

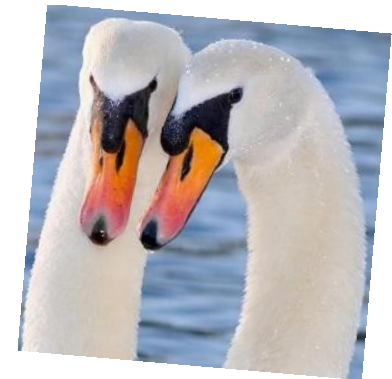
# EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA - UMIJEĆE POUČAVANJA

Željka Vrcelj, prof. savjetnik  
Željeznička tehnička škola Moravice

Osmi kongres nastavnika matematike  
Republike Hrvatske  
Zagreb, 3. – 5. srpnja 2018.

# UMIJEĆE POUČAVANJA – 1

- inovativni pristupi poučavanju
  - nadahnuće
  - stjecanje vještina i stavova nužnih za život u 21. stoljeću
- obrazovanje za održivi razvoj
  - preoblikovanje postojećih obrazovnih programa i strategija poučavanja
  - novi oblici učenja
- pet “stupova” učenja
  - znati, činiti, živjeti zajedno, biti, učiti



# UMIJEĆE POUČAVANJA – 2

- konstruktivistički pristup učenju
  - razvojna i negujuća perspektiva poučavanja
  - Glasserova kvalitetna škola
    - suradničko učenje
  - projekt “Čitanje i pisanje za kritičko mišljenje”
    - grozdovi, činkvine
  - eksperimentalni istraživački zadaci
- aktivno učenje, razvijanje intelektualne radoznalosti i kreativnosti



WILLIAM GLASSER  
INTERNATIONAL



# GROZDOVI – 1



- kreiranje u timovima
  - razmišljanje učenika prije obrade nastavne cjeline
- izrada grafičkih prikaza
  - predznanje učenika (spoznaje i uvjerenja) → nadogradnja novih informacija
  - pojmovi i primjeri – povezivanje
- poticanje znatiželje, kreativnosti i međusobne komunikacije
- izlaganje predstavnika grupa – poster (uspoređivanje)



# GROZDOVI – 2



- nastavnik
  - usmjerava rad učenika, orijentacijska podrška
  - potiče učenike na komunikaciju – osjećaj pripadanja grupi, odnosi pozitivne ovisnosti
  - ohrabrivanje govornog učestvovanja članova grupa – pojedinci su nesigurni i šutljivi
- samopouzdanje
  - prihvaćanje i uvažavanje mišljenja – aktivna uključenost učenika u kritičku analizu
- interakcija
  - važnost individualnog i društvenog iskustva u procesu učenja



# SURADNIČKO UČENJE – 1

- zajednički (timski) rad učenika na problemskom zadatku, uz kritičko i analitičko razmišljanje
- aktivno učenje
- grupne uloge – međusobno podržavanje
  - odgovornost za vlastiti uspjeh, ali i za postignuća ostalih učenika
  - vještine surađivanja – pomaganje, provjeravanje izvršavanja zadatka, sažimanje rezultata rada, pohvala



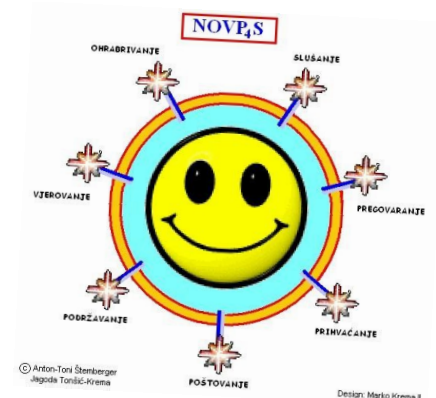
# SURADNIČKO UČENJE – 2

- nastavnici – voditelji
  - dizajniranje obrazovnih materijala → potrebe (pripadanje, moć, sloboda, zabava) i sposobnosti učenika
- učenici
  - proučavanje obavezne i izborne literature, uz pretraživanje interneta i promišljanje → razumijevanje, produbljivanje i primjena gradiva
  - analiza i komentari programskih sadržaja, problemskih situacija i računskih zadataka



