Staro, a novo

Franka Miriam Brückler

8. kongres nastavnika matematike RH

4. srpnja 2018.

Historia magistra vitae.

Kad je nastala/otkrivena danačnja školska matematika?

Kad je nastala/otkrivena današnja školska matematika?
Jesu li decimalni razlomci, x ili pak koordinatni sustav nešto što se samo po sebi nameće?

Kad je nastala/otkrivena današnja školska matematika?
Jesu li decimalni razlomci, x ili pak koordinatni sustav nešto što se samo po sebi nameće?
Matematika se postepeno razvijala. I razvija se i dalje.
Iako je svaka pravilno dokazana matematička činjenica vječna istina, to ne znači da se ne mogu naći ljepša, bolja, efikasnija rješenja i metode.

Kad je nastala/otkrivena danačnja školska matematika?
Jesu li decimalni razlomci, x ili pak koordinatni sustav nešto što se samo po sebi nameće?
Matematika se postepeno razvijala. I razvija se i dalje.
Iako je svaka pravilno dokazana matematička činjenica vječna istina, to ne znači da se ne mogu naći ljepša, bolja, efikasnija rješenja i metode.
Povijest matematike nije samo izvor zanimljivosti koje nam olakšavaju komunikaciju s nematematičarima ili čine redovnu nastavu zabavnijom. Primjeri iz povijesti matematike mogu mnogo više od toga: Nastavniku olakšati razumijevanje nekih problema koje učenici imaju, dati ideje za učenje otkrivanjem, pružiti stvarne primjene, ...
Evo nekoliko primjera ...

Negativni brojevi

Tko je prvi uveo negativne brojeve?

Negativni brojevi

Tko je prvi uveo negativne brojeve? Jesu li ih poznavali srednjevjekovni muslimanski matematičari? A europski renesansni?

Negativni brojevi

Tko je prvi uveo negativne brojeve? Jesu li ih poznavali srednjevjekovni muslimanski matematičari? A europski renesansni?

- NRICH: History of negative numbers;
- Al-Hwārizmī (ca. 780.–850.): $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$?!

Negativni brojevi

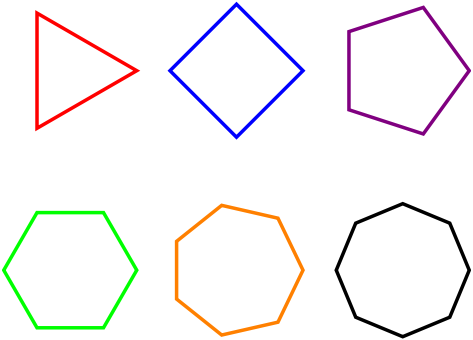
Tko je prvi uveo negativne brojeve? Jesu li ih poznavali srednjevjekovni muslimanski matematičari? A europski renesansni?

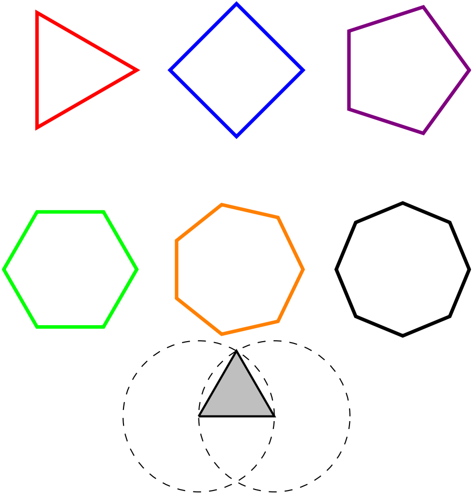
- NRICH: History of negative numbers;
- Al-Hwārizmī (ca. 780.–850.): $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$?!
- Leonardo iz Pise (ca. 1170.–1240.) *Četiri čovjeka su našli novčanik. Ako prvi svom vlastitom novcu doda novac iz novčanika, imat će dvaput više od drugog i trećeg zajedno. Ako drugi svom vlastitom novcu doda novac iz novčanika, imat će triput više od trećeg i četvrtog zajedno. Ako treći svom vlastitom novcu doda novac iz novčanika, imat će četiri puta više od prvog i četvrtog zajedno. Ako četvrti svom vlastitom novcu doda novac iz novčanika, imat će pet puta više od prvog i drugog zajedno. Koliko je novaca bilo u novčaniku i koliko novaca posjeduje svaki čovjek?*

- John Wallis (1616.–1703.)
  $$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \ldots ?!$$

- John Wallis (1616.–1703.)
  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \ldots$?!
- Leonhard Euler (1707.–1783.)
  Preostaje riješiti slučaj u kojem se $-$ množi s $-$, odnosno primjerice $-a$ s $-b$. Na prvi je pogled očito, s obzirom na slova, da će produkt biti ab, no nije očito da li s predznakom $+$ ili $-$ ispred; sve što znamo je da jedan od tu mora biti jedan od tih znakova. Sad tvrdim da to ne može biti $-$; naime, $-a$ puta $+b$ daje $-ab$, a $-a$ s $-b$ ne može dati isti rezultat kao $-a$ s b, nego mora dati suprotan, dakle $+ab$. Zaključujemo da imamo pravilo: $-$ puta $-$ daje $+$.

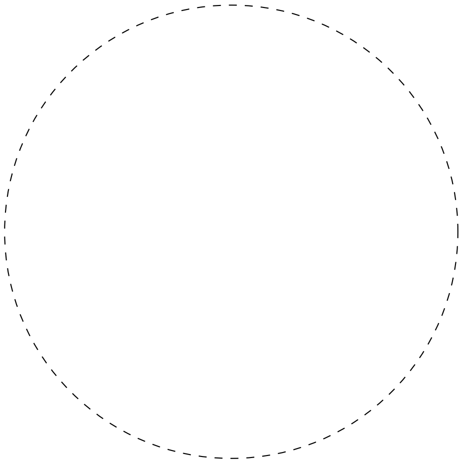
- John Wallis (1616.–1703.)
  $$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \ldots ?!$$
- Leonhard Euler (1707.–1783.)
  Preostaje riješiti slučaj u kojem se $-$ množi s $-$, odnosno primjerice $-a$ s $-b$. Na prvi je pogled očito, s obzirom na slova, da će produkt biti ab, no nije očito da li s predznakom $+$ ili $-$ ispred; sve što znamo je da jedan od tu mora biti jedan od tih znakova. Sad tvrdim da to ne može biti $-$; naime, $-a$ puta $+b$ daje $-ab$, a $-a$ s $-b$ ne može dati isti rezultat kao $-a$ s b, nego mora dati suprotan, dakle $+ab$. Zaključujemo da imamo pravilo: $-$ puta $-$ daje $+$.
- Augustus de Morgan (1806.–1871.)
  The imaginary expression $\sqrt{-a}$ and the negative expression $-b$, have this resemblance, that either of them occurring as the solution of a problem indicates some inconsistency or absurdity. As far as real meaning is concerned, both are imaginary, since $0 - a$ is as inconceivable as $\sqrt{-a}$.



