

# Dvomotorne ravninske krivulje

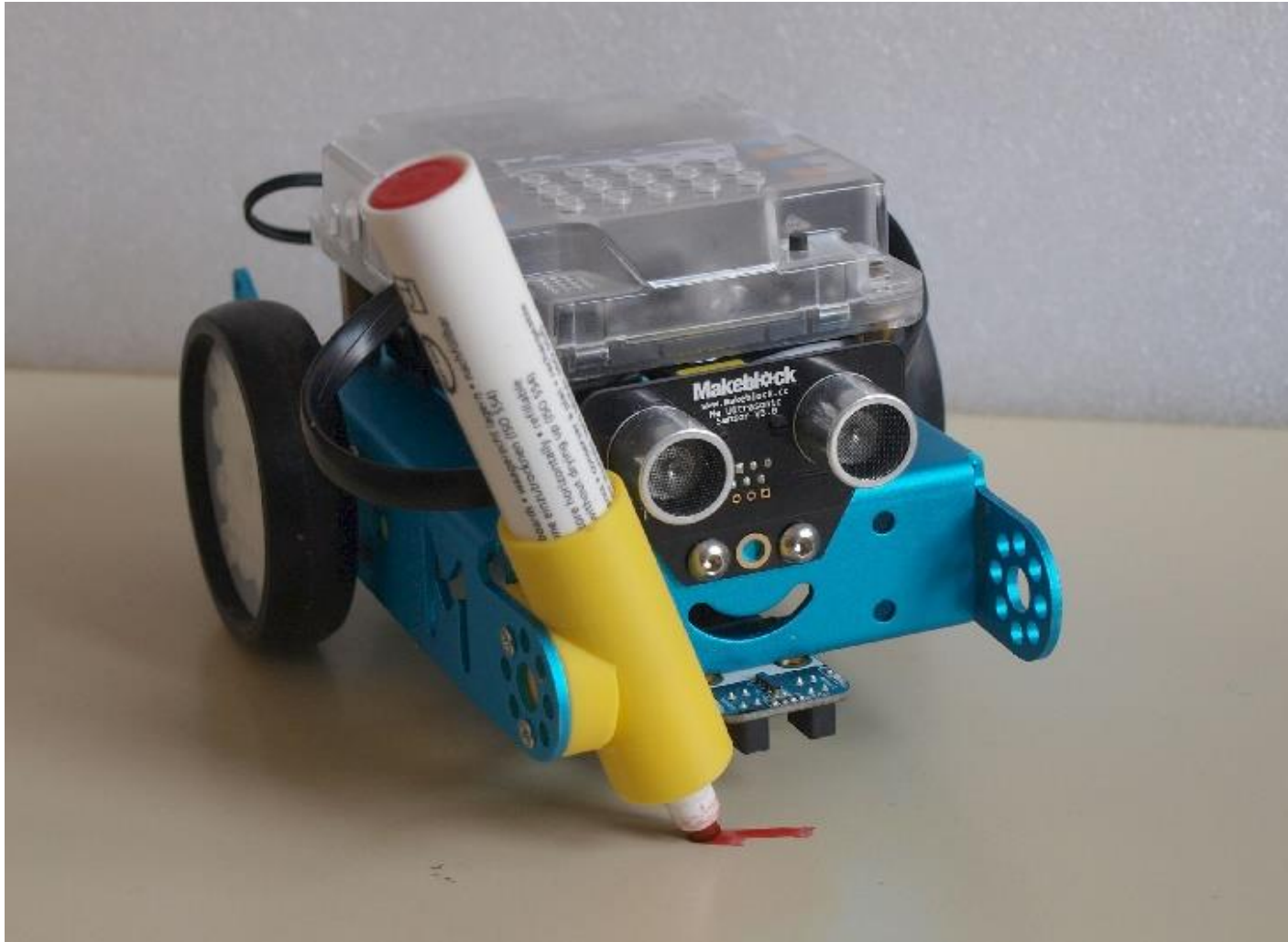
## Matko želi biti slikar

8. kongres nastavnika matematike  
Goran Igaly, Goranka Nogo  
PMF, Matematički odsjek, Zagreb

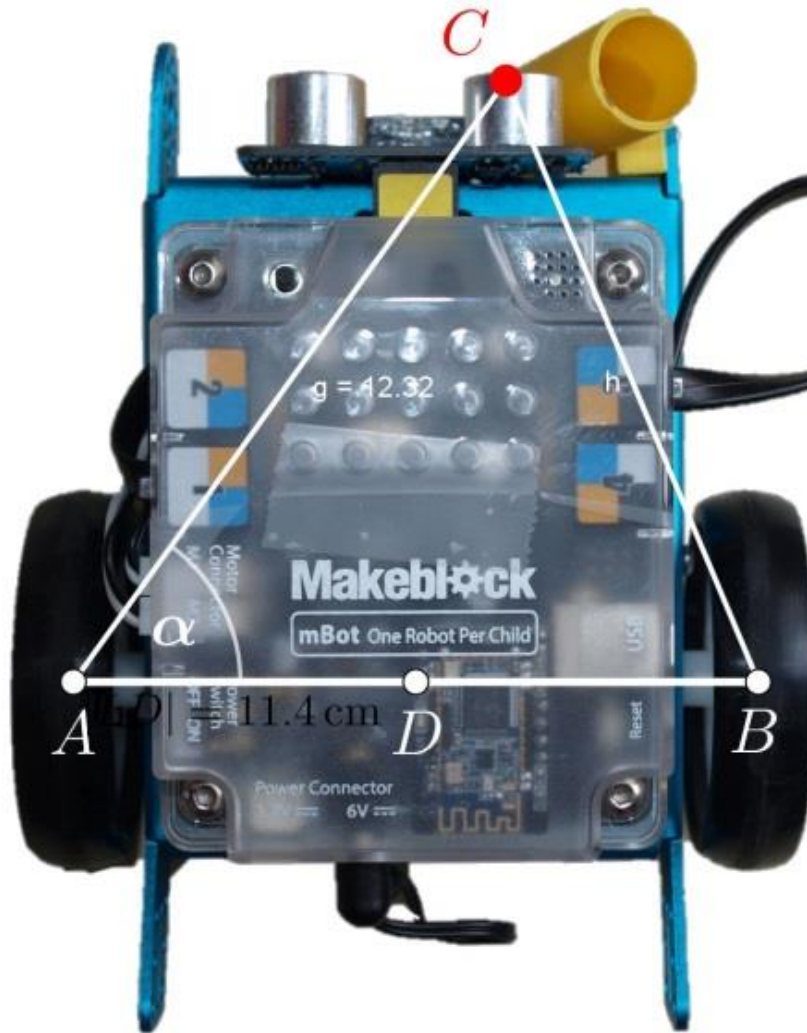
4.7.2018.

