



ESEJ IZ MATEMATIKE

AZRA STAŠČIK, MAG. PRIM. EDUC.

AMANDA GLAVAŠ, MAG. EDUC. MATH. ET INF.

8. KONGRES NASTAVNIKA MATEMATIKE

4.7.2018.

$gt^2 = gt$ $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$
 $\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t^2 + 2th + h^2) - \frac{1}{2}gt^2$
 $v(t+h) - v(t) = g(t+h) - gt$
 $\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = gt + \frac{1}{2}gh$
 $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
 $e^{i\pi} = -1$
 $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(ab)^n = a^n b^n$
 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$
 $C = 2\pi r$ $A = 2\pi r^2$ $A = \frac{1}{2}bh$ $C = 2\pi r$ $A = 2\pi r^2$
 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$ $x^2 + px + q = 0$ $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sh}y$ $z = a + bi$ $z = re^{i\varphi}$
 $S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ $\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2x + \operatorname{sh}^2x$ $i^3 = i^2 i = -i$
 $(kx+b)' = \frac{1}{k} F(kx+b)$ $k = f(kx+b)$ $(cf)' = cf'$ $\operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $i^4 = i^2 i^2 = 1$
 $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $y = \arctan x$ $M(a,b)$ $\left(\frac{1}{k}\right) F$
 $\rho(f(x), f(x')) \leq q \cdot \rho(x, x')$ $f(x) \Leftrightarrow \exists q \in [0, 1) : \forall x, x'$

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

ZAŠTO PROMJENE?

- odmak od tradicionalne nastave
- promjene u metodama, ishodima, sadržajima učenja, oblicima rada, ALI ne u vrednovanju
- kritičko vrednovanje, analiziranje, procjena, problemsko rješavanje i kreativnost
- naglasak na zadacima zatvorenog tipa, ispitivanje proceduralnog znanja (Dijanić, Debelec 2015.) (Trupčević i Glasnović Gracin, 2014.)
- učenici uče ono što ih se ispituje ➡ proceduralno znanje
- kvalitetno znanje ?
- Kvalitetno se znanje postiže, prvenstveno, poučavajući u jednakoj mjeri i proceduralno i konceptualno znanje (NCTM, 2000.), a potom i vrednovanjem obje vrste znanja.
- ispitivanje samo proceduralnog znanja, neovisno o razini nije posve kvalitetni niti dugotrajno

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- **Konceptualno znanje**
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

KONCEPTUALNO ZNANJE

- Anderson i Krathwolh (2001.) četiri dimenzije znanja: činjenično, konceptualno, proceduralno i metakognitivno
- Rittle – Johnson, Siegler i Alibali (2001.) pozitivna korelacija konceptualno i proceduralnog znanja
- Konceptualno je znanje složeni oblik znanja, a odnosi se na sposobnost uspostavljanja relacija između osnovnih elemenata unutar određene veće strukture, što im omogućuje zajedničko funkcioniranje. (Rittle – Johnson i Schneider, 2013.)
- kognitivnih procesa na višim razinama znanja: klasifikacija, kategorizacija, specijalizacija, generalizacija, indukcija, dedukcija, analiza, sinteza, apstrakcija i analogija.

VREDNOVANJE KONCEPTUALNOG ZNANJA

Pismeno i usmeno – nije čest oblik na nastavi matematike

PREDNOSTI USMENOG VREDNOVANJA

(Vizek Vidović, Vlahović – Štetić 2003.)

- učenici češće uče s razumijevanjem moguće je bolje provjeriti razumijevanje i uporabu znanja
- voditi se računa o kvalitativnim razlikama u učeničkom znanju
- uočavanje i reagiranje na odgovore koji su približno točni ili na one koji ukazuju na "antiznanje"

NEDOSTACI USMENOG VREDNOVANJA

- onemogućuje ispitivanje sadržaja većeg opsega
- vremenski neekonomično ➡ jedan nastavni sat 7 učenika, prema preporuci Bujas i Grgin (1961.)
- subjektivno ➡ ne odgovaraju svi učenici na ista pitanja moguće pogreške učitelja kao mjernog instrumenta.