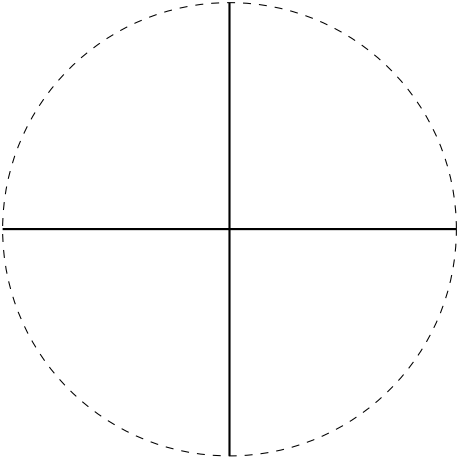


Propozicija 1. Euklidovih *Elemenata*

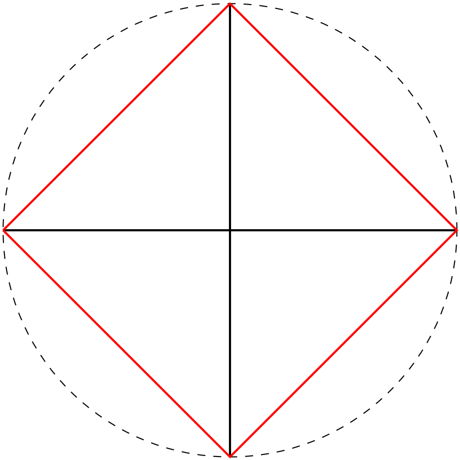
Kvadrat u kružnici (EEIV6)



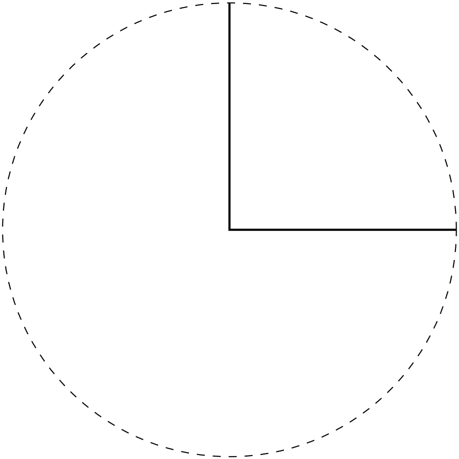
Kvadrat u kružnici (EEIV6)



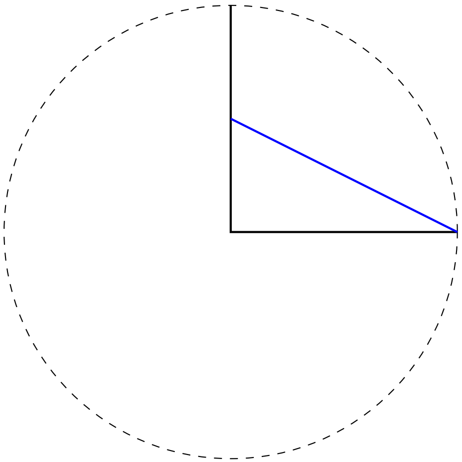
Kvadrat u kružnici (EEIV6)



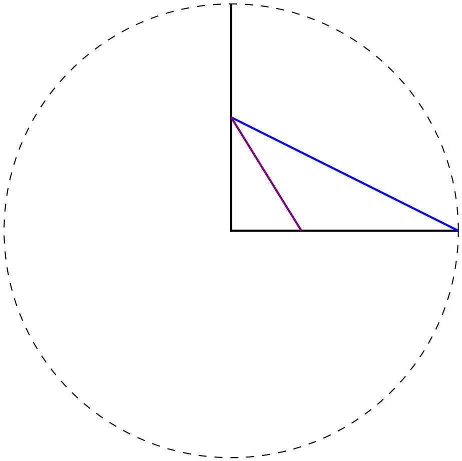
Pravilni peterokut u kružnici ($\boxed{\text{H. W. Richmond, 1893.}}$)



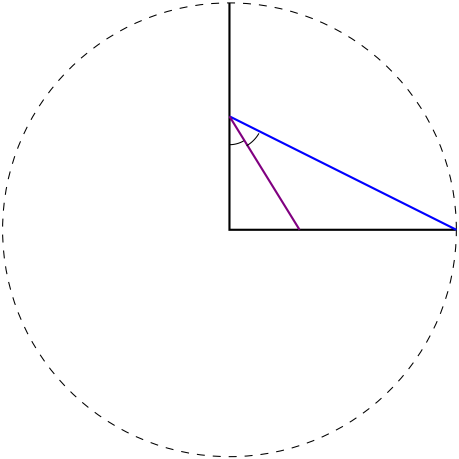
Pravilni peterokut u kružnici ($\boxed{\text{H. W. Richmond, 1893.}}$)



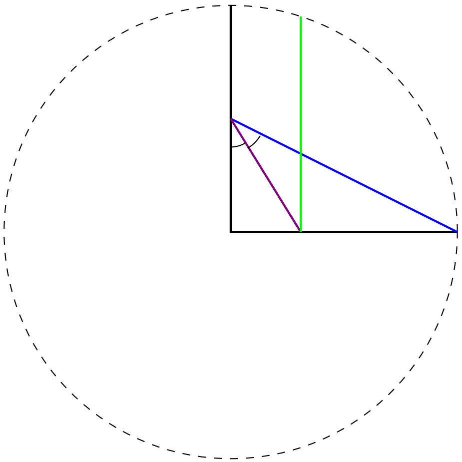
Pravilni peterokut u kružnici (H. W. Richmond, 1893.)



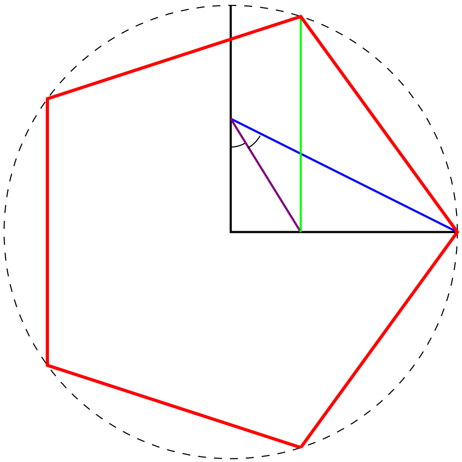
Pravilni peterokut u kružnici (H. W. Richmond, 1893.)