# SURADNIČKO UČENJE – 3

- umijeće rješavanja problema
  - izazov i poticaj za osobnu kreativnost i istraživanje
- iskustveno učenje
  - integracija kvalitetne komunikacije, visoke razine interaktivnosti i samovrednovanja
  - razvijanje vještina nužnih za uspješno cjeloživotno učenje

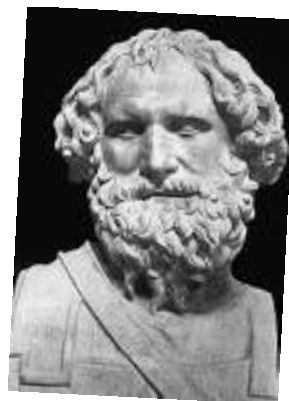




# POVIJESNI RAZVOJ SPOZNAJA – 1

## (EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA)

- starogrčki matematičar Arhimed (3. st. pr. Kr.)
  - svemir ispunjava  $10^{63}$  zrnaca pijeska
- Maya (stari Meksiko, 300. – 900. god.)
  - vremenska ljestvica – starost svemira ( $10^{29}$  godina)
- indijska aritmetika (5. – 16. st.)
  - veliki brojevi (na primjer  $10^{17}$  )
  - posebno nazivlje za pojedine veličine
  - starost svemira u skladu s današnjim spoznajama ( $8,6 \cdot 10^9$  godina)



# POVIJESNI RAZVOJ SPOZNAJA – 2

## (EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA)

- Euler (švicarski matematičar, 18. st.)
  - eksponencijalna kvantiteta, tj. funkcija
- Legenda o izumitelju šaha – 1
  - Indija (6. st.)
  - car Šeram odlučio je bogato nagraditi podanika vezira Sesu, izumitelja igre



# POVIJESNI RAZVOJ SPOZNAJA – 3

## (EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA)

- Legenda o izumitelju šaha – 2
  - Sesa: “Želim da mi za prvo polje na ploči date **jedno** zrno pšenice, za drugo polje **dva** zrna, za treće **četiri**, za četvrto **osam**, i tako za svako sljedeće **dva puta više** zrna nego za prethodno polje.”
  - Šeram: “Zar samo to? Nema problema, dobit ćeš svoju vreću pšenice poslije ručka.”
  - broj zrna pšenice:  $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$ 
    - geometrijski niz – opisuje eksponencijalni rast
  - zahtijevana “skromna” nagrada bila je mnogostruko veća od carevih zaliha pšenice
  - car je, ipak, veziru dao bogatu popudbinu



# POVIJESNI RAZVOJ SPOZNAJA – 4

## (EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA)

○ logaritmi (grč. logos – odnos, arithmos – broj) → 16. / 17. st.



- švicarski urar Bürgi
- Napier (škotski matematičar) – naziv
  - konstruirao mehaničko računalo *Napierove kosti*
- Briggs (engleski matematičar) – prve logaritamske tablice; dekadski logaritmi
- Cavalieri (talijanski matematičar) – oznaka log
- Euler – definicija logaritma; baza
- logaritamsko računalo (šiber) ↔ elektroničko računalo



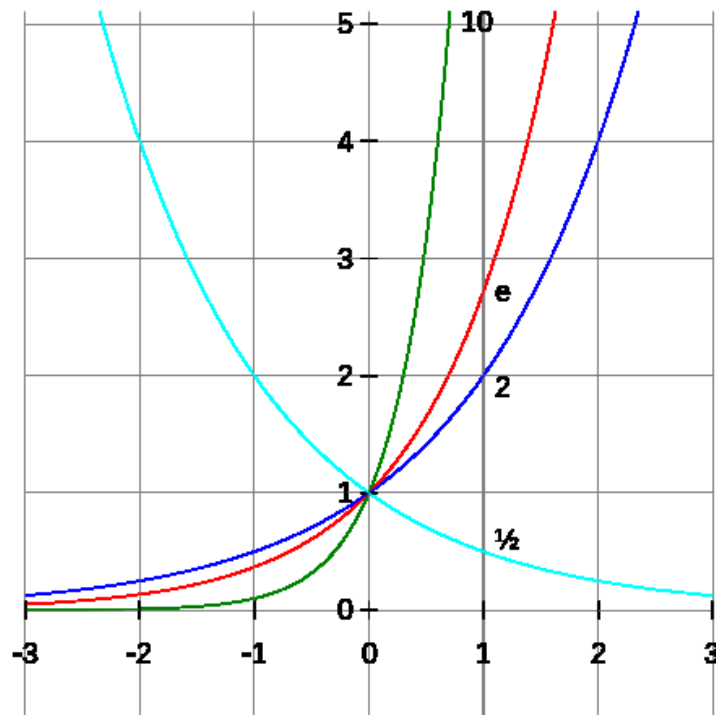
# EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

