Dokazi na matematičkim natjecanjima

Azra Tafro

Stručno-metodičke večeri Nastavne sekcije HMD-a
Zagreb, PMF-MO, 5. prosinca 2018.

Motivacija

„Dokaži...” = najveći „neprijatelj” prosječnog učenika.
Je li tako i natjecateljima?

- Koje tehnike i ideje se pojavljuju u dokazima?
- Koja „logička pravila” se pojavljuju i u drugim tipovima zadataka?
- Koje su tipične pogreške?
- Kako „naučiti” pisanje (i čitanje?) dokaza?

Prethodna izlaganja

- Kombinatorni zadaci na natjecanjima

  Međužupanijski stručni skup nastavnika matematike, 2013.
- Logičko-kombinatorni zadaci na natjecanjima

  (Dvostruko prebrojavanje)

  Državno natjecanje iz matematike, Šibenik 2014.
- Teorija brojeva na natjecanjima

  Stručni skup za natjecanja iz matematike, Zagreb 2016.
- Dirichlet i ostali principi na županijskom natjecanju

  Državno natjecanje iz matematike, Poreč 2018.
- Natjecanja iz matematike - praktični savjeti

  Matija Bašić, SMV 2.11.2016.
- Kombinatorika na natjecanjima

  Ivan Krijan, SMV 11.4.2018.

Dokazi u zadacima na natjecanjima

4 glavna područja: algebra, geometrija, teorija brojeva, logičko - kombinatorni zadaci

- Svaki razred na svakoj razini (A varijante) natjecanja sadrži barem jedan zadatak iz svakog područja
- Dokazi su češći u nekim područjima, posebno na višim razinama
- Logičke greške pojavljuju se i u zadacima koji naizgled nisu povezani s dokazima

Što možemo naučiti iz revizije županijskog natjecanja?

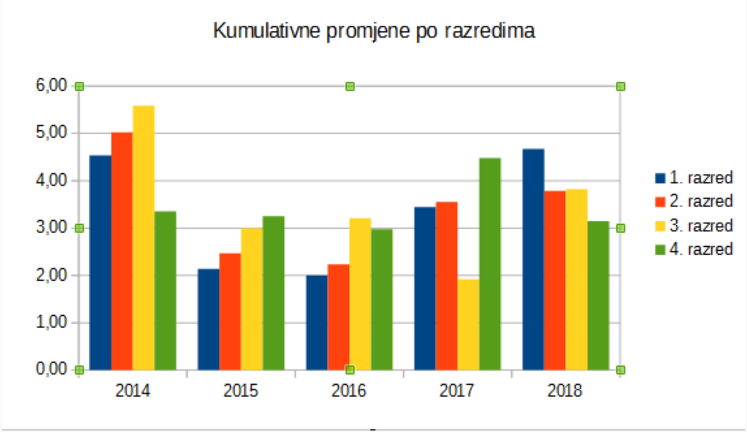
Razlike po zadacima (2018):

	1. zad.	2. zad.	3. zad.	4. zad.	5. zad.
1. razred	0.24	-0.95	-0.8	0.09	-2.8
2. razred	0	0.167	-0.19	-0.03	-1.83
3. razred	0.02	0.09	-1.48	-0.75	-0.84
4. razred	0.12	0.07	-1	-0.41	-0.07

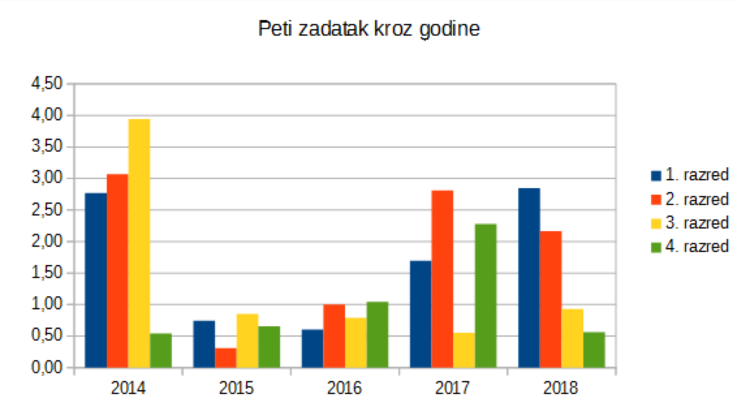
Apsolutne razlike (2018):