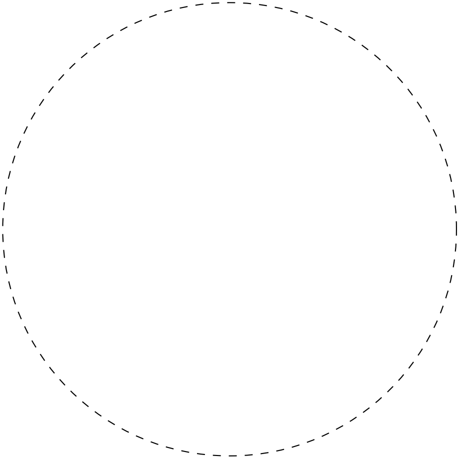
Pravilni peterokut u kružnici ($\boxed{\text{H. W. Richmond, 1893.}}$)



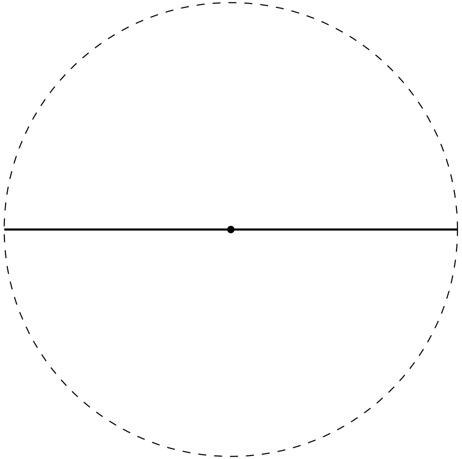
Pravilni peterokut u kružnici (H. W. Richmond, 1893.)



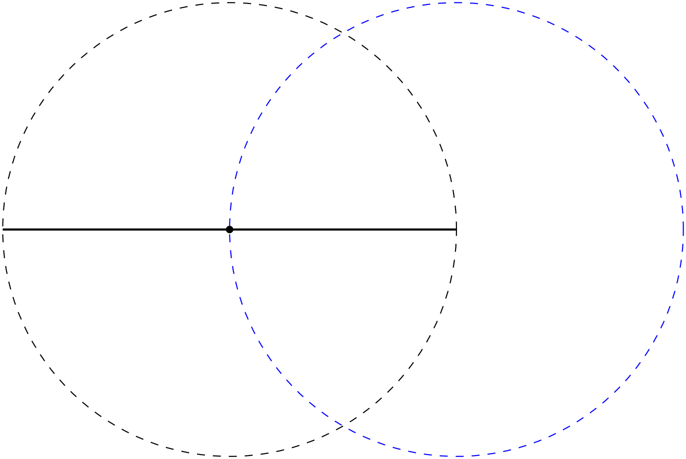
Pravilni šesterokut u kružnici (EEIV15)



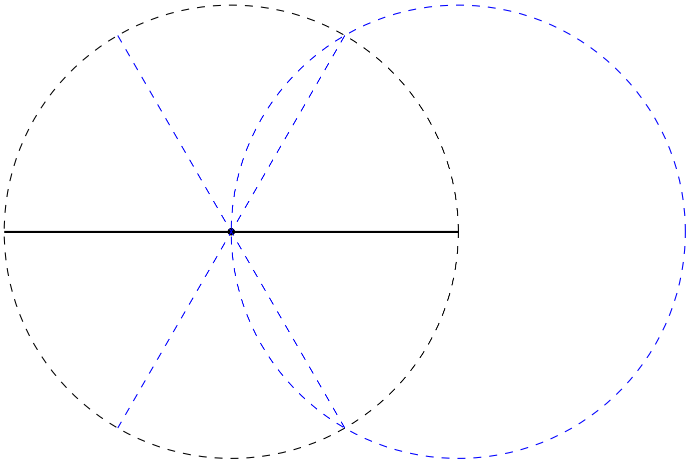
Pravilni šesterokut u kružnici ($\boxed{\text{EEIV15}}$)



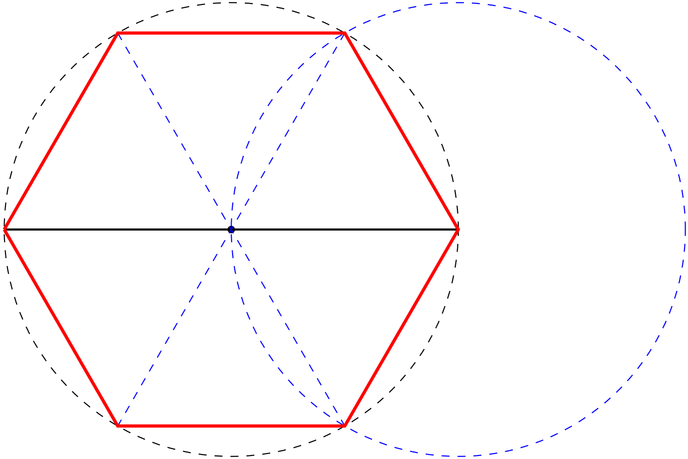
Pravilni šesterokut u kružnici ($\boxed{\text{EEIV15}}$)



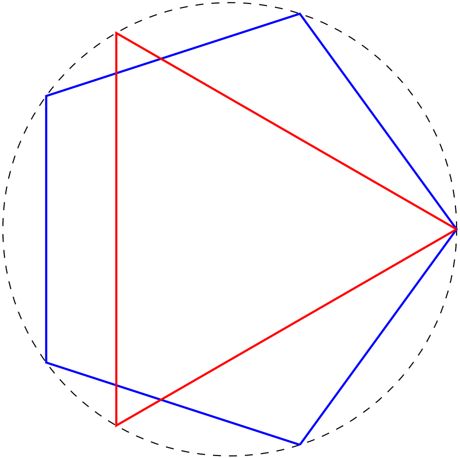
Pravilni šesterokut u kružnici (EEIV15)