- potencije (ponavljanje – 1. razred)

- definicija:  $a^x, a > 0, x \in \mathbb{Q}$
- svojstva

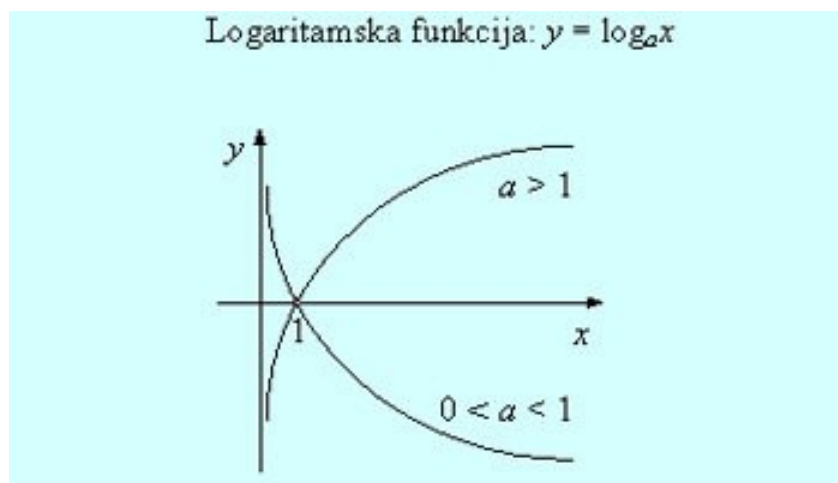
- eksponencijalna funkcija

- definicija:  $f(x) = a^x$   
(  $x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$  )
- svojstva
- grafovi



# LOGARITAMSKA FUNKCIJA

- pojam logaritma
- dekadski logaritam
- logaritamska funkcija i njezin graf; svojstva
- veza eksponencijalne i logaritamske funkcije (inverzne funkcije; zrcaljenje)



# PROBLEMSKI ZADATCI



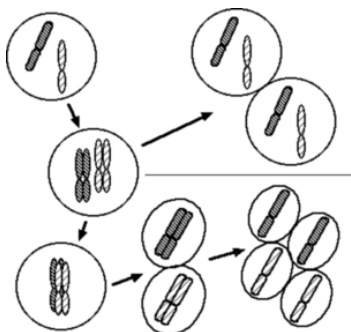
- 2. i 3. razred programa za zanimanje ekonomist → zanimljivi problemski zadatci vezani uz eksponencijalnu i logaritamsku funkciju
- redovna i dodatna nastava; domaća zadaća



# EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA – 1

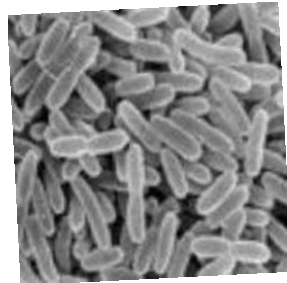
## (PRIMJERI)

- prirast stanovništva
- porast broja jedinki neke životinjske vrste
- mitozu stanice
- porast drvne mase u šumi
- cijena rabljenog automobila
- vrijednost stroja





# RAZVOJ BAKTERIJA U ODGOVARAJUĆOJ KULTURI



Broj bakterija u brzorastućoj kulturi opisuje se eksponencijalnom funkcijom

$$f(x) = 10000 \cdot 10^{0.3x}$$

gdje je  $x$  broj sati proteklih od početka promatranja.

