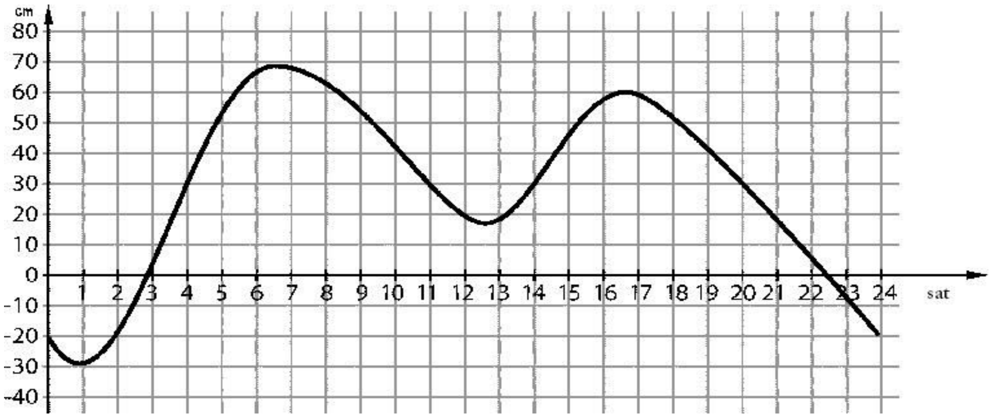
MATEMATIČKI KLOKAN S
6 700 000 sudionika u 51 zemlji Europe, Amerike, Afrike i Azije
Četvrtak, 15. ožujka 2012. – Trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala su zabranjena**.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.
* Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.
* Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.
* Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.

Pitanja za 3 boda:

1. Razina vode u luci, određenog dana u godini, padala je i rasla kao što je prikazano na slici.

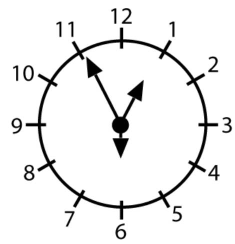


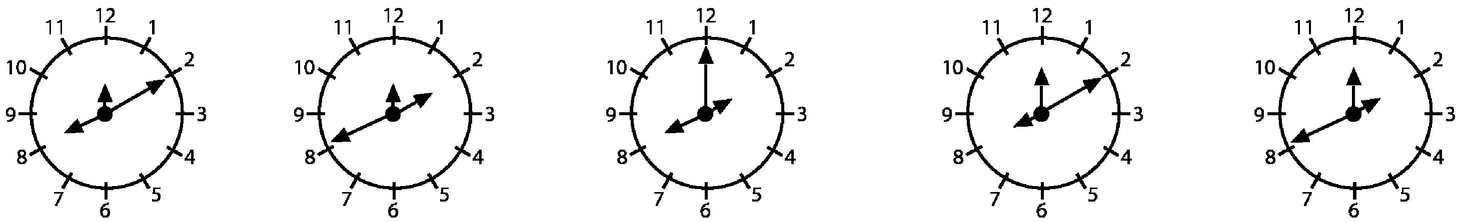
Koliko sati toga dana je razina vode bila iznad 30 cm?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 13

Rješenje: **E**

2. Specijalni sat ima tri kazaljke različite duljine (kazaljka za sate, kazaljka za minute i kazaljka za sekunde). Ne zna se što koja od kazaljki pokazuje, ali se zna da pokazuju točno vrijeme. U 12:55:30 kazaljke su u položaju kao na slici desno. Kako će sat izgledati kada će pokazivati 8:10:00?





A) B) C) D) E)

Rješenje: **A**

3. Broj $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ jednak je:

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[6]{4}$ D) $\sqrt[3]{4}$ E) 2

Rješenje: **B**

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

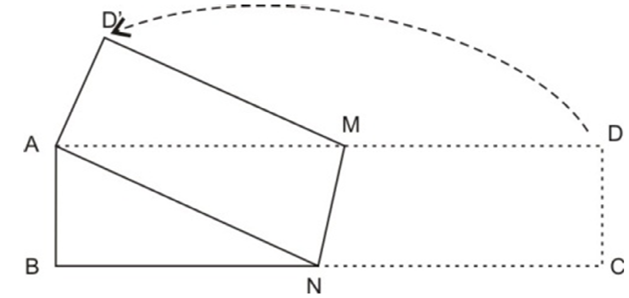
4. U nizu od 5 brojeva prvi je broj 2, a zadnji 12. Umnožak prva tri broja je 30, umnožak triju u sredini 90, a umnožak posljednja tri je 360. Koji je broj u sredini niza?

2				**12**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

Rješenje: **C**
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $90 = 3 \cdot 5 \cdot 6$, $360 = 5 \cdot 6 \cdot 12$.

5. Papir ABCD oblika pravokutnika sa stranicama duljina 4 cm i 16 cm presavijen je preko pravca MN tako da se vrh C poklopio s vrhom A, kao što je prikazano na slici. Kolika je površina četverokuta ANMD'?



