ovakav tip računa

⇓

početna algebra

2. primjer: Tombola - malo drugačija



Po čemu se razlikuju aktivnosti u primjeru 2?

1.

- Naglasak je na izračunavanju pojedinih primjera – čista aritmetika
- uspostavljanje odnosa između dva broja unutar jednog para (aritmetičko razmišljanje - razmišljanje o određenom primjeru)

2.

- sistematično uređivanje računa - zaključivanje o odnosima između različitih rastavljanja određenog broja.
- Pronalaženje odnosa između različitih parova brojeva (algebarsko razmišljanje – razmišljanje o odnosima)

Koji su sadržaji prikladni za uvođenje u algebru?

- Jednadžbe
- Uzorci
- Nizovi

- U posljednih 20 godina istraživanja o ulozi uzoraka i nizova kao načina uvođenja učenika u početnu algebru: Ferrara i Sinclair (2016), Carraher et al. (2008) Moss i Baatty (2010), Radford (2008, 2010), Rivera (2011).
- Carraher: nizovi i uzorci su sadržaji koji uključuju predviđanje, rad s varijablama i funkcijama: oblikovanje generalizacija

Uzorci i nizovi u nastavnom planu u Sloveniji (2011)

- Sistematično, po cijeloj vertikali (od 1. do 9. razreda) su dodani sadržaji o uzorcima kao metodički pristup za uvođenje i razumijevanje algebre.
- Kako ih uvodimo?
  - oblikovanje i prepoznavanje pravila u uzorcima (npr.: geometrijski, slikovni, glasovni uzorci)
  - oblikovanje brojevnih nizova (prepoznavanje i oblikovanje pravila u brojevnim nizovima).
- Nadogradnja nastavnog sadržaja:
  - Izvšiti generalizaciju

Predalgebarsko razmišljanje

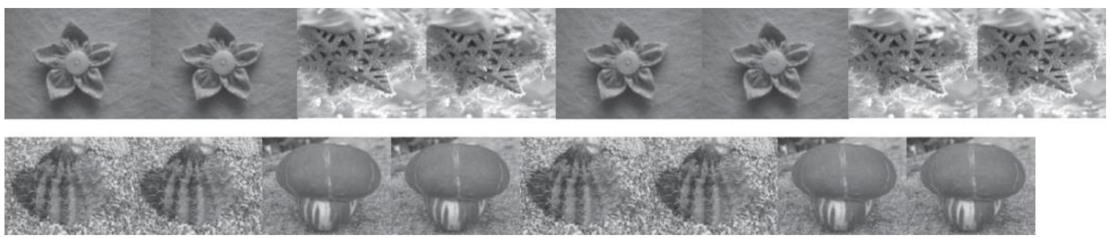
Algebarsko razmišljanje

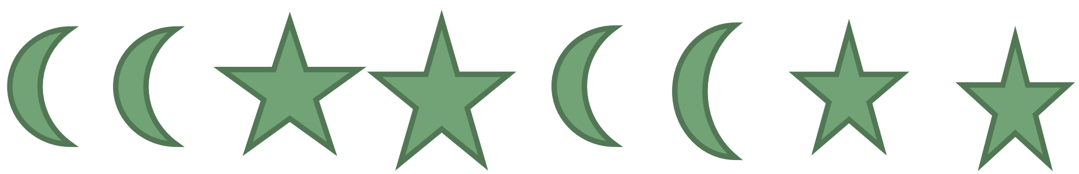
Uzorci

- Tipovi zadataka kod prepoznavanja uzoraka:
  - Ponoviti uzorak
  - Nastaviti uzorak
  - Dopuniti uzorak
  - Izraditi isti uzorak s drugačijim prikazom

Jednak uzorak – drukčiji prikaz

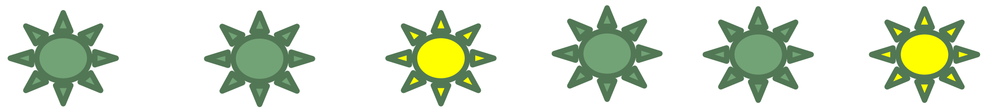
1. Učenici upozanju da jednak uzorak se može nalaziti u mnogo različitih oblika





Nezavisnost od strukture korištenog materijala

2. Učenici upoznaju, da ovaj uzorak



ima jednako pravilo kao glasovni uzorak

ko-ko-dak-ko-ko-dak

aabaab

.

