

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Matematički zadatci i moderna tehnologija

Priručnik za nastavnike u srednjim školama
Verzija 1.0

Zagreb, 2018.

Sadržaj

1 Prvi razred srednje škole	2
1.1 Brojevi	2
1.2 Koordinatni sustav u ravni	3
1.3 Linearna funkcija	4
1.4 Sustavi linearnih jednadžbi	5
1.5 Sukladnost i sličnost	6
1.6 Obodni i središnji kut	7
1.7 Pravilni mnogokuti	7
2 Drugi razred srednje škole	9
2.1 Kvadratne funkcije i jednadžbe	9
3 Četvrti razred srednje škole	13
3.1 Nizovi	13
3.2 Kombinatorika	15

Predgovor

U srpnju 2018. godine održan je 8. kongres nastavnika matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu-Matematičkom odsjeku u Zagrebu. Održana je tada i radionica *Matematika u pametnim telefonima*.

Da bismo pričali o modernoj tehnologiji na nastavi matematike, uopće nam nisu potrebni elektronski uređaji. Nije svima poznato da razvoj softvera ili raznih modernih elektronskih naprava započinje s papirom i olovkom... i s matematikom. Softver za obradu digitalne fotografije, softver za navigaciju... radi se o sofisticiranim razradama, u osnovi, matematičkih ideja. To je shvaćanje poslužilo kao inspiracija za pripremu ove radionice. Nastavnici matematike, u grupnom radu i kroz diskusiju, na temelju pripremljenih materijala o temama iz moderne tehnologije, razvili su problemske matematičke zadatke za srednje škole iz različitih nastavnih cjelina. Ovaj priručnik za nastavnike matematike sadrži osmišljene zadatke i podatke o njihovim autoricama i autorima.

Nastava matematike i zahtijevani ishodi učenja te rad s učenicima u 21. stoljeću izazov je za svakog nastavnika. Smatramo da korištenje ovih zadataka u nastavi matematike može pomoći učenicima da bolje razumiju važost i primjenjivost matematike u suvremenom svijetu te u podizanju motivacije učenika za učenje matematike i odabir zanimanja u područjima prirodoslovlja, tehnologije, inženjerstva, i nama najdraže - matematike (STEM). Prema dogovoru s nastavnicima autorima zadataka, priručnik je javno dostupan i slobodan za nekomercijalno korištenje u nastavi matematike svim nastavnicima u hrvatskim srednjim školama. Zabranjeno je koristiti sadržaje u komercijalne svrhe, neovlašteno kopiranje, umnožavanje, publiciranje, reprodukcija ili distribucija sadržaja.

Svoje prijedloge novih zadataka s temama iz moderne tehnologije, iskustva u korištenju ovog priručnika te druge komentare možete slati voditeljici radionice koja je prikupila i prilagodila zadatke te ih objedinila u ovaj priručnik.

Doc. dr. sc. Anamari Nakić

anamari.nakic@fer.hr

Fakultet elektrotehnike i računarstva

1

Prvi razred srednje škole

1.1 Brojevi

Zadatak 1.1 (Anonimna autorica). Istraživanja su pokazala da u SAD-u društvene mreže uzimaju ukupno 22% vremena provedenog na internetu. Ako je Mary u 5 dana provela ukupno 50 sati surfajući internetom, koliko je sati ukupno provela na društvenim mrežama?



Rješenje.

$$50 \cdot \frac{22}{100} = 11$$

Mary je provela 11 sati na društvenim mrežama.

Zadatak 1.2 (Anonimna autorica). On-line prodavaonica nudi u prodaji igre za igraću konzolu. Dina i Marko raspoložu budžetom od 850kn i žele kupiti barem dvije igre. Ako se igre naruče 10 dana ranije dobiva se 5% popusta, a ako kupe više od 3 igre dobit će 20% popusta na zajedničku cijenu. Koliko najviše igara mogu kupiti za 850kn?

Nascar	149kn
Plants vs Zombies	169kn
Tomb Raider	249kn
Kingdom Come	349kn
World of Warcraft	349kn
PC FIFA	449kn
Call of Duty	449kn

Rješenje. Dina i Marko imaju 850kn, no s popustima imaju priliku naručiti barem tri igre 10 dana ranije uz ukupan popust od 25%. Dakle, mogu naručiti igrica u vrijednosti $850/0.75 = 1133.33kn$. Dina i Marko mogu naručiti najviše 4 igrice.