# ro(M)bot Matko

---



# Tri točke dodira robota s podlogom



*Jesu li jedine!?*

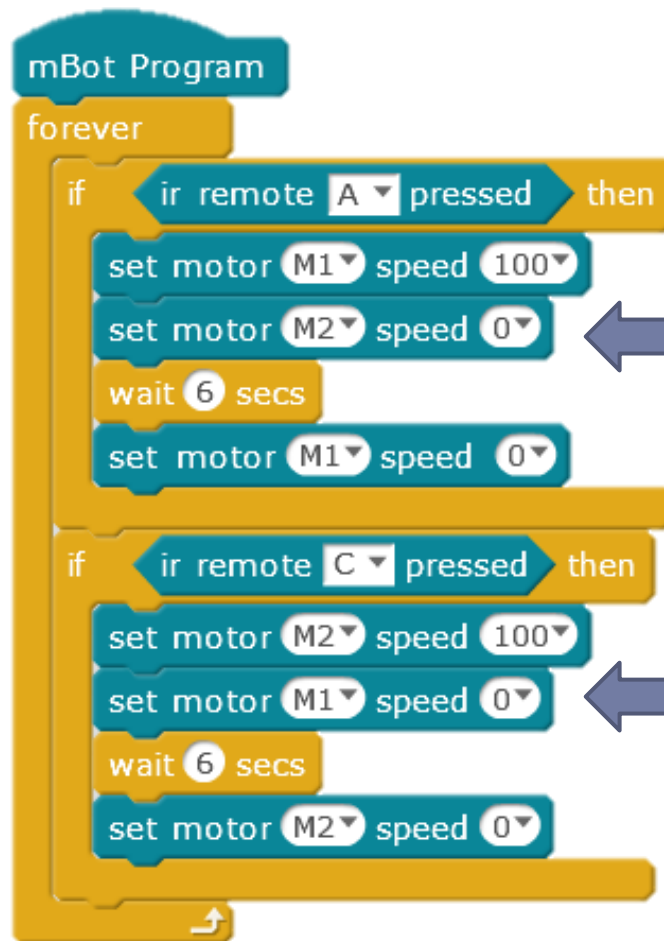
$$a = |BC|$$

$$b = |AC|$$

$$c = |AB|$$

$$|AD| = |DB| = \frac{c}{2}$$

# Okretanje robota oko jednog kotača

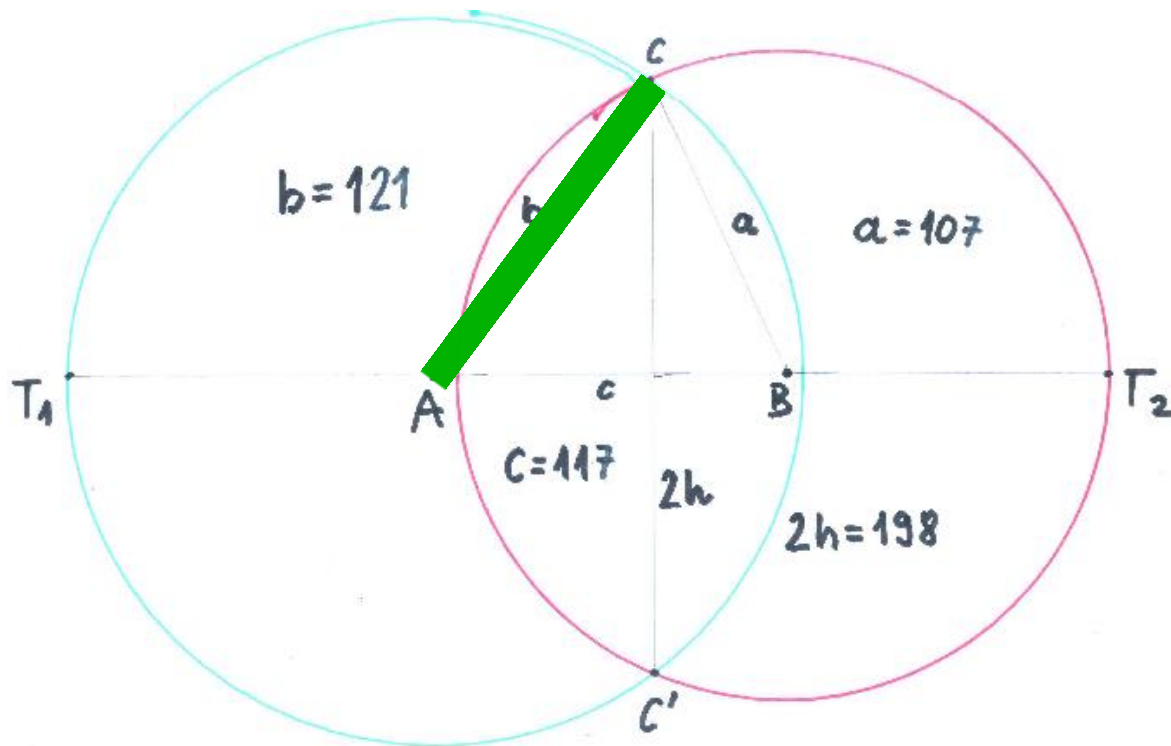


DESNI kotač miruje i robot se okreće DESNOG kotača

LIJEVI kotač miruje i robot se okreće LIJEVOG kotača

<https://www.youtube.com/watch?v=OPD7yA2v9xY>

# Okretanje oko lijevog i desnog kotača



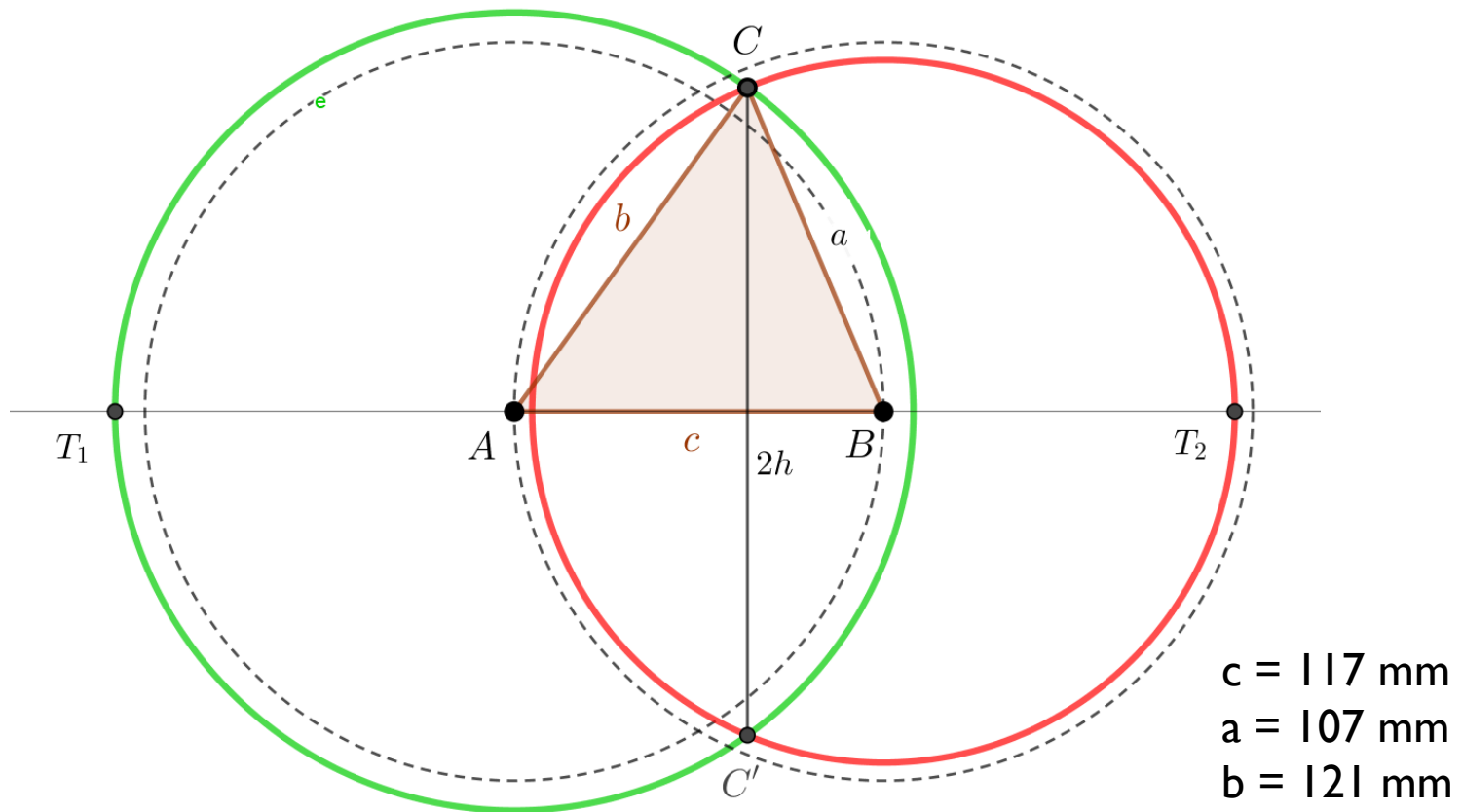
$$|T_1T_2| = 345$$

$$c = |T_1T_2| - a - b$$

$$c = 345 - 107 - 121$$

$$c = 117$$

# Određivanje parametara na temelju crteža



# Računanje kuta za položaj flomastera

---

```
kill(cosa)$  
a:107$ b:121$ c:117$  
rj:solve (a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cosa, cosa)$  
kosinus_alfa:subst(rj[1], cosa);  
alfa : acos(kosinus_alfa)$  
alfa_u_stupnjevima : float(alfa * 180 / %pi);
```

```
(kosinus_alfa)       $\frac{5627}{9438}$ 
```

```
(alfa_u_stupnjevima)      53.40128829449036
```

# Pravocrtno gibanje roMбота

```
mBot Program
forever
  set u1 to 0
  if ir remote R1 pressed then
    set u1 to 100
  if ir remote R2 pressed then
    set u1 to 60
```

```
if ir remote R8 pressed then
  set u1 to 240
  if u1 > 0 then
    set t to 500 / u1
    set motor M1 speed u1
    set motor M2 speed u1
    wait t secs
    set motor M1 speed 0
    set motor M2 speed 0
    wait 1 secs
    set motor M1 speed 0 - u1
    set motor M2 speed 0 - u1
    wait t secs
    set motor M1 speed 0
    set motor M2 speed 0
```