PISMENO VREDNOVANJE

- svi učenici odgovaraju na ista pitanja odnosno rješavaju iste zadatke
- moguće je obuhvatiti više nastavnih sadržaja i kreirati objektivnije kriterije
- Bitno je osvijestiti da će pismeni ispit ispitivati konceptualno znanje učenika samo ako su pitanja ili zadatci kreirani tako da ne traže samu reprodukciju činjenica već njihovo razumijevanje i uporabu.
- To je moguće ostvariti zadajući različite tipove i konstrukcije zadataka.

TIPOVI ZADATAKA

- Gronlund (1985.) klasificira zadatke na one objektivnog tipa i višestrukog izbora te na interpretativne i zadatke esejskog tipa.
- Good i Brophy (1995.) razlikuju zadatke esejskog i objektivnog tipa.
- Slavin (1997.) uz zadatke esejskog i objektivnog tipa spominje i problemske zadatke.
- Rittle – Johnson i Schneider (2015.) uvode novu sistematizaciju tipova zadataka, implicitne i eksplicitne zadatke.

IMPLICITNI I EKSPPLICITNI ZADATCI

- Implicitni zadatci zahtijevaju od učenika procjenu valjanosti tvrdnje ili učinkovitost određene procedure, kategorički izbor, mogućnost različitog prikaza podataka te uspoređivanje veličina.
- Eksplicitni zadatci, s druge strane, uvjetuju poznavanje i objašnjenje definicija, obrazlaganje izbora postupaka, formuliranje koncepata te izradu umnih mapa i sl.
- Vrlo je bitna značajka eksplicitnih zadataka da su učenicima relativno nepoznati te se oni oslanjaju na svoje konceptualno znanje (poznavanje definicija i razumijevanje odnosa), a ne na proceduralno (dobro naučeni algoritam) kako bi riješili zadatak.
- Konceptualno znanje u nastavi matematike, kako ga znanstvenici danas razumiju i objašnjavaju, implicira vrednovanje istoga eksplicitnim zadatcima poput onoga esejskog tipa. **STOGA MI ESEJ SMATRAMO EKSPPLICITNIM TIPOM ZADATKA.**

PRIMJERI EKSPLICITNIH ZADATAKA

- Objasni tvrdnju: „Svi kvadrati su pravokutnici, a svi pravokutnici nisu kvadrati.“
- „Definiraj kvadrat pomoću romba.“
- Obrazloži zašto vrijedi jednakost $2^{\log_2 x} = x$.
- Izradi konceptualnu mapu koja prikazuje osnovne koncepte o skupovima brojeve te vezama između njih.

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

ŠKOLSKI ESEJ

- Hrvatska enciklopedija ➡ esej je književno - znanstvena vrsta u kojoj se obrađuje određena tema ili problem te je kao takva pogodna za provjeravanje cjelovitosti poznavanja i shvaćanja teme. (Brozović i Kovačec 1999.)
- interpretativni, usporedno - raščlambeni i raspravljajući (Piskač 2011.)
- sadržava tri koherentna dijela: uvod, razradu i zaključak.
- Uvodni odlomak postavlja temu eseja te daje uvid u kontekst problema.
Razradbeni odlomak glavni je dio eseja u kojemu su istaknuti argumenti te su tim dijelom obuhvaćene sve smjernice zadane esejskim zadatkom.
Ulomak zaključka sažima sve stavove učenika o tome proizašle na temelju predstavljenih argumenata.

PREDNOSTI

- Poticanje učenika na razumijevanje sadržaja i učenje te povezivanje smislenih cjelina.
- omogućuje uvid u učenikove sposobnosti razumijevanja i promišljanja o problemu
- može se procijeniti originalnost načina na koji učenik razmišlja o problemu, njegovu vještinu pisanja i organizaciju ideja.
- izbjegnuto je pogađanje učenika
- ekonomičnost vremena pri pripremi ispita zbog relativno malog broja zadataka, odnosno smjernica.

NEDOSTATCI

- nisu sve nastavne teme jednako pogodne za pisanje eseja
- nije moguće obuhvatiti godišnji ili sav sadržaj jednog predmeta na višoj razini znanja
- ispravljanje je obično dugotrajno i ima loše metrijske karakteristike
- rezultat često može ovisiti o vještini pisanog jezičnog izražavanja i rukopisu učenika
- subjektivna procjeni ocjenjivača
- Naravno postavlja se i pitanje na koji način reagirati na pravopisne i gramatičke pogreške.