	1. zad.	2. zad.	3. zad.	4. zad.	5. zad.
1. razred	0,24	1,52	1,28	0,35	2,85
2. razred	0,00	0,31	1,48	0,55	2,17
3. razred	0,61	0,09	1,89	1,34	0,93
4. razred	0,32	0,07	1,78	1,34	0,56

Prosječna apsolutna razlika po testu kroz godine:



Prosječna apsolutna razlika na 5. zadatku (LK) kroz godine:



Općenito:

- Realna (vremenska) ograničenja u ispravljanju
- Ispravljači moraju predvidjeti tipične greške
- Usporedbom više sličnih rješenja lakše je uočiti nedostatke

Prvi razred:

- „Elementarni” zadaci s minimalnom količinom (dodatnog) gradiva - nisu nužno lakši!
- Učenici najmanje uvježbani u zapisivanju rješenja

Algebra

Teme:

- algebarski izrazi i jednadžbe
- kompleksni brojevi
- kvadratna jednadžba
- polinomi
- eksponencijalna i logaritamska funkcija
- trigonometrija
- nizovi
- nejednakosti
- funkcijske jednadžbe

Algebra

Gdje se kriju dokazi tj. logičke greške?

Odredi sve brojeve/funkcije/... koji zadovoljavaju neki izraz.

Tipične pogreške:

- „Rješenje je....” - nedostaje obrazloženje zbog čega je to jedino rješenje
- „Jedino moguće rješenje je...” - nedostaje provjera

Provjera - koliko detaljna mora biti? Zašto uopće provjeravamo?

Državno natjecanje 2018., Zadatak 1.1.

Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x \quad + y \; - z \; &= -1 \\ x^2 \quad - y^2 + z^2 &= \;\; 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 &= -1. \end{aligned}$$

Rezultati:

- 10 bodova: 6 učenika
- 8 ili 9 bodova: 12 učenika

Rješenje

Iz prve jednadžbe imamo $x + y = z - 1$. Uvrštavanjem u drugu slijedi:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 - z^2 \\ (x+y)(x-y) &= (1-z)(1+z) \\ (z-1)(x-y) &= -(z-1)(1+z) \\ (z-1)(x-y+z+1) &= 0. \end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja: $z = 1$ ili $x - y + z + 1 = 0$.

Ako je $z = 1$, onda je $x + y = 0$, tj. $x = -y$. Uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $2y^3 = -2$, odnosno $y = -1$, $x = 1$.

Ako je $x - y + z + 1 = 0$, onda uvrštavanjem $z = -x + y - 1$ u prvu jednadžbu dobivamo $2x = -2$, odnosno $x = -1$.

Sada vrijedi $z = -(-1) + y - 1 = y$ pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $2y^3 = -2$, odnosno $y = z = -1$.

Prema tome, kandidati za rješenja zadanog sustava su $(1, -1, 1)$ i $(-1, -1, -1)$. Direktnim uvrštavanjem u početni sustav lako provjerimo da se doista radi o rješenjima.

Geometrija

Teme:

- sukladnost i sličnost
- karakteristične točke trokuta
- površine
- tetivni četverokut
- stereometrija
- analitička geometrija
- vektori

Geometrija

Tipične pogreške su u znanju i (ne)preciznosti, a ne u zaključivanju:

- Nerazumijevanje pojmova (npr. upisana/opisana kružnica)
- Pravilan odabir pristupa - elementarno, trigonometrijsko ili analitičko rješenje?
- Mnogo točnih tvrdnji koje ne vode (?) rješenju
- Skica nije dokaz: precizna skica je često vrlo korisna, ali sama po sebi nije dokaz, a može i odvesti na krivi put

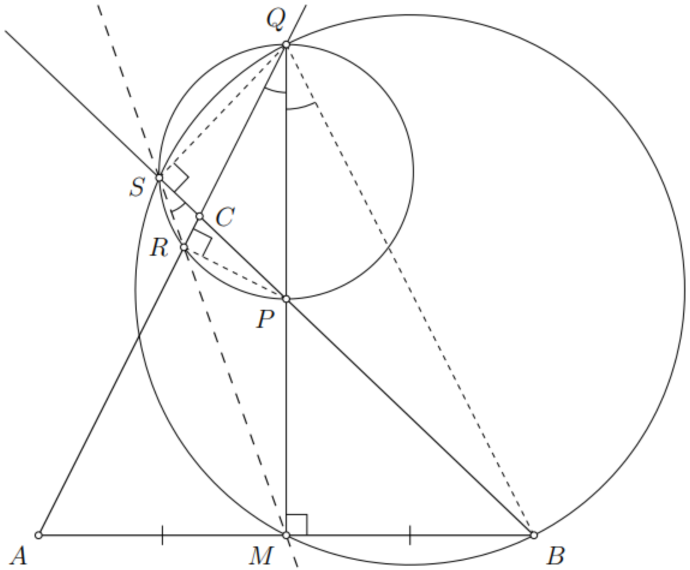
Ispravljači trebaju biti temeljiti: Je li učenik dokazao sve tvrdnje koje koristi? Vode li rješenju?