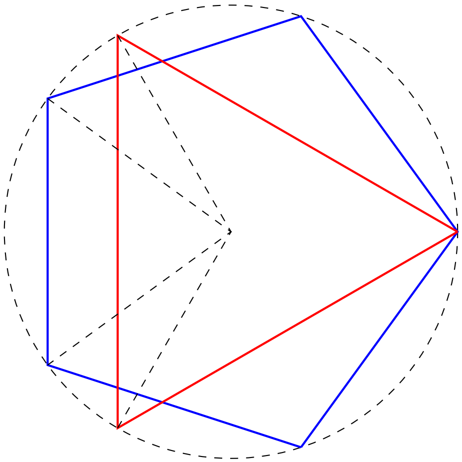
Pravilni šesterokut u kružnici ($\boxed{\text{EEIV15}}$)



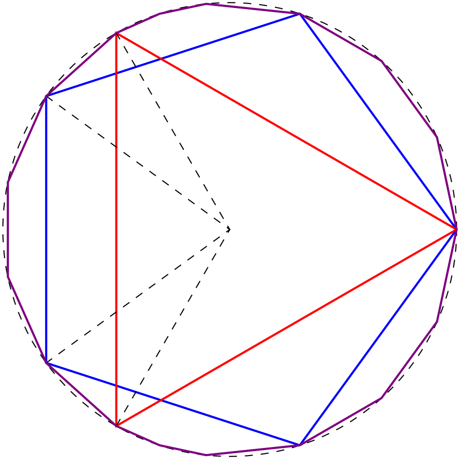
Pravilni 15-erokut u kružnici (EEIV16)

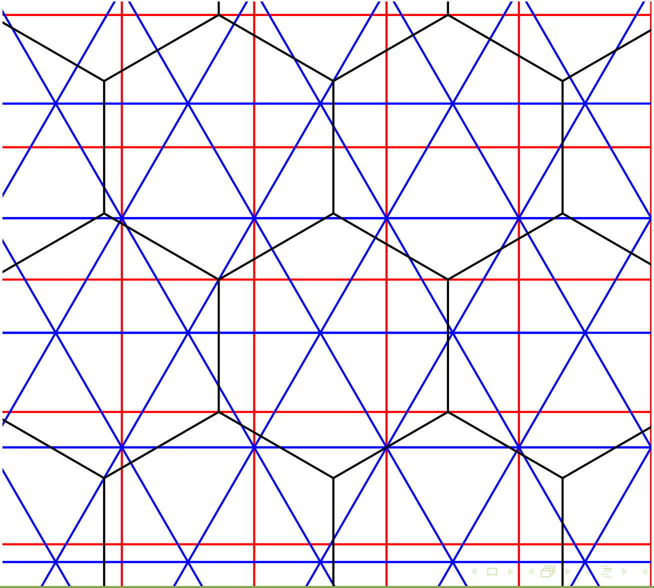


Pravilni 15-erokut u kružnici (EEIV16)



Pravilni 15-erokut u kružnici (EEIV16)





Teorem (EEI32)

U svakom trokutu je svaki vanjski kut jednak zbroju dvama njemu nesusjednih unutrašnjih kutova, a zbroj sva tri unutrašnja kuta jednak je dvama pravim kutovima.

Teorem (EEI32)

U svakom trokutu je svaki vanjski kut jednak zbroju dvama njemu nesusjednih unutrašnjih kutova, a zbroj sva tri unutrašnja kuta jednak je dvama pravim kutovima.

Teorem (Proklosov korolar)

Zbroj unutrašnjih kutova bilo kojeg mnogokuta jednak je dvaput koliko ima stranica, manje četiri, puta pravi kut.

Teorem (EEI32)

U svakom trokutu je svaki vanjski kut jednak zbroju dvama njemu nesusjednih unutrašnjih kutova, a zbroj sva tri unutrašnja kuta jednak je dvama pravim kutovima.

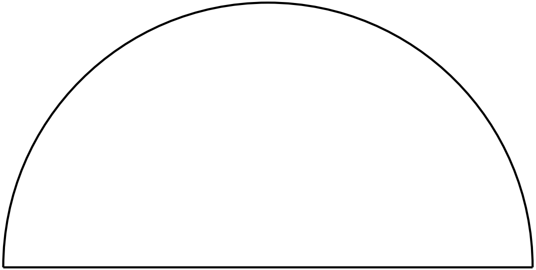
Teorem (Proklosov korolar)

Zbroj unutrašnjih kutova bilo kojeg mnogokuta jednak je dvaput koliko ima stranica, manje četiri, puta pravi kut.

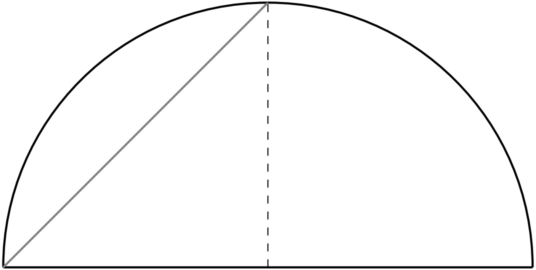
Kako je zbroj kutova u n-terokutu $2n-4$ prava kuta, znači da je u pravilnom n-terokutu svaki kut jednak $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva.
Ako se u nekoj točki ravnine sastaje $m > 2$ pravilnih n-terokuta, $n > 2$:

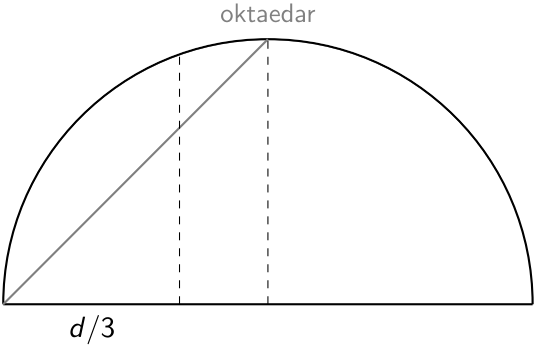
$$m\alpha = m \cdot \frac{2n-4}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow m(n-2) = 2n \Rightarrow m = 2 + \frac{4}{n-2};$$

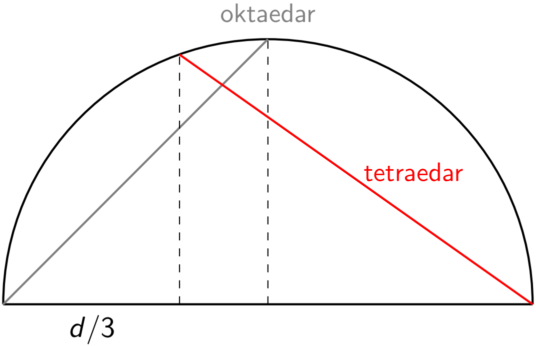
$n = 3 \Rightarrow m = 6$; $n = 4 \Rightarrow m = 4$; $n = 5 \Rightarrow m = 10/3$; $n = 6 \Rightarrow m = 3$;