Zadatak 1.3 (Autorice Ivana Mišak, Anita Bingula, Nikolina Zeman). U bolnici u Clevelandu 3D printer se već godinama koristi na odjelu hepatologije za ispis modela jetara pacijenata koji dolaze na operaciju. Kada su počeli koristiti 3D pisač 2012. godine za tu namjenu, za ispis jednog modela jetre trebalo im je 6 tjedana. Sada im za detaljni i kvalitetniji model jetre sa svim detaljima treba 48 sati.



1. Koliko se modela danas može proizvesti u 6 tjedana, ako znamo da je u funkciji samo jedan 3D printer?
2. Ako danas jedan model košta 10000\$ koliko novca treba izdvojiti za količinu proizvedenih modela u prvom dijelu zadatka?
3. Koliko dana je potrebno za izradu modela jetre s jednim 3D printerom ako bolnica raspolaže s iznosom od 950000\$?

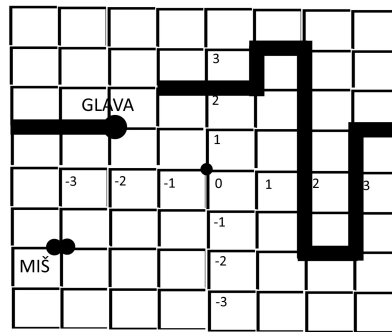
Rješenje.

1. 6 tjedana ima 42 dana, a za izradu jednog modela je potrebno 48h, tj. 2 dana. Dakle, može se proizvesti $42 : 2 = 21$ model.
2. Za 21 model jetre potrebno je $21 \cdot 10000 = 210000$ \$.
3. Za 950000\$ izradi se $950000 : 10000 = 95$ modela. Potrebno je $95 \cdot 2 = 190$ dana.

1.2 Koordinatni sustav u ravnini

Zadatak 1.4 (Autorica Sanja Kopecki). Jedna od zasigurno najpoznatijih igrica legendarnog modela Nokija 3310 je *Zmija*. Ukoliko ekran Nokie 3310 shvatite kao pravokutni koordinatni sustav u ravnini, odgovorite na sljedeća pitanja.





1. U kojem kvadrantu se zmija najviše pojavljuje?
2. Odredite koordinate točaka zmijske koje pripadaju koordinatnim osima.
3. Odredite duljinu zmijske.
4. Odredite točku na zmijskoj koja je najudaljenija od ishodišta i izračunajte tu udaljenost.
5. Kojim koordinatama zmijska treba nastaviti kretanje da bi *pojela* miša?

Rješenje.

1. U prvom kvadrantu.
2. $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$.
3. 16 jediničnih duljina.
4. $(4, 1)$ i $(-4, 1)$. Duljina je $d = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{17}$.
5. $(-2, 0) \rightarrow (-2, -1) \rightarrow (-3, -1) \rightarrow (-3, -2)$.

1.3 Linearna funkcija

Zadatak 1.5 (Autorice Romana Đuka, Vlatka Maršić). Uberboat je najnovija usluga Ubera lansirana u Splitu za ljude koji provode malo vremena na jednom mjestu, a žele vrhunsku uslugu. Najam Uber glisera plaća se 100\$, a minuta vožnje 1.5\$.



1. Koliko košta prijevoz od Splita do Hvara koji traje 1 sat? ($1\$ = 6.34kn$)
2. Koliko se minuta možemo voziti za 1000kn?

Rješenje. Definiramo funkciju cijene $f(x) = 1.5x + 100$.

1. $f(60) = 1.5 \cdot 60 + 100 = 90 + 100 = 190\$ = 190 \cdot 6.34kn = 1204.60kn$
2. Može se napraviti izlet od Splita do Šolte, evo računa:

$$\begin{aligned} 1000 : 6.34 &= 157.73 &\Rightarrow & 1000kn = 157.73\$ \\ 157.73 &= 1.5x + 100 \\ 57.73 &= 1.5x \\ x &= 38.49min \end{aligned}$$

1.4 Sustavi linearnih jednadžbi

Zadatak 1.6 (Autorica Vicka Zečević). Omen, Spectre i Envy tri su HP-ova laptopa koji posjeduju ukupno 32GB radne memorije (RAM). 17-inčni Omen posjeduje 8GB radne memorije više nego 13-inčni Envy. Koliko koji laptop ima RAM-a, ako 15-inčni Spectre prema svojim specifikacijama ima jednaku količinu radne memorije kao i Envy?