Generalizacija: vrlo različite situacije mogu imati jednaka matematička svojstva

- Istraživanje na predškolskoj djeci (5 – 6 godina) (Tirosh i dr., 2015):
  - Jesu li predškolska djeca sposobna prepoznati sličnu/različitu strukturu dvaju uzoraka?
  - Kako oni opisuju / izražavaju sličnost ili raznolikost struktura?

Svojstvo uspoređenih uzorka	**1. uzorak**	**2. uzorak**
Različita struktura i jednak tip prikaza		
Jednaka struktura i jednak tip prikaza – različte boji		
Jednaka struktura i različit tip prikaza		★ ★ ☺ ★ ★ ☺

- Razine prepoznavanja strukture uzorka:
  - Razina 0: bez reference na jedinicu ponavljajućeg uzorka
  - Razina 1: opis pojedinačnih sličnosti / razlika (kako nastaviti s uzorkom)
  - Razina 2: dijete prepoznaje ponavljajuću jedinicu

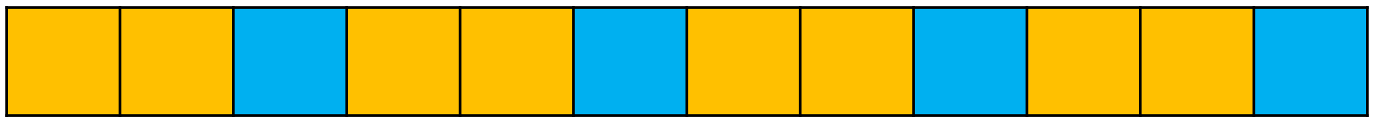
Primjer:

"Po čemu su slični?"

- Razina 0: u oba je crvena.
- Razina 1: ovdje su dvije crvene, ovdje stu dvije žute. Ovdje je jedna plava, ovdje jedna crvena.
- Razina 2: svakog puta ima dvije i jedna.

	Razina 0	Razina 1	Razina 2
Primjer 1	28	13	17
Primjer 2	29	19	10
Primjer 3	44	5	9

Uloga nastavnika: sastavljanje pitanja



Aritmetička pitanja

1. Koliko ima kvadratića u 4 ponovljene jedinice?
   - Tablica množenja
2. Koje je boje 11. kvadratić?
   - deljenje s ostatkom

Algebarska pitanja

Koje bi boje bio 50. kvadratić?

- problemske vještine: predviđanja, zaključivanja, argumentiranje

Zašto su uzorci uvod u algebru?

Algebarsko razmišljanje $\longrightarrow$ traženje genaralizacije:

- Generalizacija kod uzorka:
  - Otkrivanje odnosa „uvijek je isto"
  - Razvijanje problemskih vještina: predviđanje, argumentiranje

Nizovi

Radford (2012):

Ključni aspekt generalizacije: sposobnost pojedinca da promatra sličnosti i razlike: zajednička svojstva u pojedinačnim slučajevima