vrijeme obrnuto  
proporcionalno  
brzini motora

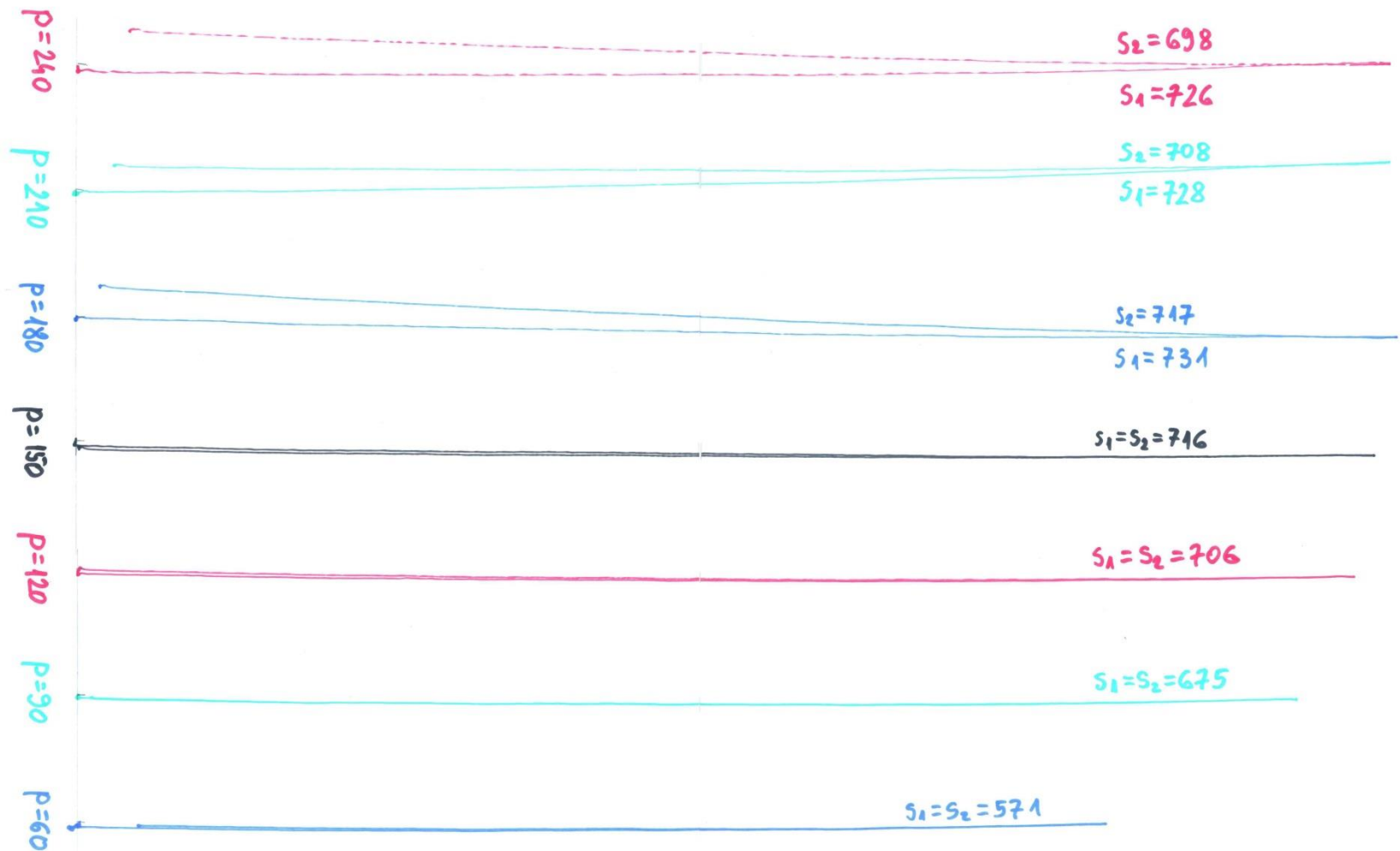
jednake brzine oba  
motora  
(gibanje po pravcu)

kretanje  
prema natrag

<https://youtu.be/G7xRzSRxV18>



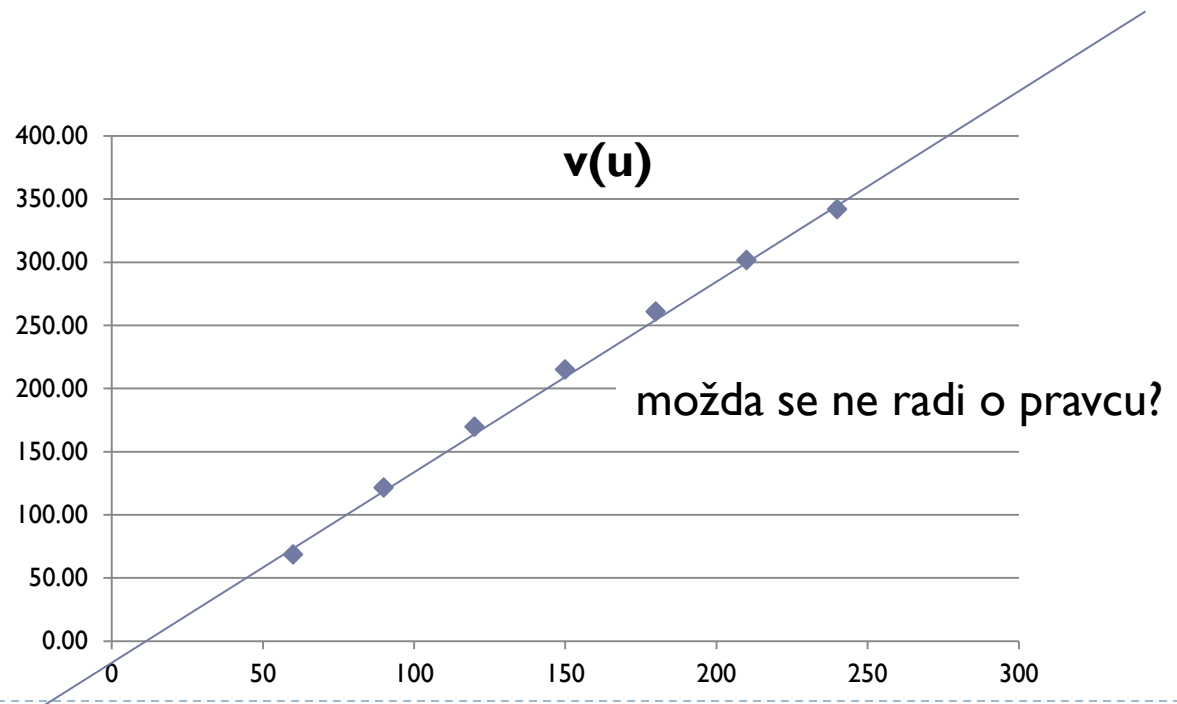
# „Pravocrtno” gibanje raznim brzinama



# Brzina kotača u ovisnosti od brzine motora

u	t=500/p	s1	v1=s1/t	s2	v2=s2/t	s1+s2	v=(s1+s2)/(2t)	u	v(u)
240	2.08	726	348.48	698	335.04	1424	341.76	240	341.76
210	2.38	728	305.76	708	297.36	1436	301.56	210	301.56
180	2.78	731	263.16	717	258.12	1448	260.64	180	260.64
150	3.33	716	214.80	716	214.80	1432	214.80	150	214.80
120	4.17	706	169.44	706	169.44	1412	169.44	120	169.44
90	5.56	675	121.50	675	121.50	1350	121.50	90	121.50
60	8.33	571	68.52	571	68.52	1142	68.52	60	68.52

kako odrediti  
pravac koji na neki  
način najbolje  
odgovara ovom  
skupu točaka u  
ravnini?