- Koliki je bio broj bakterija u početnom trenutku promatranja, tj. za  $x = 0$ ? (*rješenje: 10000*)
- Koliki će biti broj bakterija nakon *tri* sata? (*79433*)
- Za koliko će se sati broj bakterija *udvostručiti* (u odnosu na broj u početnom trenutku)? (*1.003 h*)
- Za koliko sati će se broj bakterija *usedmerostručiti*? (*2.817 h*)
- Nacrtajte *graf* funkcije!



# OVISNOST BRZINE BRODA O SNAZI MOTORA



Formulom  $v = 6.5P^{1/7}$  izražena je ovisnost brzine  $v$  broda u čvorovima ( $\check{c}v$ ) o snazi  $P$  brodskog motora u konjskim snagama ( $KS$ ).

- 1 čvor = 1.85 km / h

a) Kojom se brzinom (u  $km / h$ ) kreće brod čiji motor ima snagu 600 KS?

*(rješenje: 16.21 čv = 30 km / h)*

b) Ako se snaga motora *udvostruči*, kojom će se brzinom kretati brod? *(17.9 čv = 33.12 km / h)*

c) Brzina Titanika (1912. god.) pri udaru o santu leda bila je 22.5 čvorova. Kolikom su snagom u tom trenutku radili motori? *(5955 KS)*

d) Nacrtajte  $v - P$  graf !



# EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA – 2

(PRIMJERI)

- tlak zraka
- vidljivost
- radioaktivnost
- površina ljudskog tijela
- količina lijeka u krvi
- otapanje šećera u vodi
- učenje stranih riječi
  
- funkcije ponude i potražnje – gospodarsko značenje



# HLAĐENJE ČAJA – 1

(EKSPERIMENTALNI ISTRAŽIVAČKI ZADATAK)

Uronite termometar u šalicu vrelog čaja. Svakih 5 minuta očitajte i pribilježite temperaturu. Pokus traje 1 sat. Podatke dobivene mjerenjem ucrtajte u koordinatni sustav. Što primjećujete?

Pretpostavite da se smanjivanje temperature odvija po eksponencijalnom zakonu. Odredite odgovarajuću funkciju. Rezultate usporedite s onima dobivenim Newtonovim zakonom hlađenja.



# HLAĐENJE ČAJA – 2

(EKSPERIMENTALNI ISTRAŽIVAČKI ZADATAK)

- Rezultati:

$T_t = T_0 \cdot e^{kt}$  → eksponencijalna funkcija

$T_0$  - početna temperatura čaja

$T_t$  - temperatura čaja nakon  $t$  minuta

$e = 2.718$  → Eulerov broj, tj. baza prirodnog logaritma (***ln***)

$k$  – konstanta (posebna svojstva tvari; eksperimentalno)

- Newtonov zakon hlađenja:

$$T_t = T_{okolina} + (T_0 - T_{okolina}) \cdot e^{-kt}$$



# STAROST ORGANSKIH BIĆA

## I PREDMETA – 1

U Katedrali sv. Ivana Krstitelja u Torinu nalazi se laneno platno Sindona, u koje je (prema vjerovanju) nakon smrti bilo umotano Isusovo tijelo.

U laboratorijima sveučilišta u Zürichu, Oxfordu i Arizoni neovisno su provedena znanstvena istraživanja starosti platna metodom radioaktivnog ugljika C – 14.

Istraživanja su pokazala da se u nitima platna zadržala količina od 91,6 % izvorne količine C – 14 ( $m_t = 0.916 m_0$ ).



# STAROST ORGANSKIH BIĆA

## I PREDMETA – 2

$m_0$  – početna masa radioaktivne tvari

$m_t$  – masa tvari nakon vremena  $t$

Ljudi, životinje i biljke za života iz ugljikova dioksida u atmosferi apsorbiraju izotop ugljika C – 14.

Nakon smrti ili ugibanja C – 14 se smanjuje, u sada neživom organizmu, po eksponencijalnom zakonu

$$m_t = m_0 \cdot e^{-kt}$$

Mjerenjem preostale količine C – 14 može se procijeniti starost organizma.



# STAROST ORGANSKIH BIĆA I PREDMETA – 3



- Iz vremena poluraspada  $T$ , koje za izotop ugljika C – 14 iznosi *5730 godina*, odredite konstantu  $k$ .