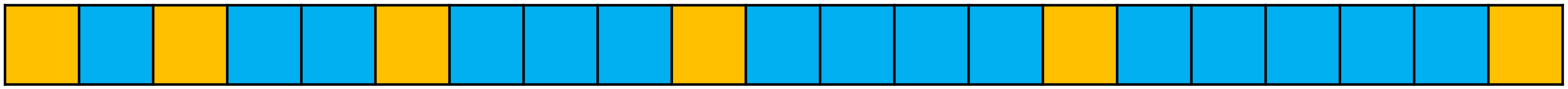
⇓

Proširenje za sve članove niza

⇓

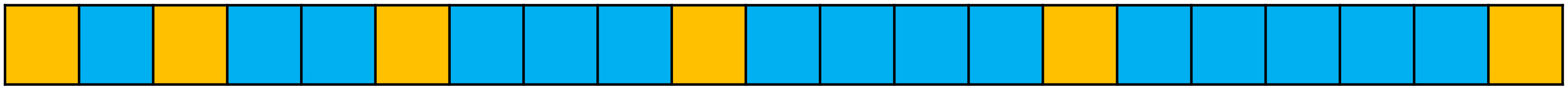
formuliranje općeg pravila

Primjer



Aritmetičko pitanje

- Koliko ima kvadratića u 2 (3, 4, 5, 6) člana zajedno? 2 + 3 = 5

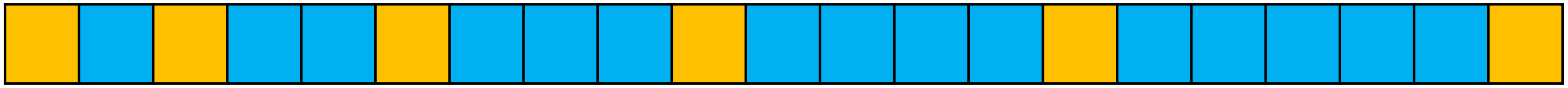


Aritmetičko pitanje

- Koliko ima kvadratića u 2 (3, 4, 5, 6) člana zajedno? 2 + 3 = 5

Prijelaz na algebro

- U 4. članu ima jedan kvadratić više.



Aritmetičko pitanje

- Koliko ima kvadratića u 2 (3, 4, 5, 6) člana zajedno? 2 + 3 = 5

Prijelaz na algebro

- U 4. članu ima jedan kvadratić više.

Algebarsko pitanje

- Koliko bi bilo kvadratića u 25. članu?

Načini formiranja generalizacije – po Radfordu

Rekurzivno

- relacije unutar niza: sličnosti se traže na lokalnoj razini: između pojedinačnih članova niza

Funkcijsko

- relacije na cijelom skupu podataka – tražimo odnos između dva skupa varijabli, a ne samo između dva člana: globalno strukturiranje: stvaranje općeg pravila

Načini oblikovanja generalizacije (po Radfordu)

Rekurzivno

- Promatramo dva susedna člana i tražimo sličnost:
- 4. član ima jedan kvadratić više nego njegov prethodni član

Funkcijsko (relacijsko)

- Tražimo relaciju između dvije varijable (ovisna i neovisna):

- Opće pravilo:

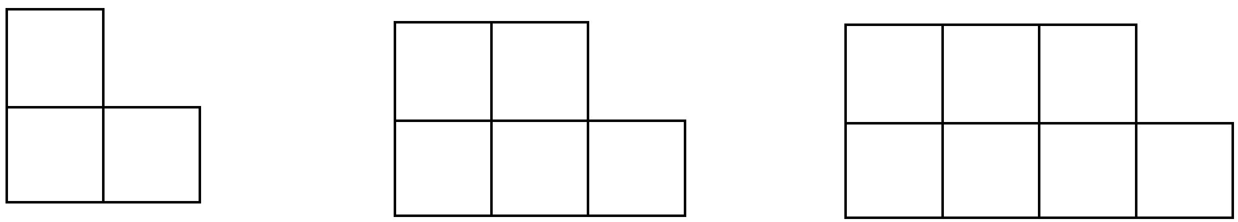
Broj kvadratića u n-tom članu: $a_{(n)} = n + 1$

Sažeci istraživanja s učenicima u razrednoj nastavi

- Učenici češće upotrebljavaju rekurzivne strategije za opis generalizacije nego direktan funkcijski zapis odnosa između dviju varijabli (Radford, Callaher et al.)

- Radford (2012): po njegovom mišljenju funkcijski odnos je glavno obilježje algebarskog razmišljanja

Radford (2012) – učenici 2. razreda



Opiši kako bi pronašao broj kvadratića za bilo koju figuru u tom nizu.

Rezultati

Korištenje različitih načina izražavanja bez korištenja formalnih matematičkih zapisa u obliku formule:

- implicitna upotreba varijable: 12 plus 12 plus 1, ili 50 plus 50 plus 1 - početna razina algebarskog razmišljanja
- eksplicitna upotreba varijable: broj plus broj plus 1 - prema Radfordu, učenik s takvim opisom nadmašuje vezu s konkretnom geometrijskom konstrukcijom