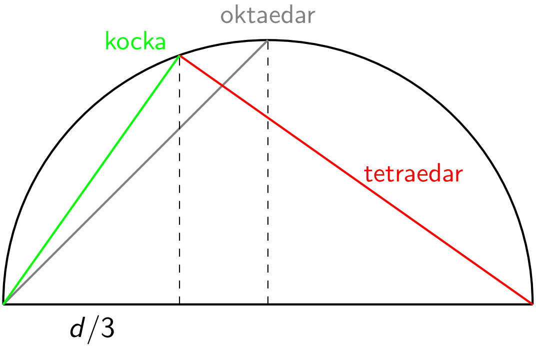
oktaedar

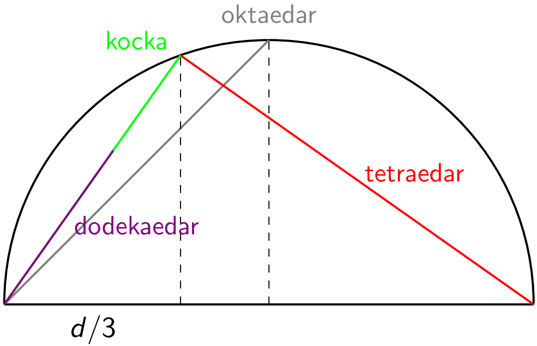


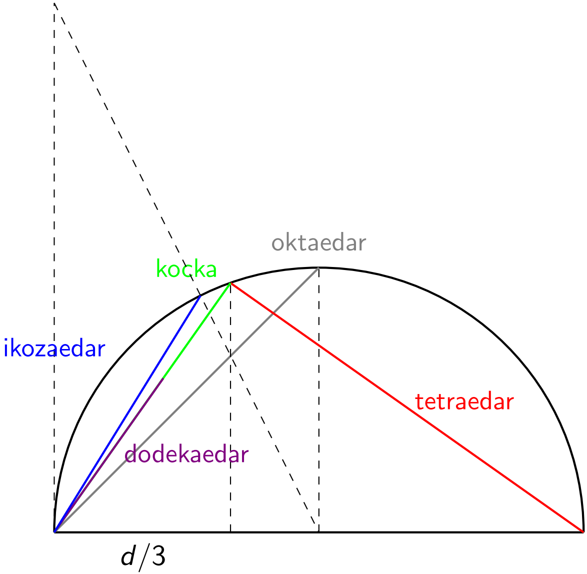

oktaedar
$d/3$


oktaedar
tetraedar
$d/3$


9
5
4
5
20
14
18
12
6
8


oktaedar
kocka
tetraedar
$d/3$


oktaedar
kocka
tetraedar
dodekaedar
$d/3$

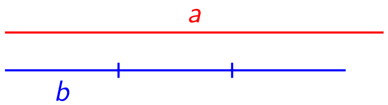

oktaedar
kocka
ikozaedar
tetraedar
dodekaedar
$d/3$

Znate li tko je prvi dokazivao matematičke tvrdnje? Kad?

Znate li tko je prvi dokazivao matematičke tvrdnje? Kad? Pitagora sa Samosa je u 6. st. pr. Kr. osnovao pitagorejsku školu. Naravno, već puno prije toga znalo se uspoređivati veličine po njihovoj mjeri: brojnosti, duljini, površini, volumenu, trajanju, masi.

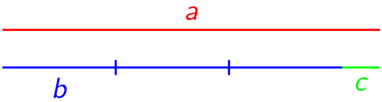
Znate li tko je prvi dokazivao matematičke tvrdnje? Kad? Pitagora sa Samosa je u 6. st. pr. Kr. osnovao pitagorejsku školu. Naravno, već puno prije toga znalo se uspoređivati veličine po njihovoj mjeri: brojnosti, duljini, površini, volumenu, trajanju, masi. Jednako ne znači isto! Jednakost se odnosi na neku osobinu (ovdje: mjeru). Da bismo a i b usporedili po veličini, one moraju biti istovrsne. U tom slučaju se možemo pitati koliko je puta veća od njih (npr. a) veća od druge.

Znate li tko je prvi dokazivao matematičke tvrdnje? Kad? Pitagora sa Samosa je u 6. st. pr. Kr. osnovao pitagorejsku školu. Naravno, već puno prije toga znalo se uspoređivati veličine po njihovoj mjeri: brojnosti, duljini, površini, volumenu, trajanju, masi. Jednako ne znači isto! Jednakost se odnosi na neku osobinu (ovdje: mjeru). Da bismo a i b usporedili po veličini, one moraju biti istovrsne. U tom slučaju se možemo pitati koliko je puta veća od njih (npr. a) veća od druge.
E sad, što ako a nije točno neki prirodan broj puta veća od b?



Euklidov algoritam! Nakon dovoljno koraka naći ćemo veličinu t koja cijeli broj puta stane u prethodni ostatak, ali onda i u a i u b pa dobivamo $a : b$. Ili?

Znate li tko je prvi dokazivao matematičke tvrdnje? Kad? Pitagora sa Samosa je u 6. st. pr. Kr. osnovao pitagorejsku školu. Naravno, već puno prije toga znalo se uspoređivati veličine po njihovoj mjeri: brojnosti, duljini, površini, volumenu, trajanju, masi. Jednako ne znači isto! Jednakost se odnosi na neku osobinu (ovdje: mjeru). Da bismo a i b usporedili po veličini, one moraju biti istovrsne. U tom slučaju se možemo pitati koliko je puta veća od njih (npr. a) veća od druge.
E sad, što ako a nije točno neki prirodan broj puta veća od b?



Euklidov algoritam! Nakon dovoljno koraka naći ćemo veličinu t koja cijeli broj puta stane u prethodni ostatak, ali onda i u a i u b pa dobivamo $a : b$. Ili?

Što ako Euklidov algoritam nikad ne staje?

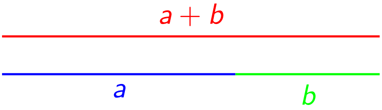
Zlatni rez

Podijelimo dužinu duljine $a+b$ na dva dijela a i b tako da je omjer većeg (a) prema manjem jednak omjeru čitave dužine prema većem dijelu.

Što ako Euklidov algoritam nikad ne staje?

Zlatni rez

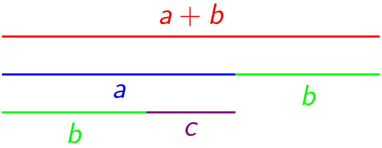
Podijelimo dužinu duljine $a+b$ na dva dijela a i b tako da je omjer većeg (a) prema manjem jednak omjeru čitave dužine prema većem dijelu.