# Mjerenje brzine gibanja kotača po kružnici

```
mBot Program
forever
  set u2 to 0
  if ir remote R1 pressed then
    set u2 to 60
  if ir remote R2 pressed then
    set u2 to 65
```

```
if ir remote R9 pressed then
  set u2 to 100
  if u2 > 0 then
    set u1 to 2.5 * u2
    set t to 500 / u2
    set motor M1 speed u1
    set motor M2 speed u2
    wait t secs
    set motor M1 speed 0
    set motor M2 speed 0
    wait 1 secs
    set motor M1 speed 0 - u1
    set motor M2 speed 0 - u2
    wait t secs
    set motor M1 speed 0
    set motor M2 speed 0
```

brzina lijevog motora je dva i pol puta veća od brzine desnog motora

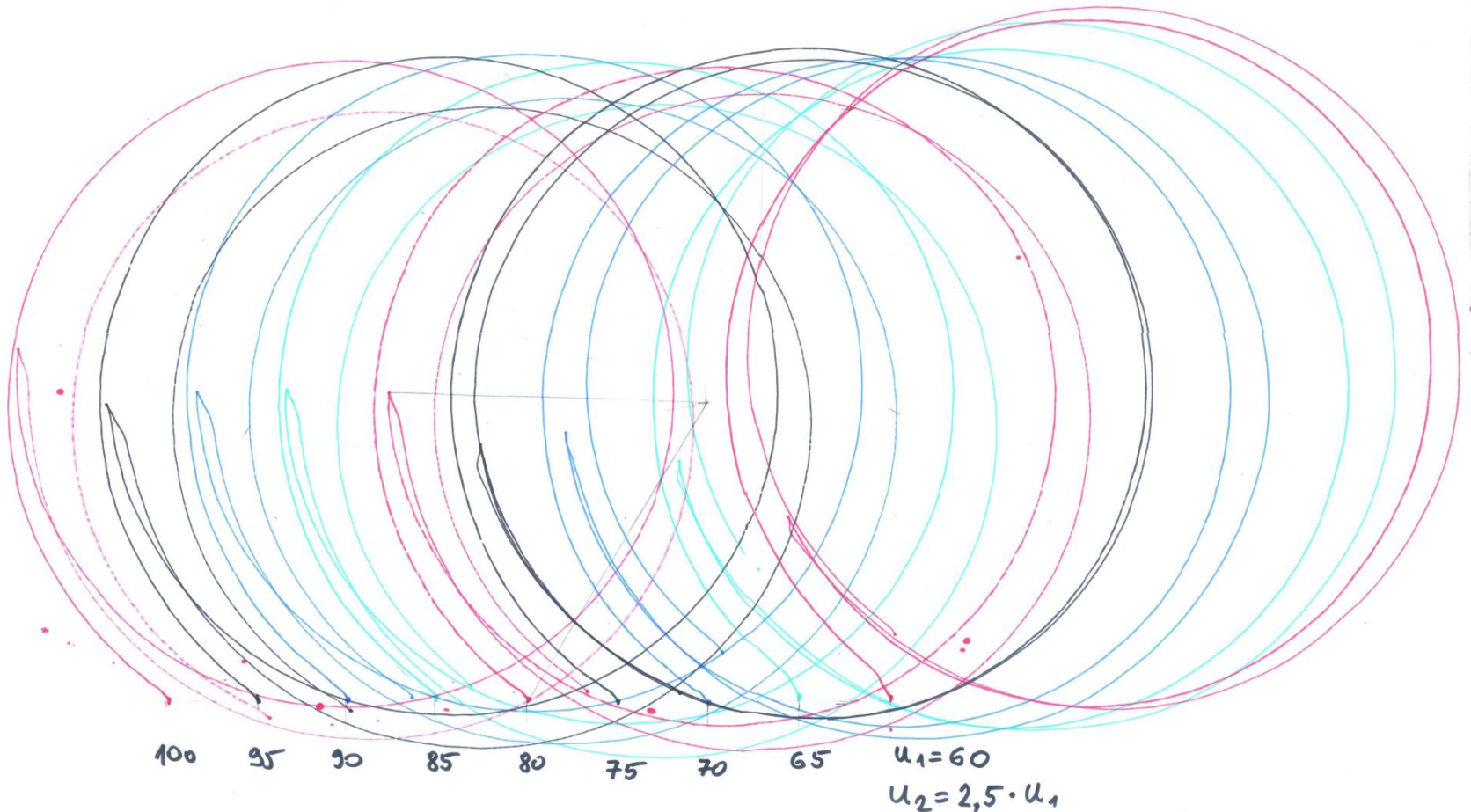
gibanje jednakim brzinama prema natrag

<https://youtu.be/KEYTyGluZgU>

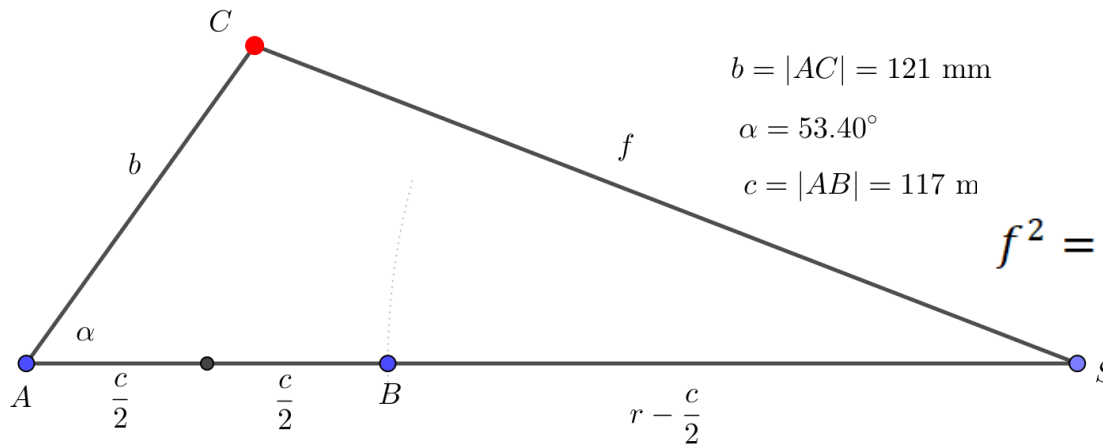
Sve „kružnice” su približno istog polumjera