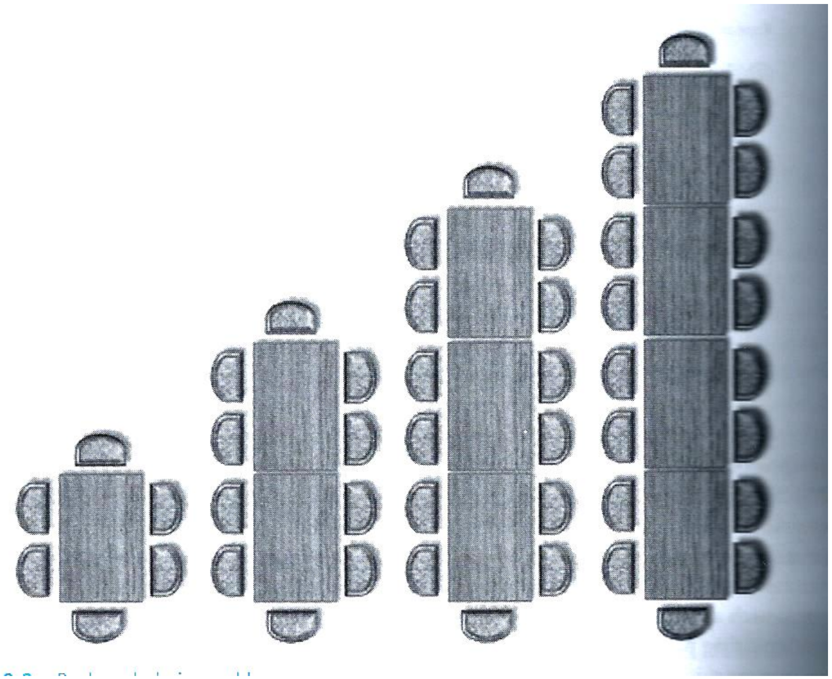
Carraher et al. (2008)

Uloga odabira konkretnog primjera:
geometrijski raspored / grafički prikazi kao početna točka za izvođenje generalizacije.

Primjer: Problem sa stolovima i stolcima

Šest ljudi sjedi za pravokutnim stolom: dva na svakom dužem rubu, i po jedan na svakom kraćem rubu stola. Stolove kombiniramo linearno s kratkim rubom stolova. Koliko ljudi može sjediti za 2 stola, 3 (4, 5, 15, n) stolova?

Grafički prikaz



Prijelaz na simbolični prikaz problema

Broj stolova (S)	Broj stolic (s)
1	6
2	10
3	14
4	18
5	

Oblikovanje generalizacije

Koliko bi ljudi moglo sjediti u nizu od 100 stolova?

Broj stolova (S)	Broj stolic (s)
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22

Rekurzivno: zaključivanje iz koraka u korak – izlazimo iz prethodne vrijednosti (na svakom koraku dodajem 4)

Opće pravilo: traženje odnosa između varijabla:

- Koje su varijable?
- Koja je ovisna i koja neovisna?