Što ako Euklidov algoritam nikad ne staje?

Zlatni rez

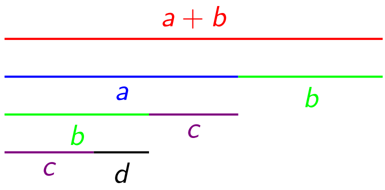
Podijelimo dužinu duljine $a+b$ na dva dijela a i b tako da je omjer većeg (a) prema manjem jednak omjeru čitave dužine prema većem dijelu.



Što ako Euklidov algoritam nikad ne staje?

Zlatni rez

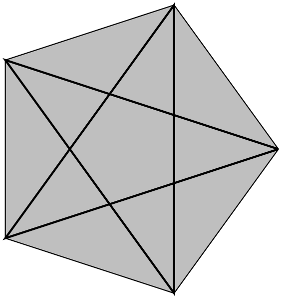
Podijelimo dužinu duljine $a+b$ na dva dijela a i b tako da je omjer većeg (a) prema manjem jednak omjeru čitave dužine prema većem dijelu.

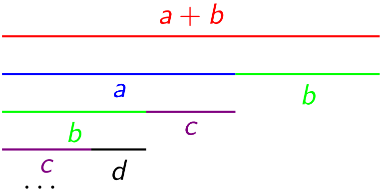


Što ako Euklidov algoritam nikad ne staje?

Zlatni rez

Podijelimo dužinu duljine $a+b$ na dva dijela a i b tako da je omjer većeg (a) prema manjem jednak omjeru čitave dužine prema većem dijelu.





Ako Euklidov algoritam ne staje, veličine su nesumjerljive — nemaju zajedničku mjeru!!

Kako zamijeniti definiciju odnosa dviju veličina kao odnosa dvaju prirodnih brojeva?

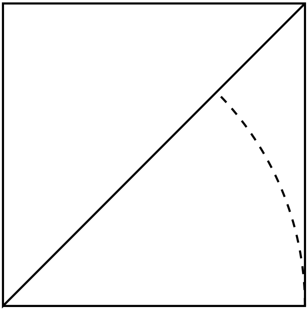
Ako Euklidov algoritam ne staje, veličine su nesumjerljive — nemaju zajedničku mjeru!!

Kako zamijeniti definiciju odnosa dviju veličina kao odnosa dvaju prirodnih brojeva?

Arhimedov, ovaj, Eudoksov aksiom

Za svake dvije istovrsne veličine $a > b$ postoji (prirodan) broj n takav da je $nb \leq a < (n+1)b$.

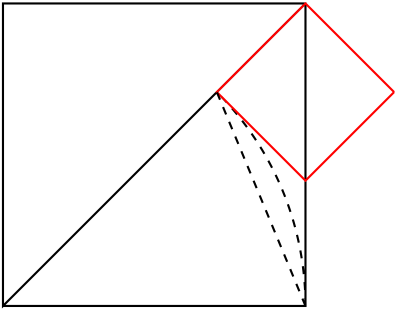
Možemo li tako dokazati „iracionalnost $\sqrt{2}$"? Da!
Neka su a i d duljine stranice i dijagonale nekog kvadrata.
Pretpostavimo da one imaju neku zajedničku mjeru m.



Dijagonala crvenog kvadrata ima duljinu $a - (d - a) = 2a - d$, a njegova stranica je $d - a$. Odnosno, u svakom koraku imamo:

$$a_{n+1} = d_n - a_n, \quad d_{n+1} = 2a_n - d_n.$$

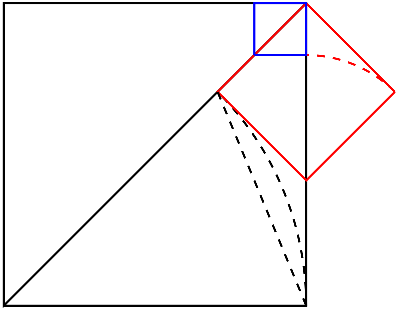
Ako je m mjera od a i d, onda je i od a_2 i d_2, pa onda i od a_3 i d_3 itd. No, a_n-ovi i d_n-ovi postaju proizvoljno mali i u nekom trenu manji od m – kontradikcija!



Dijagonala crvenog kvadrata ima duljinu $a - (d - a) = 2a - d$, a njegova stranica je $d - a$. Odnosno, u svakom koraku imamo:

$$a_{n+1} = d_n - a_n, \quad d_{n+1} = 2a_n - d_n.$$

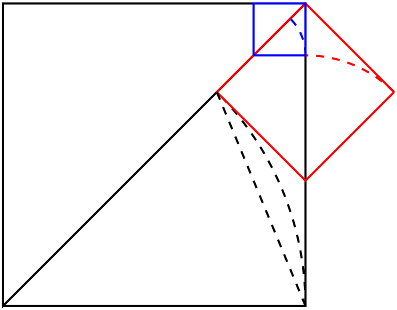
Ako je m mjera od a i d, onda je i od a_2 i d_2, pa onda i od a_3 i d_3 itd. No, a_n-ovi i d_n-ovi postaju proizvoljno mali i u nekom trenu manji od m – kontradikcija!



Dijagonala crvenog kvadrata ima duljinu $a - (d - a) = 2a - d$, a njegova stranica je $d - a$. Odnosno, u svakom koraku imamo:

$$a_{n+1} = d_n - a_n, \quad d_{n+1} = 2a_n - d_n.$$

Ako je m mjera od a i d, onda je i od a_2 i d_2, pa onda i od a_3 i d_3 itd. No, a_n-ovi i d_n-ovi postaju proizvoljno mali i u nekom trenu manji od m – kontradikcija!



Dijagonala crvenog kvadrata ima duljinu $a-(d-a)=2a-d$, a njegova stranica je $d-a$. Odnosno, u svakom koraku imamo:

$$a_{n+1}=d_n-a_n, \quad d_{n+1}=2a_n-d_n.$$

Ako je m mjera od a i d, onda je i od a_2 i d_2, pa onda i od a_3 i d_3 itd. No, a_n-ovi i d_n-ovi postaju proizvoljno mali i u nekom trenu manji od m – kontradikcija!

Računanje drugog korijena – Babilonska (Heronova metoda)

Očito je $18500 > 10000 = 100^2$

Računanje drugog korijena – Babilonska (Heronova metoda)

Očito je $18500 > 10000 = 100^2$ pa kao prvu aproksimaciju možemo uzeti $a_0 = 100$.