$$\theta = 360^\circ + 60^\circ = 420^\circ \text{ (približno)}$$

$$2r = 380 \text{ mm}$$



# Računanje polumjera kružnice po kojoj se kreće robot



$$b = |AC| = 121 \text{ mm}$$

$$\alpha = 53.40^\circ$$

$$c = |AB| = 117 \text{ m}$$

$$f^2 = \left(r + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - 2\left(r + \frac{c}{2}\right)b \cdot \cos(\alpha)$$

```
kill(all)$
```

```
a:107$ b:121$ c:117$
```

```
rj:solve (a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cosa, cosa)$
```

```
kosinus_alfa:subst(rj[1], cosa)$
```

```
f:190$
```

```
jed:f^2 = (r+c/2)^2+b^2 - 2*(r+c/2)*b*kosinus_alfa$
```

```
rj:solve(jed, r)$
```

```
float(rj);
```

```
(%o9) [r = -149.6480664029291, r = 176.9301176849804]
```

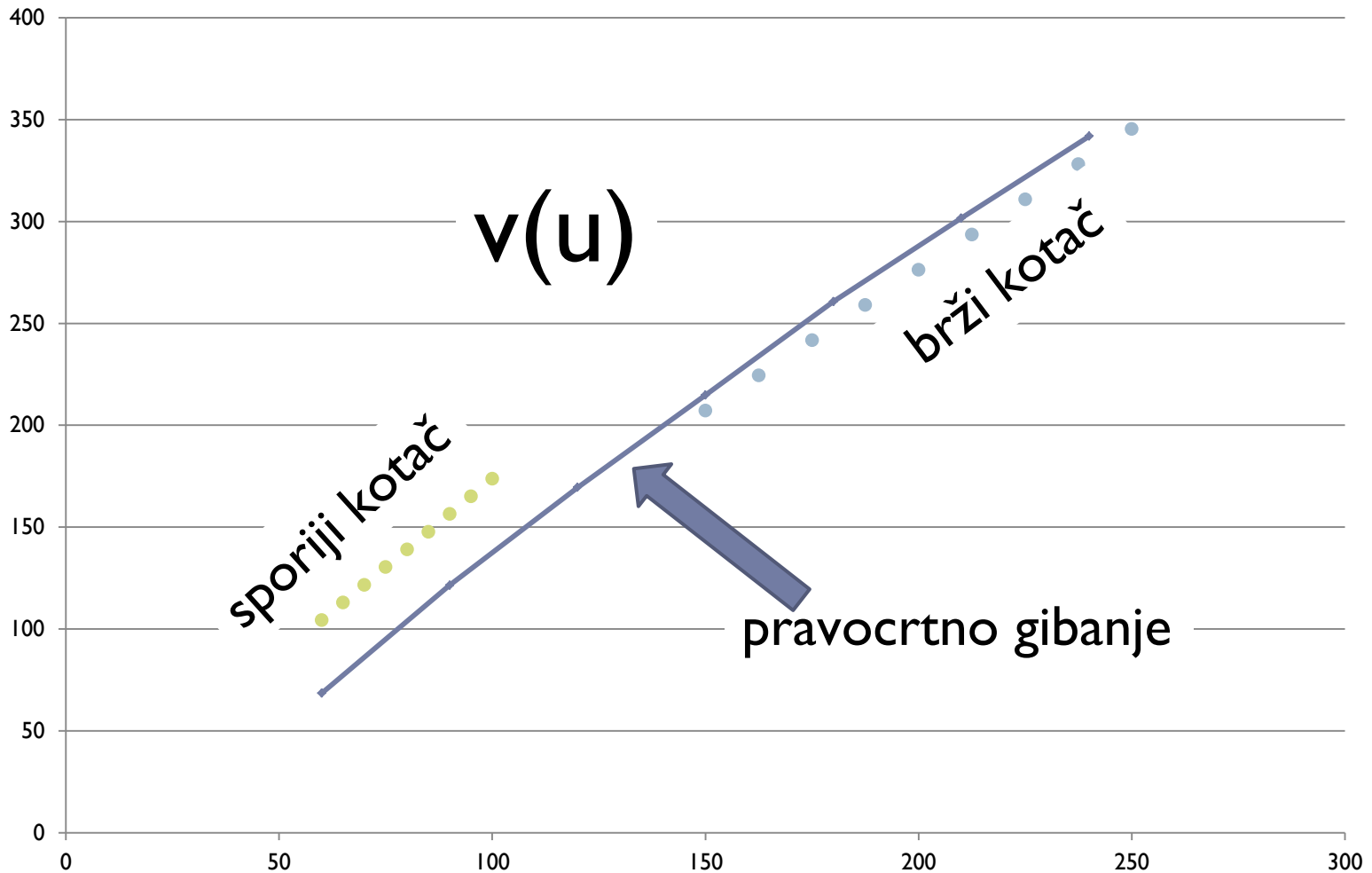


## Brzina kotača u ovisnosti od brzine motora (tablica)

u1	u2	t =500/u1	kut u stupnj evima (cca)	polu mjer (cca)	duljina kružnog luka (cca)	brzina flomastera	r	r-c/2	r+c/2	duljina luka - A	v1	duljina -luka - B	v2
150	60	8,33	420	190	1393	167	177	118,5	235,5	1726	207	869	104
162,5	65	7,69	420	190	1393	181	177	118,5	235,5	1726	224	869	113
175	70	7,14	420	190	1393	195	177	118,5	235,5	1726	242	869	122
187,5	75	6,67	420	190	1393	209	177	118,5	235,5	1726	259	869	130
200	80	6,25	420	190	1393	223	177	118,5	235,5	1726	276	869	139
212,5	85	5,88	420	190	1393	237	177	118,5	235,5	1726	293	869	148
225	90	5,56	420	190	1393	251	177	118,5	235,5	1726	311	869	156
237,5	95	5,26	420	190	1393	265	177	118,5	235,5	1726	328	869	165
250	100	5,00	420	190	1393	279	177	118,5	235,5	1726	345	869	174



# Brzina kotača u ovisnosti od brzine motora (graf)





# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

## ▶ Oznake:

- ▶  $c$  – udaljenost kotača
- ▶  $v_1$  – brzina lijevog kotača
- ▶  $v_2$  – brzina desnog kotača
- ▶  $\alpha$  – kut zakreta
- ▶  $s_1$  – udaljenost koju pređe lijevi kotač
- ▶  $s_2$  – udaljenost koju pređe desni kotač
- ▶  $s_c$  – udaljenost koju prijeđe točka na sredini spojnice.