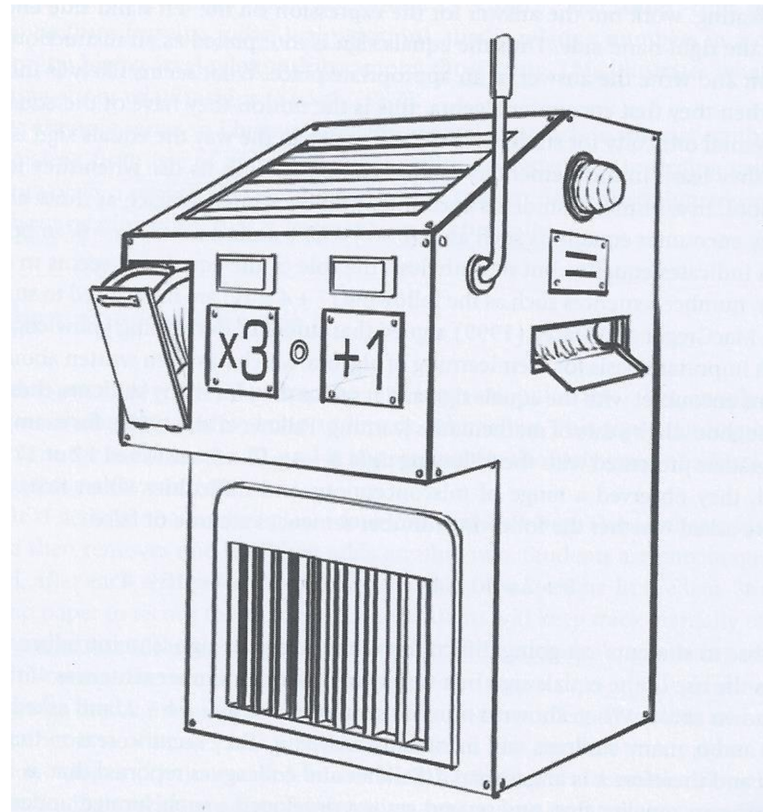
$s = S \times 4 + 2$

Ukratko

nizovi

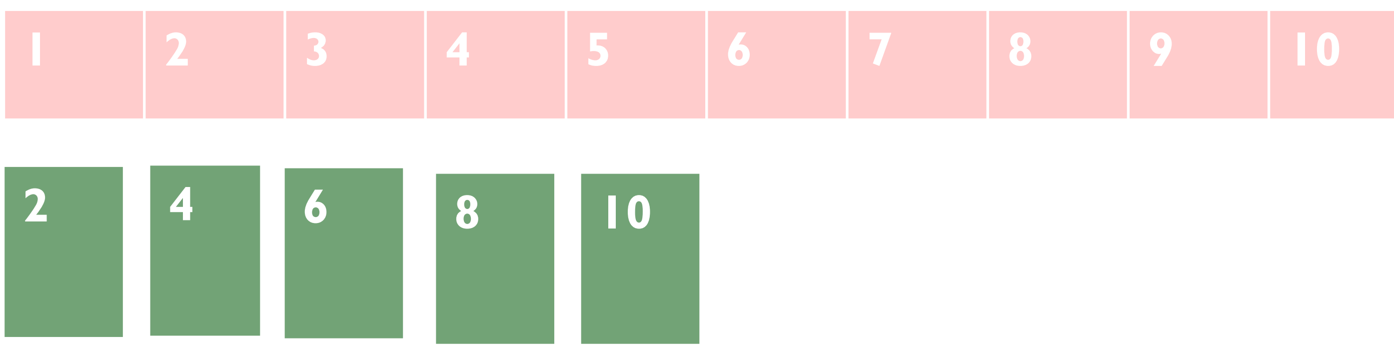
odnosi/relacije

funkcija



Ferrara, Sinclair (2016) – 3. razred

- Brojevni niz
- Aktivnost s toaletnim papirom



Kolika vrijednost će biti napisana na 12. listiću?

- ‘Rekurzivna objašnjenja‘: broje po 2.

- Učiteljeve smjernice:

  Probajte naći mjesto bez brojanja.

  Potražite najbrži mogući način da bi došli do rješenja.

- ‘Funkcijska objašnjenja‘: Učenci postupno počinju govorom izražavati pravilo: broj udvostručim

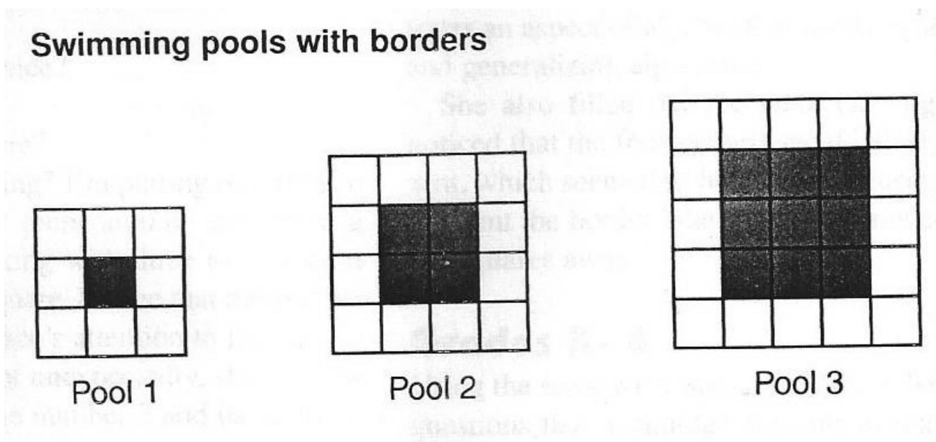
Svitak toaletnog papira

Sažetak

- Uloga toaletnoga papira:
  - opis pozicije pojedinog broja u nizu – lakše primijetiti relaciju između dva skupa brojčanih podatka (pozicija broja i vrijednost broja na listiću).
  - Potičemo prijelaz od rekurzivnog k funkcijskomu opisu pravila.

Problem „ Bazen“ – analiza primjera od 1. razreda do fakulteta

- Miha izrađuje bazene. Svaki bazen ima četverokutni plivački dio. Miha dno bazena prekrije plavim kvadratnim pločicama, a oko bazena je popločan put od bijelih pločica.