VAŽNOST PISANJA ESEJA

- ispituje se poznavanje i razumijevanje definicija te stvaranje relacija među pojmovima i njihova usporedba. (Vizek Vidović, Vlahović – Štetić 2003.)
- do izražaja dolazi učenikova sposobnost analiziranja i sintetiziranja podataka i činjenica, kombiniranje znanja različitih područja te mogućnost ispravnog prosuđivanja postupaka, tvrdnji ili događaja.
- za kvalitetan esej nije dovoljno poznavati sadržaj samo na razini pojmova i definicija već je potrebno i dublje i šire znanje kako bi se samostalno napisalo dulji, smisleni tekst.
- pisanje eseja omogućuje učeniku kreativan način pokazivanja znanja za razliku od ostalih načina i tipova ispitivanja znanja.

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- **Esej iz matematike**
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

ESEJ IZ MATEMATIKE – ZAŠTO?

- Esej kao eksplicitan tip zadatka učenicima je relativno stran te oni nemaju izbora nego pouzdati se u svoje konceptualno znanje.
- Kako bi uspješno riješili takav zadatak učenici moraju povezivati znanje koje posjeduju te ga povezati sa situacijama iz svakodnevnog života (primjerima, elaboriranjem, objašnjavanjem, skiciranjem, matematičkim modeliranjem te prikazivanjem podataka na različite načine), izražavati se o matematičkim temama matematičkim jezikom i pojmovima te formirati dulji tekst.

INTERPRETATIVNI MATEMATIČKI ESEJ

- smatra se najjednostavnijom vrstom eseja (Pucar 2017.)
- Donosi pregled koncepata, pojma ili problema zadanog smjernicama i uputama zadatka. Zadani objekt raščlanjuje se na sastavnice kritički analizira, ali i smješta u kontekst područja te mora ponuditi određene generalizacije.
- Interpretativni esej također možemo naći u nastavi jezika, umjetnosti te društvenih i humanističkih znanosti, no interpretativni esej iz matematike razlikovat će se od ostalih po svojoj formi.
- Za razliku od ostalih eseja u eseju iz matematike učenicima je dozvoljeno skicirati, crtati, računati, konstruirati, dokazivati i sl., štoviše učenike se na to potiče.

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

PRIPREMA UČENIKA ZA PISANJE ESEJA

- potpuno novo i nepoznato te niti na intuitivnoj razini nisu sigurni kako formirati dulji matematički tekst.
- vrlo bitna pretpostavka za kvalitetno napisan matematički esej je priprema učenika.
- priprema učenika za pisanje eseja iz određenog gradiva počinje već pri poučavanju istog
- bitna je najava da će se određeno gradivo ispitivati pisanjem eseja, objasniti kako izgleda matematički esej, dati upute za pisanje, ali i kriterije vrednovanja kako bi se i sami pripremili.
- Preporuča se učenicima za prvi put dati primjer kvalitetno napisanog eseja, no iz nekog drugog, ranije obrađenog matematičkog gradiva.

- Ukoliko nastavnik pri obradi gradiva učenicima zadaje samo zadatke zatvorenog tipa (proceduralne), izostavlja definiranje koncepata, svojstava i odnosa među njima nerealno je očekivati da će takvi učenici moći napisati matematički esej.
- Stoga, nastavnik na umu treba imati potencijalne smjernice (ishode koje želi postići) i ono što od učenika očekuje da napišu u eseju.
- neposredno prije pisanja eseja potrebno je naglasiti detaljne formalne (strukturalne) i sadržajne upute.
- Strukturalne su upute za matematički esej jednake kao i za svaku drugu vrstu eseja.
- Sadržajne upute govore što koji strukturalni dio treba sadržavati, odnosno što se u kojem ulomku od učenika traži.