*Uputa:*

$T$  – vrijeme poluraspada (vrijeme potrebno da se radioaktivnim raspadanjem masa određene tvari prepolovi)

$$m_T = \frac{1}{2} m_0 = m_0 \cdot e^{-kT} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{T}$$

*(rješenje:  $k = 1,2 \cdot 10^{-4}$  )*

- Da li je platno bila Isusova posmrtna odora?

*(  $t \approx 730$ god. - starost platna; 13. st.)*





# STAROST ORGANSKIH BIĆA I PREDMETA – 4

*Zaključak:*

Platno nije moglo biti Isusova posmrtna odora.  
(Prema znanstvenim istraživanjima nastalo je  
između 1260. i 1390. godine.)



# SLOŽENI KAMATNI RAČUN – 1

- računanje kamata na štedne uloge – primjena eksponencijalne funkcije
- jednostavni kamatni račun
  - kamata se obračunava od iste (nepromijenjene) glavnice za svako razdoblje ukamaćivanja
  - vremenska razdoblja kraća od jedne godine
- složene kamate
  - računaju se od promjenjive glavnice (“kamata na kamatu”)
  - nakon svakog razdoblja ukamaćivanja kamata se pribraja glavnici
  - dugoročne financijske operacije



# SLOŽENI KAMATNI RAČUN – 2

Glavnica od 35000 kn, uz godišnje složeno ukamaćivanje, za 6 godina “naraste” na 54000 kn. Kolika je kamatna stopa?

Rezultati:

$C_n = C_0 \cdot r^n \rightarrow$  eksponencijalna funkcija

$C_0$  – početna vrijednost glavnice

$C_n$  – konačna vrijednost glavnice nakon  $n$  godina

$r$  – dekurzivni kamatni faktor  $\rightarrow r = 1 + \frac{p}{100}$

$\rightarrow$  dekurzivni obračun kamata – kamata se obračunava na kraju razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka tog razdoblja

$p$  – kamatna stopa

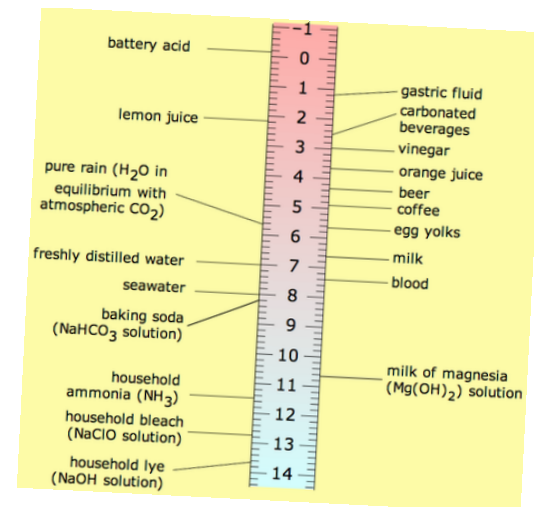
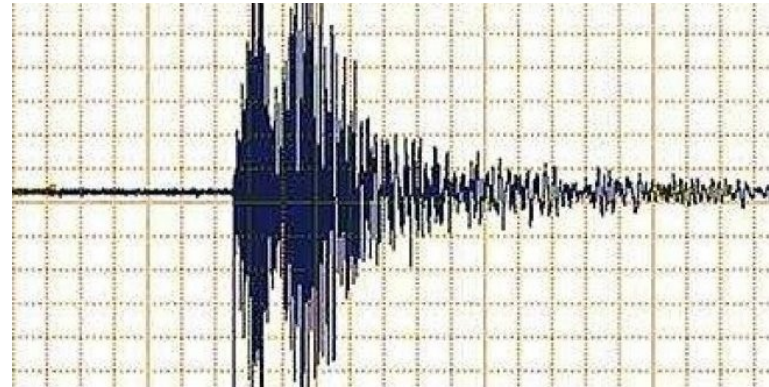
(rješenje:  $r = 1.075$  ;  $p = 7.5$  %)