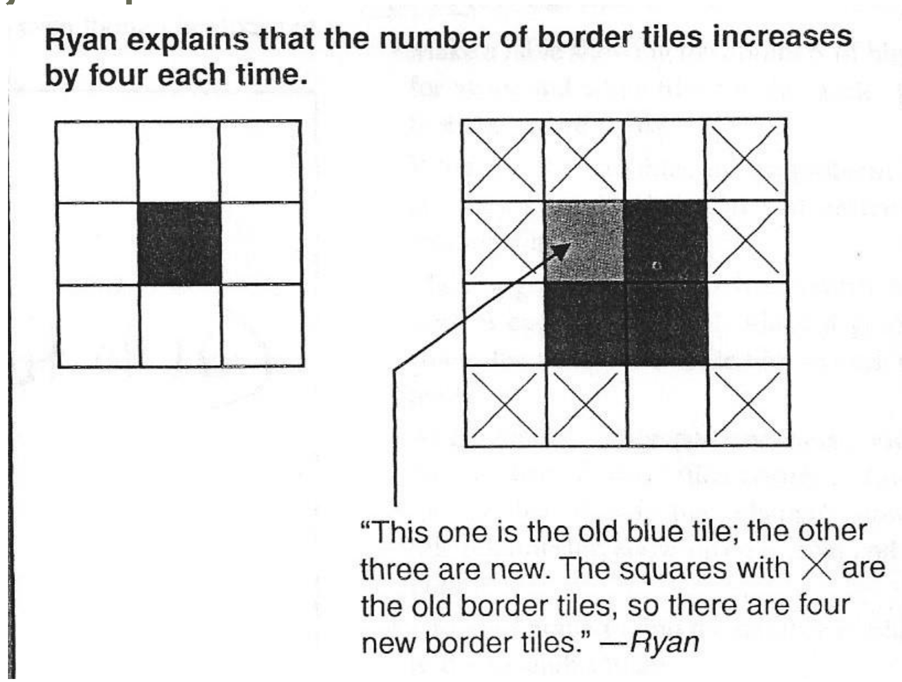


Postupno otežavanje pitanja

- Zbrajanje plavih i bijelih pločica
- Otkrivanje broja plavih pločica za sljedeći primjer.
- Ako bi imali 32 bijele ploče, koliko bi onda bilo plavih u sredini?
- Možeš li napraviti kvadrat s 49 plavih pločica?
- Možeš li napraviti kvadrat s 12 plavih pločica? Zašto da, zašto ne?
- Kako raste broj bijelih pločica?
- Koje se varijable pojavljaju u zadatku? Kako su povezane?
- Nacrtaj graf i uz pomoć grafa pronađi broj bijelih pločica za sljedeći primjer.

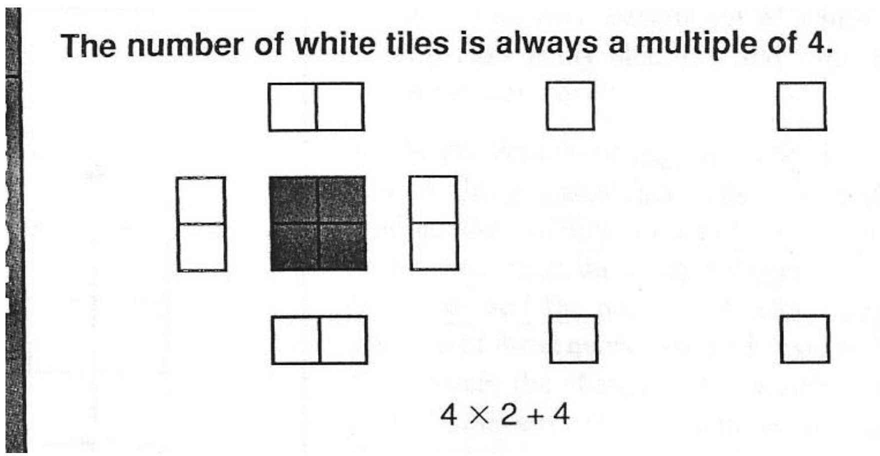
Gdje se nalazi algebarsko razmišljanje?

- Traženje pravila za koje brojeve možemo dobiti kvadratni oblik bazena.
- Traženje pravila za broj bijelih pločica:
  1. Broj bijelih plošča raste za 4 - zašto?



Gde se nalazi algebarsko razmišljanje?

2. Broj bijelih pločica dobijemo tako da broj plavih pločica na jednoj stranici pomnožimo s 4 i dodajemo 4 za 4 kutne pločice.
3. Primijetimo da će broj bijelih pločica uvijek biti višekratnik broja 4.