Županijsko natjecanje 2018., Zadatak 4.3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $|BC| > |AC|$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, a pravac AC u točki Q. Točka R je nožište okomice iz točke P na stranicu $\overline{AC}$, a točka S je nožište okomice iz točke Q na pravac BC.
Dokaži da pravac RS raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

- Zbog čega je $|BC| > |AC|$ važno?
- Kako ćemo dokazati tvrdnju? Želimo li dokazati da sjecište RS i AB raspolavlja $\overline{AB}$ ili postoji drugi način?

Česti trik: Tvrdnje oblika *„Za točku koja je X vrijedi da je i Y”* dokazujemo obratom - uzmemo točku koja je Y i dokažemo da je ujedno i X (ako je X jedinstven).


Q
S
C
R
P
A
M
B

Rješenje

Iz uvjeta $|BC| > |AC|$ slijedi da se točka Q nalazi na produžetku dužine $\overline{AC}$ preko točke C, a točka S na produžetku dužine $\overline{BC}$, također preko točke C. Označimo s M polovište dužine $\overline{AB}$.

Budući da je $\angle BMQ = \angle BSQ = 90^\circ$, četverokut je $BQSM$ tetivan.

Zato vrijedi $\angle MSB = \angle MQB$.

Budući da je $\angle PRQ = \angle PSQ = 90^\circ$, zaključujemo da je četverokut $PQSR$ tetivan.

Iz toga zaključujemo da je $\angle RQP = \angle RSP$.

Budući da je pravac MQ simetrala dužine $\overline{AB}$, slijedi da je $\angle AQM = \angle MQB$.

Vrijedi

$$\angle RSP = \angle RQP = \angle AQM = \angle MQB = \angle MSB = \angle MSP.$$

Dakle, točke S, R i M su kolinearne, što je i trebalo pokazati.

Teorija brojeva

Teme:

- zadaci sa znamenkama (zapisi u bazi, djeljivost s 3)
- djeljivost, djelitelji, mjera, faktorizacija
- ostaci pri dijeljenju (svojstva, periodičnost)
- diofantske jednadžbe

Interdisciplinarne tehnike: matematička indukcija, prebrojavanje, algebarske manipulacije,...

Teorija brojeva

Tipične pogreške (i učenika i ispravljača) slične su onima u ostalim područjima:

- pronađeno rješenje bez dokaza
- pronađen kandidat za rješenje bez provjere
- „očite” tvrdnje bez dokaza

Primjer - je li očito?

Ako su a i b prirodni brojevi takvi da je $a^2 = b^3$, onda postoje prirodni brojevi c i d takvi da je $a = c^3$ i $b = d^2$.

Logičko-kombinatorni zadaci

Teme:

- Dirichletov princip
- invarijante
- matematička indukcija
- princip ekstrema (kombinatorna geometrija)
- dvostruko prebrojavanje
- igre i algoritmi

Osim standardnih predavanja po temama, pripreme iz ovog područja za cilj trebaju imati i razvoj kritičkog i (ne)linearnog razmišljanja, formuliranje i zapisivanje ideja.

Logičko-kombinatorni zadaci

Općenito, možemo reći da se problemi tipično javljaju na 3 razine:

- razumijevanje problema - što se događa/traži u zadatku?
- formuliranje problema - kako „postaviti" tj. matematički zapisati zadatak?
- formuliranje rješenja - kako uobličiti ideje koje se čine „nadohvat ruke"?

Primjer, princip ekstrema

U ravnini je dano konačno mnogo crnih i bijelih točaka sa svojstvom da svaka dužina koja spaja istobojne točke sadrži točku druge boje. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

Ideja: skiciramo nekolinearne točke, vidimo da bismo morali dodavati beskonačno mnogo točaka - kako to formulirati?