ULOMAK	SADRŽAJ
UVOD	predstavljanje teme
	iskazati definicije osnovnih i ključnih pojmova
	navesti matematičko područje
	prethodno usvojena znanja o danoj temi
RAZRADA	navođenje svojstava
	objašnjavanje i opisivanje
	kategoriziranje i klasificiranje
	primjeri i primjena
	diskutiranje i dokazivanje
	analiza i sinteza
	iznošenje teorija, modela i struktura
	korelacije s drugim predmetima
	demonstracija zadataka
usporedba i povezivanje	
ZAKLJUČAK	iznošenje stava o korisnosti
	iznošenje stava o važnosti

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

VREDNOVANJE ESEJA IZ MATEMATIKE

- sadržajno oblikovanje, povezanost teksta i kognitivne razine znanja.
- ovisi o uključenosti zadanih smjernica, tj. ukoliko učenik u esej uvrsti 3 od 5 zadanih smjernica, bez obzira na razinu znanja na kojoj je o njima pisao, ne može dobiti ocjenu odličan ili vrlo dobar. Isto tako, ukoliko učenik u svome eseju obuhvati sve smjernice to nije garancija da će zavrijediti ocjenu odličan, u slučaju da se u eseju nalazi nekoliko materijalnih pogrešaka ili su smjernice opisane na vrlo niskim razinama znanja.
- U tablici je prikazano što svaka od navedenih sastavnica podrazumijeva te njihov postotni udio. Tablica podrazumijeva vrednovanje kada su sve smjernice u eseju obuhvaćene.

SASTAVNICE VREDNOVANJA		KRITERIJI	POSTOTNI UDIO OCJENE	
SADRŽAJNO OBLIKOVANJE	Obuhvaćenost sadržaja		20%	
	Uporaba matematičkog jezika i prikladan stil			
POVEZANOST TEKSTA	Vizualno oblikovanje		10%	
	Smislenost			
	Logički slijed			
RAZINA ZNANJA	Činjenično	<ul style="list-style-type: none"> • Pravilna uporaba terminologije • Pravilno definiranje ključnih pojmova i definicija 	20%	70%
	Razumijevanje	<ul style="list-style-type: none"> • Objašnjavanje i opisivanje odnosa • Navođenje primjera • Procijeniti • Odabir određene tehnike rješavanja 	20%	
	Primjena	<ul style="list-style-type: none"> • Iznose teorije, modele i strukture • Demonstracije zadataka • Navođenje primjera u novim situacijama • Dokazivanje • Uspostava korelacija s drugim predmetima 	20%	
	Analiza	<ul style="list-style-type: none"> • Uspoređivanje • Analiza • Klasifikacija i kategorizacija • Uspostavljanje uzročno – posljedičnih veza 	15%	
	Sinteza	<ul style="list-style-type: none"> • Povezivanje • Sistematizacija • Organizacija znanja 	15%	
	Evaluacija	<ul style="list-style-type: none"> • Diskutirati o odabiru određene tehnike • Iznošenje zaključaka o važnosti i korisnosti 	10%	
UPORABA HRVATSKOG STANDARDNOG JEZIKA*		Pravopisna točnost	100%	
		Gramatička točnost		

Tablica 2. Predložak kriterija vrednovanja školskog interpretativnog eseja iz matematike.

TEME I SMJERNICE ZA PISANJE ESEJA

- Nisu sve teme odnosno nastavne jedinice ili cjeline pogodne za vrednovanje znanja esejom
- Dobro razrađene smjernice učenike će jasno voditi kroz oblikovanje teksta
- Pri zadavanju smjernica, nastavnik mora imati na umu ishode koje učenici trebaju ostvariti te jasnu percepciju o tome kako zadani esej treba izgledati i što treba sadržavati
- nastavnik mora biti siguran kako njegovi učenici imaju dovoljno znanja o pojedinim smjernicama kako bi tekst mogli sastaviti u zadanim okvirima
- moguće je esej pisati o jednoj nastavnoj jedinici, više njih ili o jednoj cjelini

Primjer 1. Smjernice za pisanje eseja na temu vektori u 1. razredu srednje škole.

- Definicija i osnovna svojstva
- Zbrajanje i oduzimanje vektora
- Množenje vektora realnim brojem
- Linearna zavisnost
- Prikaz vektora u koordinatnom sustavu

Primjer 2. Smjernice za pisanje eseja na temu Elipsa za treći razred srednje škole, matematičke gimnazije.

- Definicija elipse
- Konstrukcija elipse
- Jednadžba elipse
- Jednadžba translirane elipse
- Presjek pravca i elipse
- Tangenta na elipsu
- Polarna jednadžba elipse

Primjer 3. Smjernice za pisanje eseja na temu Četverokuti brojevi u 6. razredu osnovne škole.