Problem Ribnjak - istraživanje između studenata razredne nastave na Učiteljskom fakultetu, Ljubljana

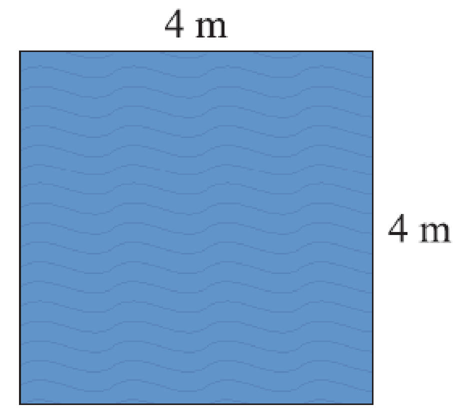
Miha radi u hortikulturnom centru, gdje prodaje ribnjake raznih oblika. Njegova je zadaća savjetovati klijente koliko ploča kvadratnog oblika trebaju žele li obrubiti svoj ribnjak popločenom stazom.

a) Koliko ploča za popločavanje (1mx1m) trebaju za obrubljavanje ribnjaka dimenzija 4mx4m? (slika 1)

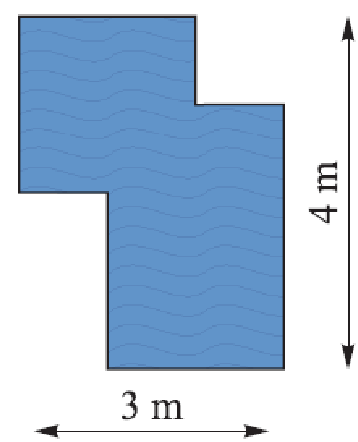
b) Izvedite formulu kojom se Miha može koristiti za izračunavanje broja ploča za popločavanje ruba bilo kojeg ribnjaka oblika kvadrata.

c) Što ako ribnjak nema pravilan oblik? Izvedite formulu i objasnite zašto to funkcionira. (slika 2)

d) Što ako ribnjak ima bilo kakav uglati oblik koji se može skicirati na kvadratnoj mreži?



Slika 1. Kvadratni ribnjak



Slika 2. Ribnjak nepravilnog oblika

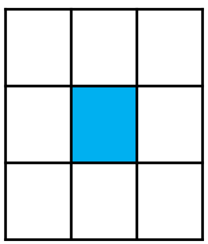
Različiti tipovi generalizacije

Studentica A

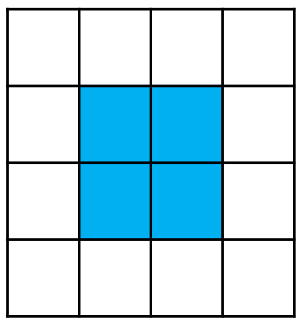
4x4	20 = 4 x 5
5x5	24 = 4 x 6
6x6	28 = 4 x 7
7x7	32 = 4 x 8

$$4\,(a + 1)$$

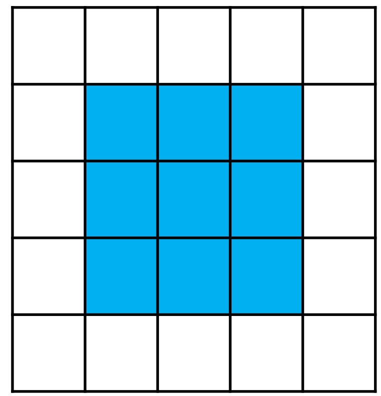
Studentica C



8 ploča



12 ploča



16 ploča

Studentica C

1x1: 8

+4

2x2: 12

+4

3x3: 16

+4

4x4: 20

+4

5x5: 24

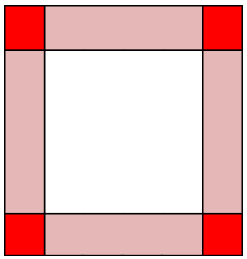
…

10x10: 44

Jer treba ti jedna nova ploča na svakoj stranici kvadrata.

Studentica B

4 x 4:



4 x 4 + 4

n x n: 4 x n + 4

za generalizaciju ne treba puno primjera – može se oblikovati već na jednom primjeru, i način zaključivanja kod ovog primjera se zatim generalizira u opće pravilo. (npr. površina kvadrata, površina pravokutnika).