Rješenje. Količinu radne memorije tri laptopa označimo s:

- x - Omen
- y - Spectre
- z - Envy

U zadatku su zadani odnosi koje možemo izraziti sljedećim sustavom tri linearne jednačbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 32 \\x &= z + 8 \\y &= z\end{aligned}$$

Uvrstimo treću jednačbu u prvu i dobijemo:

$$\begin{aligned}x + 2z &= 32 \\x - z &= 8\end{aligned}$$

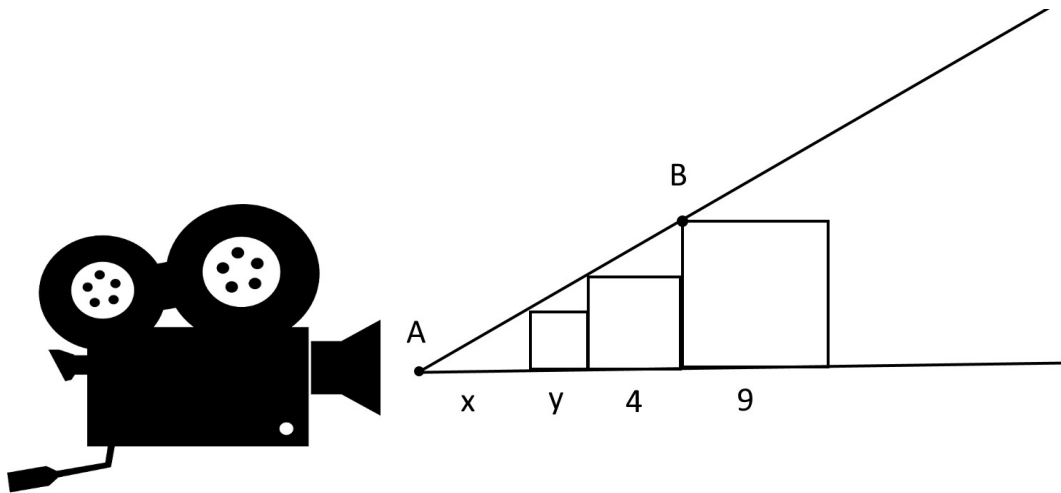
Oduzmemo li sada drugu jednačbu od prve dobijemo konačno

$$3z = 24 \quad \Rightarrow \quad z = 8$$

Dakle, Omen ima $x = 16$ GB, a Spectre i Envy $y = z = 8$ GB radne memorije.

1.5 Sukladnost i sličnost

Zadatak 1.7 (Autorica Marta Perak). Projektor projicira na platno veći ili manji kvadrat. Ovi kvadrati se povećavaju ili smanjuju proporcionalno pa kažemo da su slični. Na slici su tri kvadrata upisana u kut dobivena projekcijom. Izračunajte duljine dužina x i y .



Rješenje. Kvadrati su slični pa vrijedi: $y : 4 = 4 : 9$. Dakle, $y = \frac{16}{9} \approx 1.78$. Također, pravokutni trokuti s vrhom A su slični pa vrijedi: $x : y = (x+y) : 4$. Tada je $x = \frac{64}{45} \approx 1.42$.

1.6 Obodni i središnji kut

Zadatak 1.8 (Autorica Marta Perak). Pametni satovi za sport, tjelovježbu i GPS pokazuju vrijeme, prijedeni put, mjere puls i temeperaturu te primaju obavijesti o porukama s mobitela. Ako je kut između velike i male kazaljke sata 56° , koliki je obodni kut koji opisuje isti luk na kružnici?

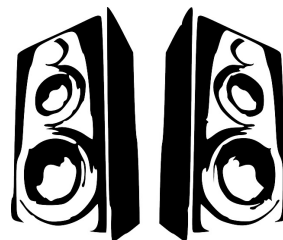


Rješenje. Koristimo Poučak o obodnom i središnjem kutu koji kaže da je središnji kut dvostruko veći od pripadnog obodnog kuta. Kut između velike i male kazaljke je središnji kut od 56° koji je dvostruko veći od obodnog kuta od 28° .

1.7 Pravilni mnogokuti

Zadatak 1.9 (Autori Nikola Lepen, Štefaniya Požgaj). Performanse zvučnika izuzetno ovise o njihovom smještaju i konkretnoj poziciji u prostoru. Postoje neka univerzalna pravila kojih se valja pridržavati. Zvučnici moraju biti udaljeni

- barem 0.5m od zida iza njih,
- barem 1m od bočnih zidova,
- barem 2-3m međusobno.