Računanje drugog korijena – Babilonska (Heronova metoda)

Očito je $18500 > 10000 = 100^2$ pa kao prvu aproksimaciju možemo uzeti $a_0 = 100$. Imamo redom

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{18500}{a_0}\right) = 142{,}5,$$

Računanje drugog korijena – Babilonska (Heronova metoda)

Očito je $18500 > 10000 = 100^2$ pa kao prvu aproksimaciju možemo uzeti $a_0 = 100$. Imamo redom

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{18500}{a_0}\right) = 142{,}5,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{18500}{a_1}\right) = 136{,}1623\ldots,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{18500}{a_2}\right) = 136{,}01\ldots$$

Računanje drugog korijena – Babilonska (Heronova metoda)

Očito je $18500 > 10000 = 100^2$ pa kao prvu aproksimaciju možemo uzeti $a_0 = 100$. Imamo redom

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{18500}{a_0}\right) = 142{,}5,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{18500}{a_1}\right) = 136{,}1623\ldots,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{18500}{a_2}\right) = 136{,}01\ldots$$

S obzirom na to da se cjelobrojni dio ponovio, stajemo i zaključujemo: $\lfloor\sqrt{18500}\rfloor = 136$.

Računanje drugog korijena – starokineska metoda

Očito je $\lfloor\sqrt{18500}\rfloor$ troznamenkast, dakle oblika $100a + 10b + c$.

Računanje drugog korijena – starokineska metoda

Očito je $\lfloor\sqrt{18500}\rfloor$ troznamenkast, dakle oblika $100a + 10b + c$.
Stoga je $18500 = (100a + 10b + c)^2 + \text{ostatak}$.

Računanje drugog korijena – starokineska metoda

Očito je $\lfloor\sqrt{18500}\rfloor$ troznamenkast, dakle oblika $100a + 10b + c$. Stoga je $18500 = (100a + 10b + c)^2 + \text{ostatak}$. Zanemarivanjem ostatka ostaje

$$18500 = 10000a^2 + 2 \cdot 100a \cdot (10b + c) + (10b + c)^2.$$

Stoga pogađamo da je $a = 1$.

Računanje drugog korijena – starokineska metoda

Očito je $\lfloor\sqrt{18500}\rfloor$ troznamenkast, dakle oblika $100a + 10b + c$.
Stoga je $18500 = (100a + 10b + c)^2 + \text{ostatak}$. Zanemarivanjem ostatka ostaje

$$18500 = 10000a^2 + 2 \cdot 100a \cdot (10b + c) + (10b + c)^2.$$

Stoga pogađamo da je $a = 1$. Uvrstimo:

$$18500 = 10000 + 200 \cdot (10b + c) + (10b + c)^2 1ightarrow$$

$$8500 = 2000b+200c+100b^2+20bc+c^2 = 100b(20+b)+200c+20bc+c^2.$$

Isprobavamo: $b = 1,\ b = 2,\ b = 3,\ b = 4.$

Računanje drugog korijena – starokineska metoda

Očito je $\lfloor\sqrt{18500}\rfloor$ troznamenkast, dakle oblika $100a + 10b + c$. Stoga je $18500 = (100a + 10b + c)^2 + \text{ostatak}$. Zanemarivanjem ostatka ostaje

$$18500 = 10000a^2 + 2 \cdot 100a \cdot (10b + c) + (10b + c)^2.$$

Stoga pogađamo da je $a = 1$. Uvrstimo:

$$18500 = 10000 + 200 \cdot (10b + c) + (10b + c)^2 1ightarrow$$

$$8500 = 2000b + 200c + 100b^2 + 20bc + c^2 = 100b(20 + b) + 200c + 20bc + c^2.$$

Isprobavamo: $b = 1$, $b = 2$, $b = 3$, $b = 4$. Za $b = 4$ je $100b(20 + b) > 8500$, dakle $b = 3$ i imamo

$$8500 = 300 \cdot 23 + 200c + 60c + c^2 1ightarrow 1600 = c(260 + c),$$

iz čega se opet isprobavanjem c od 1 nadalje dobije $c = 6$.

Računanje drugog korijena – staroindijska metoda

Uzmimo kao prvu aproksimaciju $\alpha = 100$.

Računanje drugog korijena – staroindijska metoda

Uzmimo kao prvu aproksimaciju $\alpha = 100$. Iz $x = \alpha + y$, $x^2 = 18500$, dobijemo da je za svaku aproksimaciju α

$$y = \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha + y} \approx \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

Računanje drugog korijena – staroindijska metoda

Uzmimo kao prvu aproksimaciju $\alpha = 100$. Iz $x = \alpha + y$, $x^2 = 18500$, dobijemo da je za svaku aproksimaciju α

$$y = \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha + y} \approx \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

Iz $\alpha = 100$ dobijemo $y = 42{,}5\ldots$, odnosno kao procjenu druge znamenke uzimamo 4.

Računanje drugog korijena – staroindijska metoda

Uzmimo kao prvu aproksimaciju $\alpha = 100$. Iz $x = \alpha + y$, $x^2 = 18500$, dobijemo da je za svaku aproksimaciju α

$$y = \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha + y} \approx \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

Iz $\alpha = 100$ dobijemo $y = 42{,}5\ldots$, odnosno kao procjenu druge znamenke uzimamo 4. No, $\alpha = 140$ kvadrirano je veće od 18500 pa smanjujemo drugu znamenku na 3 i druga aproksimacija je $\alpha = 130$.

Računanje drugog korijena – staroindijska metoda

Uzmimo kao prvu aproksimaciju $\alpha = 100$. Iz $x = \alpha + y$, $x^2 = 18500$, dobijemo da je za svaku aproksimaciju α

$$y = \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha + y} \approx \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

Iz $\alpha = 100$ dobijemo $y = 42{,}5\ldots$, odnosno kao procjenu druge znamenke uzimamo 4. No, $\alpha = 140$ kvadrirano je veće od 18500 pa smanjujemo drugu znamenku na 3 i druga aproksimacija je $\alpha = 130$. Njenim uvrštavanjem u gornju formulu dobijemo $y = 6{,}15\ldots$, odnosno kao treću znamenku uzimamo 6 i dobijemo $\alpha = 136$.