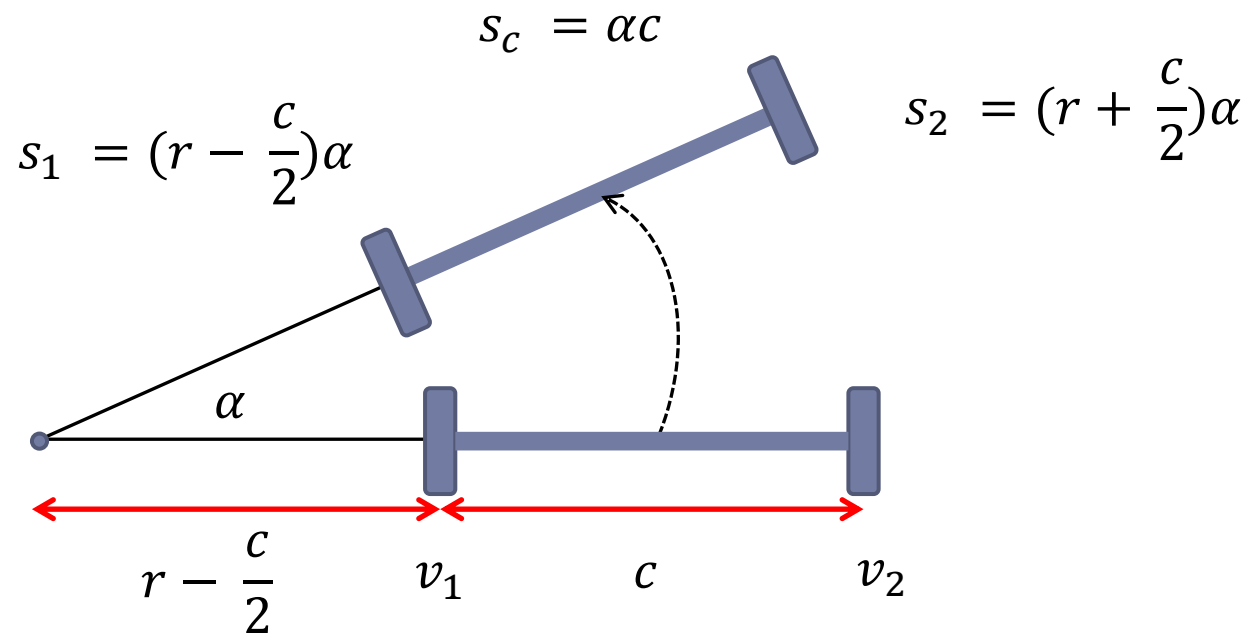
# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

- ▶ **Diskretni slučaj – pretpostavke:**
  - ▶ nejednoliki rad motora
  - ▶ trenutačna promjena brzine oba motora
  - ▶  $\Delta t$  – vremenski interval u kojemu se brzine, nakon promjene barem jedne od njih, ne mijenjaju.
  
- ▶ **Ishodište pravokutnog koordinatnog sustava u ravnini:**
  - ▶ sjecište pravaca na kojima leže spojnice kotača na početku i na kraju vremenskog intervala bit će ishodište pravokutnog koordinatnog sustava.

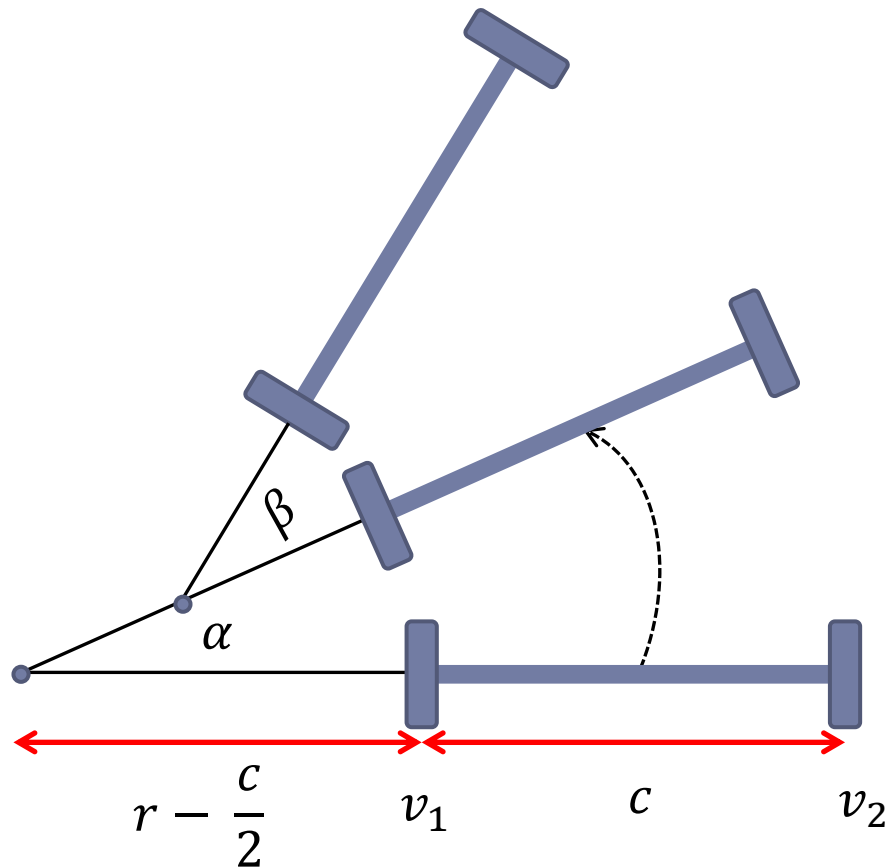
# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---



# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---



# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

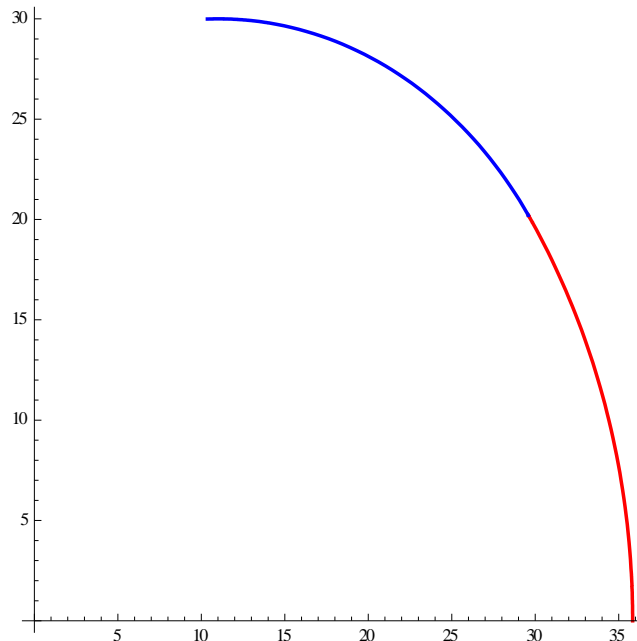
- ▶ Stanje sustava, u zadanom vremenskom intervalu, određeno je
  - ▶ uređenom trojkom  $(v_1, v_2, \Delta t)$ili, općenito, nizom iteracija oblika
  - ▶  $(v_1^{k+1}, v_2^{k+1}, \Delta t_{k+1}) = f(v_1^k, v_2^k, \Delta t_k), k = 0, 1, 2, \dots$
- ▶ Kako izgleda prijeđeni put?

# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

## ► Primjer:

- povećanje brzine desnog kotača s 4.6 na 5,



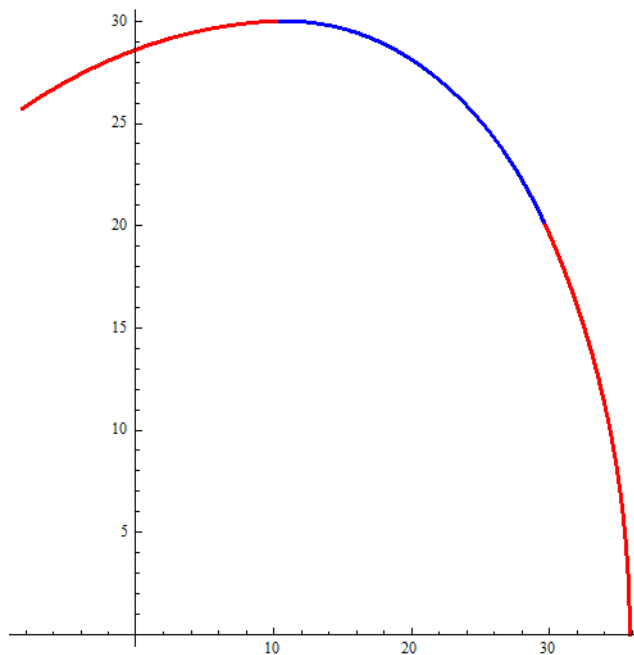
$$(v_1^0, v_2^0, \Delta t_0) = (4, 4.6, 5)$$
$$(v_1^1, v_2^1, \Delta t_1) = (4, 5, 5)$$

# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

## ► Primjer:

- a zatim povećanje brzine lijevog kotača s 4 na 4.5.



$$(v_1^1, v_2^1, \Delta t_1) = (4, 5, 5)$$

$$(v_1^2, v_2^2, \Delta t_2) = (4.5, 5, 4)$$

# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

- ▶ Neprekidna „spirala” sastavljena od:
  - ▶ kružnih lukova
  - ▶ dužina.
- ▶ Neprekidni slučaj – pretpostavke:
  - ▶  $v_1 = v_1(t), v_2 = v_2(t)$  ili
  - ▶  $\Delta t_k \rightarrow 0, k = 0, 1, 2, \dots$

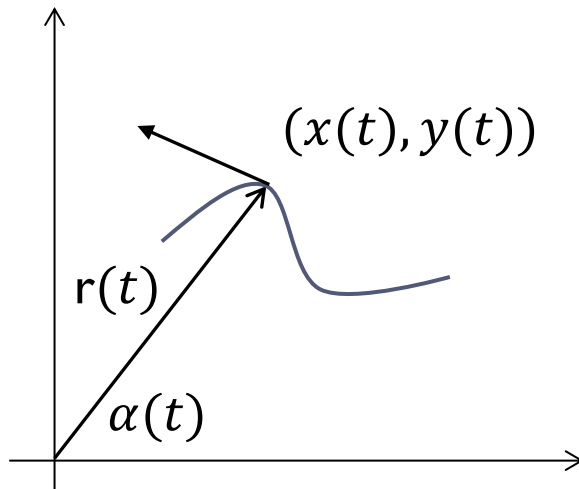


# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

## ► Problem1:

- za zadane brzine odrediti parametarsku jednadžbu ravninske krivulje  $c(t) = (x(t), y(t))$ .



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_1(v_1(t), v_2(t), t) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(v_1(t), v_2(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

- ▶ **Problem2 („Inverzni” problem):**
  - ▶ kako „natjerati” robota da prijeđe zadani put – za zadanu jednadžbu ravninske krivulje odrediti brzine.
- ▶ **Opisani problem:**
  - ▶ realan.
- ▶ **Matematički aparat za rješavanje oba problema:**
  - ▶ diferencijalna geometrija
  - ▶ diferencijalne jednadžbe
  - ▶ ...

# Matematički model kretanja dvomotornog robota

---

## ▶ Zaključak

- ▶ Opisanim geometrijskim modelom temeljenim na šestaru s dvije olovke, uz pretpostavku gibanja kotača po kružnim lukovima brzinom izračunatom iz pravocrtnog gibanja nije moguće točno opisati kretanje robota.

## ▶ Planovi:

- ▶ dodatna mjerenja
- ▶ promjena omjera
- ▶ rješavanje opisanih problema u posebnim slučajevima
- ▶ ...