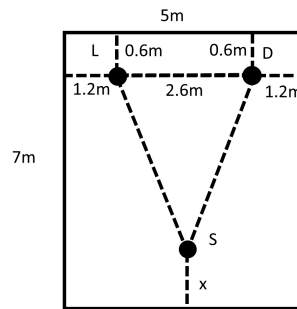


U idealnom slučaju razmak između zvučnika bit će jednak udaljenosti slušatelja od zvučnika. Naša prostorija pravokutnog je oblika dimenzija $5\text{m} \times 7\text{m}$. Zvučnike L i D postavljamo simetrično na kraći zid prostorije. Zvučnik L je od stražnjeg zida udaljen 0.6m, a od bočnog 1.2m.

1. Napravite skicu prostorije i razmještaja zvučnika. Je li moguće postaviti zvučnik D tako da razmještaj zvučnika u prostoriji zadovoljava naša pravila?
2. Na kojoj udaljenosti x od zida nasuprot zvučnika treba postaviti sofu S tako da se postigne idealna situacija?

Rješenje.

1. Smještaj zvučnika je moguć.



2. Zvučnici L i D su međusobno udaljeni $d(L, D) = 5 - 2 \cdot 1.2 = 2.6\text{m}$. Modeliramo razmještaj: L , D i S su vrhovi jednakostraničnog trokuta duljine stranice $a = 2.6\text{m}$. Tada je $x = 7 - 0.6 - v$, gdje je v visina trokuta $\triangle LDS$. Izračunajmo visinu trokuta:

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2.25\text{m}$$

Dakle, daljenost od zida nasuprot zvučnika gdje treba postaviti sofpu je $x = 7 - 0.6 - 2.25 = 4.15\text{m}$.

2

Drugi razred srednje škole

2.1 Kvadratne funkcije i jednačbe

Zadatak 2.1 (Autorica Ana Juračić). Hubsanov model drona, Hubsan X4 H107C+, giba se po putanji $s(t) = -16t^2 + \frac{v_0}{\sqrt{2}}t + h_0$, gdje je v_0 početna brzina, a h_0 visina pozicije daljinskog upravljača. Koju najvišu točku dosegne dron kontroliran sa zemlje s početnom brzinom $v_0 = 72\sqrt{2}$ m/s?



Rješenje. Dron je kontroliran sa zemlje $\Rightarrow h_0 = 0$ i

$$s(t) = -16t^2 + \frac{72\sqrt{2}}{\sqrt{2}}t + 0 = -16t^2 + 72t$$

Dakle, graf kvadratne funkcije koja opisuje putanju kretanja drona je parabola i najviša točka koju dosegne dron je $M(t_0, y_0)$ gdje je

$$t_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = s(t_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \text{pri čemu je } a = -16, b = 72.$$

Kratki račun daje $t_0 = -\frac{72}{2 \cdot (-16)} = \frac{9}{4} = 2.25$ i $s(t_0) = 81$. Dakle, dron dostiže najvišu točku na visini od 81m nakon 2.25s.

Zadatak 2.2 (Autor Boris Pein). Samsung Galaxy S8+ ima 5.8-inčni *SuperAMOLED* ekran. To znači da je duljina dijagonale ekrana omjera stranica 18.5:9 (2.06:1). Odredite duljinu i širinu ekrana u inčima. Koliko je to centimetara ako znamo da je $1\text{in} = 2.54\text{cm}$?



Rješenje. Nepoznanice a - duljina ekrana i b - širina ekrana, zadovoljavaju sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 5.8^2 \\ a : b &= 18.5 : 9 \end{aligned}$$