- Pojam četverokuta
- Kutovi četverokuta
- Paralelogram. Svojstva i konstrukcije.
- Vrste paralelograma
- Trapez
- Površina četverokuta

Primjer 4. Smjernice za pisanje eseja na temu Kompleksni brojevi u 2. razredu srednje škole.

- Kompleksni broj
- Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva
- Dijeljenje kompleksnih brojeva
- Modul kompleksnog broja
- Kompleksna ravnina

SMJERNICE	OČEKIVANI SADRŽAJ	OČEKIVANI ISHODI
Kompleksni broj	Proširenje skupa realnih brojeva. Imaginarna jedinica. Imaginarni brojevi. Skup kompleksnih brojeva. Jednakost kompleksnih brojeva.	Objasniti zašto se uvode kompleksni brojevi. Navesti svojstva imaginarne jedinice. Iskazati definiciju za imaginarne brojeve. Iskazati definiciju skupa kompleksnih brojeva. Uspostaviti relaciju skupa realnih i kompleksnih brojeva. Uspoređivanje kompleksnih brojeva. Opisati jednakost kompleksnih brojeva. Razlikovati posebne oblike kompleksnih brojeva.
Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva	Zbrajanje i množenje u skupu kompleksnih brojeva i njihova svojstva. Potenciranje imaginarne jedinice.	Opisati postupak zbrajanja i oduzimanja kompleksnih brojeva. Navesti i izvesti formule za zbrajanje ili množenje kompleksnih brojeva. Navesti i dokazati svojstva kompleksnih brojeva. Računati vrijednosti prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice te generalizirati. Diskutirati što je umnožak, a što zbroj dva kompleksna broja. Primijeniti potencije imaginarne jedinice na rješavanje jednačbi u skupu kompleksnih brojeva.
Dijeljenje kompleksnih brojeva	Konjugirano kompleksni brojevi i njihova svojstva. Dijeljenje kompleksnih brojeva.	Iskazati definiciju kompleksno konjugiranih brojeva. Zaključiti što je umnožak dva kompleksno konjugirana broja. Navesti i dokazati svojstva kompleksno konjugiranih brojeva. Opisati postupak dijeljenja kompleksnih brojeva. Demonstrirati primjer zadatka dijeljenja kompleksnih brojeva.
Modul kompleksnog broja	Modul i svojstva kompleksnog broja.	Iskazati definiciju modula kompleksnog broja. Povezati posebne oblike kompleksnih brojeva s njihovim modulima. Nabrojati svojstva modula. Dokazati svojstva modula. Analogijom povezati modul s apsolutnom vrijednosti broja.
Kompleksna ravnina	Gaussova kompleksna ravnina. Udaljenost točaka u ravnini.	Opisati kompleksnu ravninu, skicirati i imenovati njezine dijelove. Grafički interpretirati kompleksni broj. Grafički interpretirati modul kompleksnog broja. Primijeniti modul kompleksnog broja za rješavanje jednačbi i <u>nejednačbi</u> u skupu kompleksnih brojeva. Objasniti primjenu kompleksnih brojeva na <u>fraktale</u> ili navesti nove primjere primjene. Uspostaviti korelaciju s povijesti matematike i navesti značaj Gausa za kompleksnu ravninu.

Tablica 3. Prijedlog smjernica, očekivanih sadržaja i ishoda obuhvaćenih esejom na temu kompleksni brojevi za drugi razred srednje škole.

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

ANALIZA UČENIČKIH RADOVA

- učenici, koji su inače odlični i vrlo dobri u ostvarenju, bili uspješniji u organiziranju i povezivanju smjernica.
- učenik (B.Š.) nakon što je u svom eseju obradio temu, se na ortogonalnu projekciju na sljedeći način:
 - učenici manje uspješni u matematici pokazali su svoje znanje o svim navedenim smjernicama na njima dostižnim razinama bez postizanja logičkog slijeda i povezivanja smjernica.
 - Ulomak razrade sadržajno je podijeljen u nekoliko manjih cjelina u kojima su učenici iznosili svoja znanja o temi, ali zajedno ne predstavljaju koherentnu cjelinu, odnosno tvrdnje ne proizlaze jedne iz drugih već se čini da su nasumično poredane.