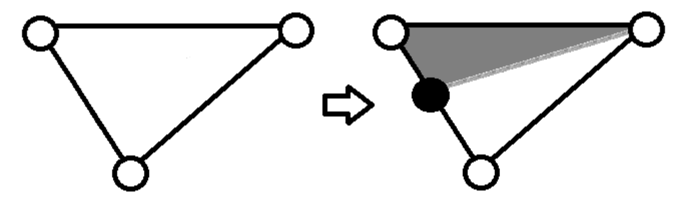
Princip ekstrema: Pronađemo prikladno svojstvo elemenata problema na kojem postoji uređaj te odaberemo najveći ili najmanji član

Rješenje

Pretpostavimo suprotno tj. da nisu sve točke kolinearne.

Tada neke od točaka čine vrhove trokuta. Odaberimo tri točke koje čine vrhove trokuta najmanje površine.

Barem dvije od njih su iste boje, dakle između njih postoji još jedna točka (druge boje). Time smo, zajedno s preostalom trećom točkom, dobili manji trokut. Kontradikcija.



Županijsko natjecanje 2017., 1.5.

Karlo i Lovro igraju sljedeću igru. Karlo će razrezati papir dimenzija 9×9 na pravokutnike cjelobrojnih dimenzija kojima je barem jedna dimenzija 1. Nakon toga će Lovro odabrati prirodni broj $k \in \{1, \ldots, 9\}$ i Karlo će mu dati onoliko novčića koliko iznosi ukupna površina svih pravokutnika dimenzija $1 \times k$ i $k \times 1$. Lovro će odabrati k tako da od Karla dobije što više novčića, a Karlo bi želio uštedjeti i pritom Lovri dati što manje novčića.
Odredi najmanji mogući broj novčića koje će Karlo dati Lovri.

Moramo naći ogradu i primjer (konstrukciju).

Rješenje, ograda

Tvrdimo da će Karlo dati Lovri najmanje 12 novčića.

Pretpostavimo da postoji način da Karlo razreže papir tako da Lovri mora dati (strogo) manje od 12 novčića. Tim načinom rezanja Karlo bi napravio najviše 11 pravokutnika dimenzija 1×1, pet pravokutnika dimenzija 1×2, tri pravokutnika dimenzija 1×3, dva pravokutnika dimenzija 1×4, dva pravokutnika dimenzija 1×5, te po jedan pravokutnik dimenzija 1×6, 1×7, 1×8 i 1×9.

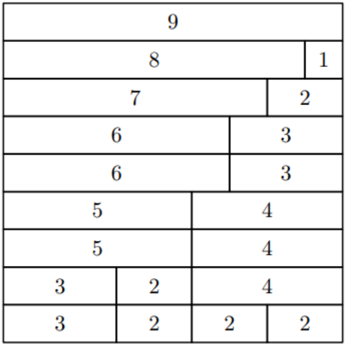
Svi ti pravokutnici zajedno bi imali površinu

$$11 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 78.$$

Budući da je $78 < 81$, Karlo bi uz sve te pravokutnike morao napraviti još barem jedan pravokutnik kako bi iskoristio čitav papir dimenzija 9×9. Zato je nemoguće da Karlo da Lovri manje od 12 novčića.

Rješenje, konstrukcija

Sljedeći primjer pokazuje da Karlo može razrezati papir tako da bude siguran da će Lovri trebati dati najviše 12 novčića.



Kako biste bodovali ova dva dijela rješenja?

Kako „naučiti” dokaze?

> The only way to learn mathematics is to do mathematics.
>
> — Paul Halmos

Učenici:

- Interakcija i timski rad - prezentacije rješenja, međusobne pripreme/seminari
- Sudjelovanje u društvenoj mreži natjecatelja
  - www.artofproblemsolving.com/community
  - www.skoljka.org

Mentori:

- Zadaci „za tramvaj” - mozgalice koje se rješavaju bez papira
- Probna natjecanja s „pravim” ispravljanjem

Zaključak?

LK zadaci:

- priprema učenika da bolje formuliraju misli i zapisuju rješenje
- priprema mentora/ispravljača na prepoznavanje grešaka u razmišljanju
- pripreme, radionice, seminari...?

Općenito:

- učenici: svaku tvrdnju treba obrazložiti
- ispravljači: svaku tvrdnju treba obrazložiti :)

Izvori ideja:

- Andreescu T., Savchev S.: *Mathematical Miniatures*
- Engel, A.: *Problem Solving Strategies*
- Larson, L.C.: *Problem-Solving Through Problems*
- Polya, G.: *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*
- Zeitz, P.: *The Art and Craft of Problem Solving*

Izvori zadataka:

- www.artofproblemsolving.com/community
- http://www.imo-official.org/
- natjecanja.math.hr
- Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" (mnm.hr)

Hvala na pažnji!