Nastavni ciljevi - Slovenija

1. triletje

- oblikuju slikovne i geometrijske uzorke,
- prepoznaju pravilo u slikovnom i geometrijskom uzorku i nastavljaju uzorak

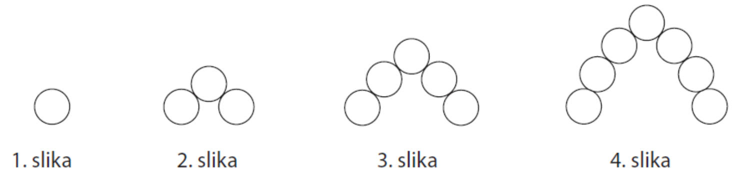
2. triletje

- Promatraju, prepoznaju pravilo uzorka i nastavljaju ga (4.r, 5. r.),
- oblikuju slikovne i geometrijske uzorke (5.r)
- prepoznaju pravilo u brojevnim nizovima, nastavljaju i predviđaju ga (npr. 20. član niza) (6. r)

3. triletje

- Promatraju uzorak i otkrivaju pravilo (7.r)
- Oblikuju ili nastavljaju zadani niz u skupu cijelih brojeva (8.r)
- Promatraju uzorke, otkrivaju pravilo i zapisuju ga algebarskim izrazom (8.r)
- Promatraju i prepoznaju pravilo u brojevnim nizovima i nastavljaju nizove (8., 9.)
- Prepoznaju pravilo u nizovima, traže generalizaciju i pišu algebarski izraz (8., 9.)

Primer : Na poti do funkcijskega opisa zaporedja (Vir: TIMSS 2011, str. 79)



Zgoraj je prikazano zaporedje štirih slik.

A. Dopolni spodnjo tabelo za 4. sliko.

Slika	Število krožcev
1	1
2	3
3	5
4	

B. Če bi zaporedje nadaljevali s 5. sliko, iz koliko krožcev bi bila sestavljena 5. slika?

Odgovor: _______________

C. Če bi zaporedje slik še nadaljevali, iz koliko krožcev bi bila sestavljena 10. slika? (Ne riši slik!)

Rezultati za primer 3 B:

Kognitivno področje: uporaba znanja

Mejnik znanja: srednja raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	2007	72,5	72,8	72,1
	2011	79,0	81,6	76,6

Rezultati za primer 3 C:

Kognitivno področje: sklepanje

Mejnik znanja: visoka raven znanja

Vsebinsko področje in poglavje: števila, vzorci in relacije

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki pravilnih odgovorov	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	2007	39,1	41,7	36,6
	2011	47,4	55,2	40,5

Literatura

- Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo
- Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Matematika [Elektronski vir] (2013). M. Suban, S. Kmetič (ur.).Ljubljana : Zavod RS za šolstvo.
- Matematične naloge raziskave TIMSS : mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja (2011). B. Japelj Pavešić (ur.). Ljubljana : Pedagoški inštitut.
- Wright, J. W., Ellemor- Collins, D., Tabor, P. D. (2012). Developing number knowledge. London: SAGE publications Ltd
- Tirosh, D., Tsamir, D., Levenson, E., Tabach, M. & Barkai, R. (2015). Kindergarten children's recognition of pattern structure. V: J. Novotna, H. Moroava (ur.).Proceedings, developing mathematical language and reasoning. Praga, 2015.
- Radford, L. (2001). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42,* 237–268.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5(1)*, 37-70.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA, 6(4), 117 – 133.

Literatura

- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96. Carraher, D.W., Martinez, M., Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. ZDM, 40 (1), 3 – 22.
- Hodnik Čadež, T, Manfreda Kolar, V. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. Educational studies in mathematics, 89/2, str. 283-306.
- Ciosek, M. (2012). Generalization in the process of defining a concept and exploring it by students. In B. Maj-Tatsis & K. Tatsis (Eds.) *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 38-56). Rzeszow: University of Rzeszow.
- Ferrara, F. in, Sinclair, N. (2016) An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. Educational studies in mathematics.
- Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 89-112.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33–56). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.
- Moss, J. & Beatty, R. (2010). Knowledge Building and Mathematics: Shifting the Responsibility for Knowledge Advancement and Engagement. Canadian Journal of Learning and Technology, 36(1).http://www.cjlt.ca/index.php/cjlt/article/view/575.