Pojam okomitosti omogućuje nam da definiramo jedno važno preslikavanje točaka u prostoru zvano ortogonalna projekcija.“

- učenici (npr. M.P.) koji su uspješniji u matematici nisu imali problema s terminologijom te uporabom matematičkog jezika i simbola:

„Ako je pravac a paralelan s pravcem b ($a // b$), a pravac b paralelan s pravcem c ($b // c$), tada je i pravac a paralelan s pravcem c ($a // c$). To znači da je paralelnost tranzitivna relacija. ($a // b$) \wedge ($b // c$) \Rightarrow ($a // c$).“

„Za dva pravca koji imaju samo jednu zajedničku točku kažemo da se sijeku, a ta zajednička točka naziva se presječna točka S .“

- dok inače slabiji učenici iz matematike nisu koristili matematičke simbole i jezik nego su se koristili opisivanjem. Primjer (K.Š.):

Učenici koji su i inače uspješniji u matematičkom znanju izvodeći i navodeći dokaze:

„Ravnina može biti zadana dvama paralelnim pravcima koji se ne podudaraju, a dokaz slijedi iz definicije paralelnosti dva pravca.“

te diskutirajući i analizirajući dovoljne i nužne uvjete teorema kao i navodeći postulate:

„Pravac (p) je okomit na ravninu π ako je okomit na svaki od pravaca koji leže u toj ravnini

i prolaze točkom probodišta.

Postavlja se pitanje: „Zašto nije dovoljno da bude okomit samo na jedan pravac?“

Odgovor je jer je svaki pravac koji probada ravninu okomit na neki pravac iz te ravnine

koji prolazi probodištem.

Da bi pravac bio okomit na ravninu, dovoljno je pokazati da je okomit na dva pravca te ravnine koji prolaze probodištem.“

- Učenici koji su naklonjeniji matematici u svojim esejima više su stavljali na matematičke pojmove i primjene, a oni koji su više naklonjeni književnosti pisali su eseje u književni stil pisanja.

„Lakše je naučiti matematiku nego raditi je. H. Bouasse“ (F.)

„U sklopu nastave imali smo zadatak za domaću zadaću napraviti 3D prikaz jednog od pet poliedara. Odabrao sam dodekaedar i pri tome se upoznao s njegovim sastavnicama. Shvatio sam da se svaki dan susrećemo s takvim tijelima u stvarnim problemima, od najjednostavnijih do najkompleksnijih.“ (A.B.)

- Učenici koji su više zainteresirani za književnost pisali su eseje u književni stil pisanja.

„Najduži pravac u avionskom prometu ima aviolinija New Delhi – San Francisco, koja ima pravac kretanja od Atlantika preko Pacifika i iznosi 15 300 kilometara.“ (M.K.)

- Učenici koji su više zainteresirani za matematiku pisali su eseje u matematički stil pisanja, uključujući i primjere iz stvarnoga života, koristeći različite izvore.

„Jedan od poliedara je dijamant Graff Pink vrijednosti 45,75 milijuna dolara te pod nazivom kralj dijamanta.“ (M.K.)

- Učenici koji su više naklonjeniji matematici za eseje su se potrudili pronaći mnogobrojne primjere primjene i primjere iz stvarnoga života, koristeći različite izvore. Na primjer (A.B.):

- ono što je izostalo u svim esejima su skice i konstrukcije
- učenici kojima slabije ide jezično i pisano izražavanje bili manje uspješni u preciznosti iskazivanja definicija ili tvrdnji
- ne mora nužno biti uzročno – posljedična veza jer postoji mogućnost da oni te koncepte, definicije i ostalo nisu u potpunosti usvojili

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

UMJESTO ZAKLJUČKA ...