# LOGARITAMSKA FUNKCIJA

## (PRIMJERI)

- potresi
- zatamnjene naočale
- pH – vrijednost  
(koncentracija vodikovih iona u kišnici – kisele kiše)
- funkcija ukupnih troškova



# KAKVOĆA PROTEINA U JAJETU – 1

(EKSPERIMENTALNI ISTRAŽIVAČKI ZADATAK)

Izmjerite masu  $m$  jajeta u *gramima*. Izlijte ga na vodoravnu površinu nakon razbijanja ljuske. Pomičnom mjerkom ili mikrometarskim vijkom izmjerite visinu  $h$  bjelanjaka u *milimetrima*. Izračunajte **Haughovu jedinicu  $H$**  (prema Raymondu Haughu, 1937. god.), tj. kakvoću proteina u jajetu.



# KAKVOĆA PROTEINA U JAJETU – 2

## (EKSPERIMENTALNI ISTRAŽIVAČKI ZADATAK)

Rezultati:

$$H = 100 \cdot \log(h - 1.7m^{0.37} + 7.6)$$

→ logaritamska funkcija

- $72 \leq H \leq 130$  → oznaka AA
- $60 \leq H \leq 71$  → oznaka A
- $31 \leq H \leq 59$  → oznaka B
- $H \leq 30$  → oznaka C



# KOLIČINA PRODANIH PROIZVODA – 1

Količina prodanih proizvoda mijenja se po logaritamskom zakonu

$$f(x) = 160 + 10 \log_2(200x + 1)$$



gdje je  $x$  ulog (u kunama **kn**) za reklamiranje proizvoda, a  $f(x)$  količina prodanih proizvoda u kilogramima **kg**.



## KOLIČINA PRODANIH PROIZVODA – 2

- Koliko bi se proizvoda prodalo ukoliko se ništa ne ulaže u reklamiranje?

*(rješenje: 160 kg)*

- Ako se za reklamiranje proizvoda uloži 2000 kn, koliko se tada proizvoda proda? *(346 kg)*

*Uputa:*

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \quad (a > 0, a \neq 1; x \in \mathbb{R}^+) \rightarrow$$

promjena baze logaritma

- Nacrtajte *graf* logaritamske funkcije!





# ČINKVINE

- pisanje činkvina u parovima, uz prezentaciju
  - sažimanje pojmova i činjenica u završnom dijelu nastavnog sata
- ČINKVINA – pjesma od pet stihova
  - 1. stih: opis teme u jednoj riječi
  - 2. stih: opis teme u dvije riječi (**pridjevi**)
  - 3. stih: tri riječi koje opisuju radnju (**glagolske imenice**)
  - 4. stih: **fraza** od četiri riječi – osjećaji u vezi s temom
  - 5. stih: jedna riječ koja **sažima**, tj. čini **bit** teme



# ČINKVINE (PRIMJER 1)

- eksponencijalna funkcija

- $f(x) = a^x$
- rastuća, padajuća
- izračunavanje, crtanje, primjena
- legenda o izumitelju šaha
- potencija

- *(učenice Sara i Sanja, 2. A razred,  
šk. 2017. / 2018. god.)*



# ČINKVINE (PRIMJER 2)

## ○ logaritamska funkcija

- logaritam
- dekadski, prirodni
- definiranje, zrcaljenje, izračunavanje
- kakvoća proteina u jajetu
- Napier

- *(učenici Zorana i Yulian, 2. A razred,  
šk. 2017. / 2018. god.)*



# PORTFOLIO

- kreiranje portfolija u određenoj školskoj godini
- kvalitetne domaće zadaće, seminarski radovi, te projektni zadaci
- osvrt na vlastito učenje i napredak
- zabilježena promišljanja, poteškoće i dileme
- pridonosi ustrajnosti i pronalaženju vlastitog puta stjecanja znanja
- *vizija pojedinca, ali i izazovi na putu, podložni su misaonoj i matematičkoj obradi*



# HVALA NA PAŽNJI!

*“Gdje je broj, tamo je ljepota.”*

*(Proclus, 5. st., grčki neoplatonist)*



Pitanja ? ? ?

e – mail:

[zeljka.vrcelj@skole.hr](mailto:zeljka.vrcelj@skole.hr)