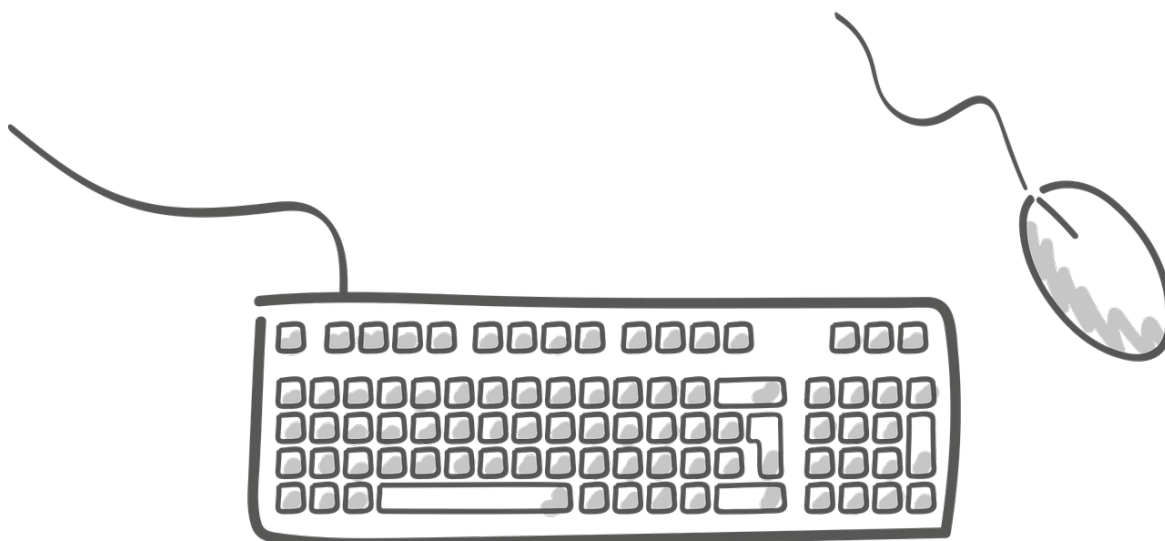
$$a = \frac{18.5}{9}b \approx 2.06b$$

$$2.06^2 b^2 + b^2 = 5.8^2$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{5.8^2}{1+2.06^2}} \approx 2.53\text{in} \approx 6.43\text{cm} \\ a &\approx 5.21\text{in} \approx 13.23\text{cm} \end{aligned}$$

Ekran je duljine 6.43cm i visine 13.23cm.

Zadatak 2.3 (Anonimna Autorica). Tipkovnica dimenzija $350\text{mm} \times 130\text{mm}$ sastoji se od kvadratnih i pravokutnih tipki. Pravokutne tipke zauzimaju 250cm^2 tipkovnice. Ako znamo da tipkovnica ima 90 kvadratnih tipki, kolika može biti maksimalna duljina jedne kvadratne tipke?



Rješenje. Ukupna površina tipkovnice je $P = 35 \cdot 13 = 455\text{cm}^2$. Pravokutne tipke zauzimaju površinu od $P_p = 250\text{cm}^2$, a kvadratne tipke zauzimaju površinu od

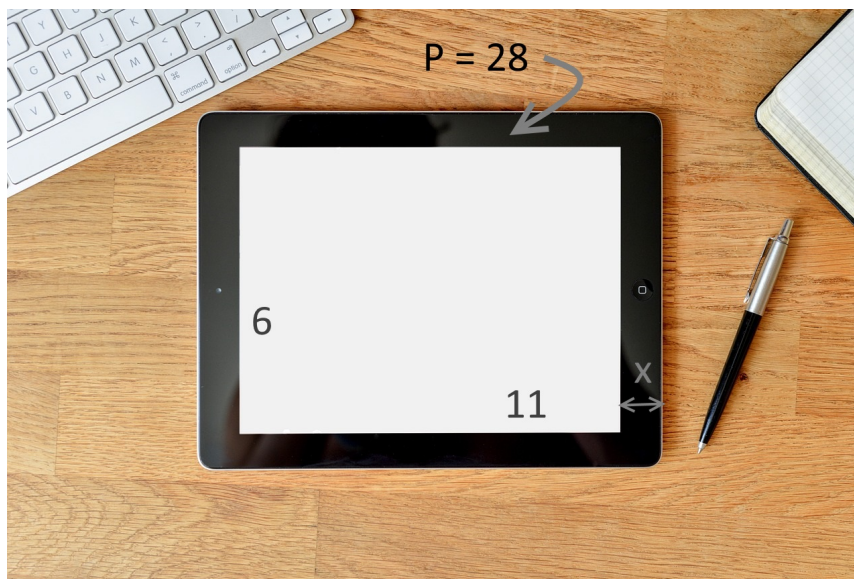
$$P_k = P - P_p = 455 - 250 = 205\text{cm}^2.$$

Neka je x maksimalna duljina jedne kvadratne tipke. Tipkovnica ih ima 90 pa vrijedi

$$\begin{aligned} 90x^2 &= 205 \\ x^2 &= \frac{205}{90} \\ x &= \sqrt{\frac{205}{90}} \\ x &\approx 1.5\text{cm} \end{aligned}$$

Maksimalna duljina tipke je 1.5cm.