Računanje drugog korijena – staroindijska metoda

Uzmimo kao prvu aproksimaciju $\alpha = 100$. Iz $x = \alpha + y$, $x^2 = 18500$, dobijemo da je za svaku aproksimaciju α

$$y = \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha + y} \approx \frac{18500 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

Iz $\alpha = 100$ dobijemo $y = 42{,}5\ldots$, odnosno kao procjenu druge znamenke uzimamo 4. No, $\alpha = 140$ kvadrirano je veće od 18500 pa smanjujemo drugu znamenku na 3 i druga aproksimacija je $\alpha = 130$. Njenim uvrštavanjem u gornju formulu dobijemo $y = 6{,}15\ldots$, odnosno kao treću znamenku uzimamo 6 i dobijemo $\alpha = 136$. Kako je $\alpha^2 < 18500$, ta je aproksimacija prihvatljiva, a kako smo odredili tri znamenke, gotovi smo.

Otkud kompleksni brojevi?

Kako obično motiviramo uvod u kompleksne brojeve?

Otkud kompleksni brojevi?

Kako obično motiviramo uvod u kompleksne brojeve? Girolamo Cardano (1501.–1576.): $x^3 = 15x + 4$.

Otkud kompleksni brojevi?

Kako obično motiviramo uvod u kompleksne brojeve? Girolamo Cardano (1501.–1576.): $x^3 = 15x + 4$.

$$x = u + v1ightarrowu^3 + v^3 = 15(u+v) - 3uv(u+v) + 40$$

$$u^3 + v^3 = 4, \quad u^3v^3 = \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 1251ightarrow$$

$$u^6 - 4u^3 + 125 = 0,$$

$$(u^3 - 2)^2 + 121 = 0,$$

$$u^3 - 2 = \pm\sqrt{-121}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4?!$$

Rafael Bombelli (1526.–1572.): Ako to uopće jest smisleno, onda je $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}$.

Rafael Bombelli (1526.–1572.): Ako to uopće jest smisleno, onda je $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1}$.

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1},$$

$$2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1},$$

$$2 = a(a^2 - 3b^2), \quad 11 = b(3a^2 - b^2).$$

Za $a = 2$ i $b = 1$ je to OK, dakle je

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

- povijest matematike koristi se u nastavi matematike još od 1960ih;
- 1995. je osnovan *The Institute about the History of Mathematics and Its Use in Teaching*;
- 1996. je na ICME (*International Congress on Mathematics Education*) istaknuta važnost korištenja povijesti matematike u školskoj nastavi matematike;
- 2003. P. Liu (*Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in their Teaching?*, The Mathematics Teacher 96) ističe pet razloga zašto:
  1. znanje povijesti povećava motivaciju učenika i pomaže im u stjecanju pozitivnog stava prema matematici; historical knowledge
  2. kad vidimo koje su prepreke postojale kroz povijest matematike olakšava razumijevanje sadašnjih;
  3. rješavanje zadataka iz povijesti olakšava razvoj matematičkog razmišljanja;
  4. povijest daje ljudsku dimenziju matematičkom znanju;
  5. povijest služi kao vodič nastavnicima.

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;
- matematički aspekti povijesnih događaja;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;
- matematički aspekti povijesnih događaja;
- poticanje učenika da razumiju povijesne probleme čije odgovore upravo uče;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;
- matematički aspekti povijesnih događaja;
- poticanje učenika da razumiju povijesne probleme čije odgovore upravo uče;
- grupne ili domaće zadaće s povijesnim tekstovima;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;
- matematički aspekti povijesnih događaja;
- poticanje učenika da razumiju povijesne probleme čije odgovore upravo uče;
- grupne ili domaće zadaće s povijesnim tekstovima;
- dramske aktivnosti;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;
- matematički aspekti povijesnih događaja;
- poticanje učenika da razumiju povijesne probleme čije odgovore upravo uče;
- grupne ili domaće zadaće s povijesnim tekstovima;
- dramske aktivnosti;
- posteri i drugi projekti;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;
- matematički aspekti povijesnih događaja;
- poticanje učenika da razumiju povijesne probleme čije odgovore upravo uče;
- grupne ili domaće zadaće s povijesnim tekstovima;
- dramske aktivnosti;
- posteri i drugi projekti;
- ilustriranje tehnika i metoda povijesnim primjerima;

Neki načini za uključenje povijesti matematike u školsku nastavu

- anegdote;
- povijesni uvod u koncepte koji se uvode;
- matematički aspekti povijesnih događaja;
- poticanje učenika da razumiju povijesne probleme čije odgovore upravo uče;
- grupne ili domaće zadaće s povijesnim tekstovima;
- dramske aktivnosti;
- posteri i drugi projekti;
- ilustriranje tehnika i metoda povijesnim primjerima;
- diskusija povijesnih grešaka, alternativa i sl. ...

Koristiti povijest matematike u nastavi ne znači predavati povijest matematike!

Literatura

1. A. Arcavi, M. Bruckheimer, R. Ben-Zvi, Maybe a Mathematics Teacher Can Profit from the Study of the History of Mathematics. For the Learning of Mathematics 3(1) 1982, 30–37.
2. J. K. Bidwell, Humanize your Classroom with the History of Mathematics. The Mathematics Teacher 86 (6) 1993, 461–464.
3. R. Calinger (ur.), Vita Mathematica. MAA, 1996.
4. M. Dejić, A. M. Mihajlović, History of Mathematics and Teaching Mathematics. Teaching Innovations 27 (3) 2014, 15–30.
5. J. Fauvel, Using History in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics 11 (2) 1991, 3–6.
6. S. Göktepe, A. Şükrü Özdemir, An example of using history of mathematics in classes. European Journal of Science and Mathematics Education 1 (3) 2013, 125–136.
7. J. Klowss, Using History to Teach Mathematics. http://math.unipa.it/~grim/21_project/Klowss328-330.pdf.
8. A. Shell-Gellasch (ur.), Hands on History – A Resource for Teaching Mathematics. MAA, 2007.

Obrazovanje treba započeti s matematikom. Ona naime stvara dobro oblikovane mozgove koji su u stanju pravilno zaključivati. Štoviše se može reći da se onima koji su učili matematiku tijekom svog djetinjstva može vjerovati jer su stekli čvrste temelje za argumentirenje, koji su im postali druga priroda.

Ibn Haldun, 1332. Tunis –1406. Kairo,

Obrazovanje treba započeti s matematikom. Ona naime stvara dobro oblikovane mozgove koji su u stanju pravilno zaključivati. Štoviše se može reći da se onima koji su učili matematiku tijekom svog djetinjstva može vjerovati jer su stekli čvrste temelje za argumentirenje, koji su im postali druga priroda.

Ibn Haldun, 1332. Tunis –1406. Kairo, arapski povjesničar i političar.