- S obzirom na manjak podataka i relevantne literature umjesto zaključka donosimo prijedloge za daljnje istraživanje ovoga načina vrednovanja konceptualnoga znanja. Ono što bismo htjeli istražiti je:
- ima li razlike u stavovima učenika koji pokazuju zainteresiranost ili naklonjenost prema matematici u odnosu na one koji tu razinu naklonjenosti ne pokazuju
- utječe li pisanje eseja na motiviranost učenika za nastavno područje ili predmet
- koje su ili kakve, metode i tehnike poučavanja najučinkovitije i primjerene pri pripremi učenika za pisanje eseja
- koje su vrste uputa i smjernica optimalne za stvaranje kvalitetnog školskog eseja
- utvrditi metrijske karakteristike kvalitetnog školskog eseja kako bi se izbjegla subjektivnost pri vrednovanju eseja
- kako premostiti poteškoće koje pojedini učenici imaju pri jezičnom izražavanju kako to ne bi onemogućilo da oni pokažu svoje znanje iz zadanog područja
- analizirati utječe li ova vrsta vrednovanja znanja pozitivno na konceptualno znanje učenika
- utvrditi faktore koji utječu na stvaranje kvalitetnog eseja iz matematike
- istražiti koje dobne skupine učenika posjeduju znanja, vještine i sposobnosti za izvršenje zadatka poput pisanja eseja iz matematike i na kojoj razini itd.

SADRŽAJ

- Zašto promjene?
- Konceptualno znanje
- Školski esej
- Esej iz matematike
- Priprema učenika za pisanje eseja
- Vrednovanje eseja iz matematike
- Analiza učeničkih radova
- Umjesto zaključka
- Literatura

LITERATURA

- Anderson Lorin, W. & Krathwohl, D. (2001). A Taxonomy for Learning Teaching and Assessing; A revision of Bloom"s Taxonomy of Educational Objec.
- Borić, E., Škugor, A. i Borić, I. (2015). Analiza dimenzija kognitivnih procesa i dimenzija znanja u udžbenicima i radnim bilježnicama Prirode i društva. *Napredak*, 156 (3), 283 – 296. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/166184>
- Brozović, D. i Kovačec, A., gl. ur. (1999). *Hrvatska enciklopedija*, 1. sv. : A – Bd, Leksikografski zavod »Miroslav Krleža«, Zagreb.
- Dijanić, Ž. i Debelec, T. (2017). Proceduralno i konceptualno znanje. *Matematika i škola*, 82 (2), 51 – 60. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/23/broj/82/clanak/1141/proceduralno-i-konceptualno-znanie>
- Good, Thomas L & Brophy, Jere E & Good, Thomas L., 1943-. Educational psychology. 4th ed (1995). *Contemporary educational psychology* (5th ed). Longman, White Plains, N.Y
- Gronlund, N. (1985). *Measurement and Evaluation in Teaching*. MacMillan, New York.

- Hiebert, J. & Carpenter, T. 1992. Learning and Teaching with Understanding. In D. Grouws (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NY: Macmillan.
- Matešić, I. (2012). Esej iz matematike. *Matematika i škola*, 56 (6), 18 – 21. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/17/broj/56/clanak/792/esej-iz-matematike>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: NCTM.
- Piskač, D. (2011). Kako napisati esej na državnoj maturi. Zagreb: Alfa.
- Pucar, M. (2017.) Esej u nastavi jezičnog izražavanja. Preuzeto s <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:142:563183>
- Rittle-Johnson, B. & Schneider M. (2013). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. U: R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.) *The oxford handbook of numerical cognition*. Oxford University Press.

- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362. <http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
- Schoenfeld, A. 1986. On Having and Using Geometric Knowledge. In J. Hiebert (ed.) *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Erlbaum.
- Shimizu, Y . 1996. “High Achievement” versus Rigidity: Japanese Students’ Thinking on Division of Fractions. In D. Zhang, T. Sawada & J. Becker (eds.) *Proceedings of the China-Japan-U. S. Seminar on Mathematical Education*. Southern Illinois University.
- Slavin, R. E. (1997). *Educational psychology: Theory and practice*. Boston: Allyn and Bacon.
- Star, J.R. (2000). On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. U: B. Fishman, S. O' Conner – Divilbiss (eds.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences* (80 – 86), Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Trupčević, G. i Glasnović Gracin D. (2014). Što bi bilo kad bi...? *Matematika i miš* 74 (2), 147 – 154. Preuzeto s <https://mis.element.hr/list/21/broi/74/clanak/1031/sto-bi-bilo-kad-bi...>
- Vizek-Vidović, V., Rijavec, M., Vlahović-Štetić, V., Miljković, D. (2003). *Psihologija obrazovanja*, Zagreb, IEP, d.o.o. i VERN, d.o.o.

HVALA NA PAŽNJI 😊