Zadatak 2.4. U 2019. godini Microsoft se sprema lansirati novu liniju tableta Microsoft Surface Pro. Radi ograničenja u ukupnoj težini tableta, odlučeno je da plastični okvir mora imati površinu od $P = 28\text{cm}^2$, a ekran mora biti dimenzije $11\text{cm} \times 6\text{cm}$. Kolika mora biti širina x plastičnog okvira?



Rješenje. Površina plastične ploče prije izrezivanja okvira je $P_p = (11 + 2x)(6 + 2x) = 4x^2 + 34x + 66$. Površina ekrana iznosi $P_e = 6 \cdot 11 = 66$, a površina okvira $P = 28$. S druge strane, površina okvira jednaka je $P = P_p - P_e = 4x^2 + 34x + 66 - 66 = 4x^2 + 34x$. Dakle, tražimo pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe:

$$4x^2 + 34x = 28 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 34x - 28 = 0$$

Računamo:

$$x_{12} = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 + 4 \cdot 4 \cdot 28}}{2 \cdot 4} = \frac{34 \pm 2\sqrt{401}}{8}$$

Širina ekrana mora biti $x \approx 0.76\text{cm}$.

3

Četvrti razred srednje škole

3.1 Nizovi

Zadatak 3.1 (Autorica Anita Ravnjak). Tvrtnka PES Productions/Kanami je izdala novu računarsku sportsku igru PES2016 PROEVOLUTION SOCCER. Od korisnika traži prijedloge za poboljšanje proizvoda. Predviđeno vrijeme dostave prijedloga je 10 dana, a nudi 3 mogućnosti plaćanja za svaki od tih 10 dana:



1. 100kn po jednom radnom danu;
2. prvi dan 70kn, a svaki sljedeći 5kn više;
3. prvi dan 90lp, a svaki sljedeći dvostruko više.

Koju opciju plaćanja treba prihvatiti za najveću zaradu?

Rješenje. Izračunajmo ukupnu zaradu za svaku ponuđenu opciju.

1. $100\text{kn} \times 10 \text{ dana} = 1000\text{kn}$
2. Modelirajmo ovo rješenje pomoću aritmetičkog niza $a_n = a_1 + (n - 1)d$, gdje je $a_1 = 70\text{kn}$, a $d = 5\text{kn}$. Sada je $a_n = 70 + (n - 1)d$. Mi tražimo sumu n prvih članova aritmetičkog niza (a_n) za $n = 10$:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Izračunajmo $a_1 = 70\text{kn}$ i $a_{10} = 70 + 9 \cdot 5 = 115\text{kn}$ i dobijemo $S_{10} = \frac{10}{2}(70 + 115) = 925\text{kn}$.

3. Ovo rješenje modeliramo pomoću geometrijskog niza: $a_1 = 0.9\text{kn}$ i $a_n = 2a_{n-1}$. Mi tražimo sumu prvih n članova geometrijskog niza (a_n) gdje je $n = 10$:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

pri čemu je $q = 2$. Tada je $S_{10} = 0.9 \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 920.70\text{kn}$

Dakle, zaključujemo da je najprofitabilnije odlučiti se za prvu opciju.

Zadatak 3.2 (Anonimne autorice). U Kini su se od 2005. do 2011. svaki tjedan gradile po dvije elektrane na ugljen snage 600MW (dnevno). Kolika je ukupna snaga proizvedena u navedenom periodu? (Godina ima 52 tjedna.)



Rješenje. Vidimo da rješenje možemo modelirati pomoću aritmetičkog niza $a_n = a_1 + d(n - 1) = 1200 + 1200(n - 1)$, gdje je a_n ukupna snaga proizvedena n -tog dana. Sada je rješenje dano s

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Snaga proizvedena na dan $n = 7 \cdot 52 = 364$ je $S_{364} = \frac{364}{2}(1200 + 436800) = 79716000\text{MW}$.

3.2 Kombinatorika

Zadatak 3.3 (Anonimna autorica). Koliko različitih konfiguracija računala možemo složiti od tri različite matične ploče, četiri vrste napajanja i dvije različite grafičke kartice? Računalo mora sadržavati jednu matičnu ploču, jedno napajanje te jednu ili obje grafičke kartice.



Rješenje.

$$3 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 36.$$