A) 28 cm² B) 30 cm² C) 32 cm² D) 48 cm² E) 56 cm²

Rješenje: **C**
Neka je $|BN| = x$, tada je $|CN| = |NA| = 16 - x$. Za duljine stranica pravokutnog trokuta ABN vrijedi:
$4^2 + x^2 = (16 - x)^2$, a odatle je $x = |\mathrm{BN}| = 7.5$ cm i $|CN| = 8.5$ cm. Pravac AN je presječnica usporednih pravaca BC i AD pa je $\angle\mathrm{BNA} \cong \angle\mathrm{NAM}$, a pravac AD je presječnica usporednih pravaca AN i MD' pa je $\angle\mathrm{NAM} \cong \angle AMD'$. U trokutima ABN i AD'M imamo tri para sukladnih kutova ($\angle\mathrm{BNA} \cong \angle AMD'$, $\angle\mathrm{NBA} \cong \angle\mathrm{AD'M} = 90°$) i jedan par stranica jednake duljine $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AD'}|$, pa su trokuti ABN i AD'M sukladni (poučak KSK). Sukladni trokuti imaju jednake površine, pa se površina četverokuta ANMD' može izračunati zbrajanjem površina trokuta AD'M i ANM.
$\mathrm{P}(\mathrm{ABN}) = \mathrm{P}(\mathrm{AD'M}) = \dfrac{4 \cdot 7.5}{2} = 15$ cm². Trokut ANM je trokut u kojem je visina na stranicu $\overline{AM}$ jednake duljine kao i kraća stranica pravokutnika ABCD, pa je $\mathrm{P}(\mathrm{ANM}) = \dfrac{|\mathrm{AM}| \cdot |\mathrm{AB}|}{2} = \dfrac{8.5 \cdot 4}{2} = 17$ cm². Dakle,
$\mathrm{P}(\mathrm{ANMD'}) = 15 + 17 = 32$ cm².

6. Zbroj svih znamenaka deveteroznamenkastog prirodnog broja iznosi 8. Koliki je umnožak svih znamenaka tog broja?

A) 9! B) 9 C) 8 D) 1 E) 0

Rješenje: **E**

7. Najveća vrijednost broja *n* za koji vrijedi $n^{200} < 5^{300}$ iznosi:

A) 5 B) 6 C) 8 D) 11 E) 12

Rješenje: **D**
$n^{200} < 5^{300}, \log n^{200} < \log 5^{300}, 200 \cdot \log n < 300 \cdot \log 5, \log n < 1.5 \cdot \log 5$, $n < 5^{1.5} = \sqrt{125} < \sqrt{144} = 12$.
Prema tome, $n = 11$.

8. Koja od sljedećih funkcija zadovoljava jednakost $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$?

A) $f(x)=\frac{2}{x}$ B) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ C) $f(x)=1+\frac{1}{x}$ D) $f(x)=\frac{1}{x}$ E) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

Rješenje: **D**

Za funkciju u A je $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{\frac{1}{x}}=2x\neq\frac{x}{2}$, za funkciju u B je $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x}{x+1}\neq x+1$, za funkciju u C je $f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\frac{1}{x}}=1+x\neq\frac{x+1}{x}$, za funkciju u D je $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x=\frac{1}{f(x)}$, za funkciju u E je $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}+x=f(x)$. Prema tome, funkcija u D zadovoljava zadanu jednakost.

Pitanja za 4 boda:

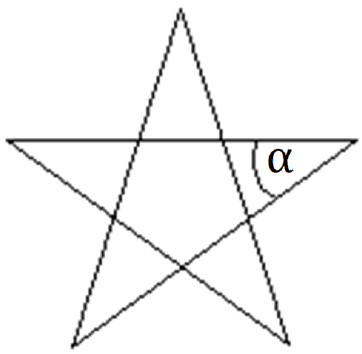
9. Realni broj x zadovoljava nejednakost $x^3<64<x^2$. Koja je od sljedećih nejednakosti točna?

A) $0<x<64$ B) $-8<x<4$ C) $x>8$ D) $-4<x<8$ E) $x<-8$

Rješenje: **E**

Rješenja nejednadžbe $x^3<64$ su realni brojevi x za koje vrijedi $x<4$, a rješenja nejednadžbe $64<x^2$ je unija intervala $\langle-\infty,-8\rangle\cup\langle 8,+\infty\rangle$. U presjeku rješenja su svi realni brojevi x za koje vrijedi $x<-8$.

10. Kolika je veličina kuta α u zvijezdi čiji su vrhovi vrhovi pravilnog peterokuta?



A) 24˚ B) 30˚ C) 36˚ D) 45˚ E) 72˚

Rješenje: **C**

Unutar zvijezde nalazi se također manji pravilni peterokut čiji su svi unutarnji kutovi veličine $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5}=108°$. To je vanjski kut jednakokračnog trokuta u kojem se nalazi kut α, njegov sukut iznosi 72˚, a α = 180˚ - 144˚ = 36˚.

11. Markov broj godina je dvoznamenkasti broj i potencija s bazom 5, a Majin broj godina je dvoznamenkasti broj i potencija s bazom 2. Zbroj svih četiriju znamenaka njihovih godina je neparan broj. Koliki je umnožak znamenaka njihovih godina?

A) 50 B) 60 C) 240 D) 300 E) 2010

Rješenje: **C**

Marko ima 25 godina, a Maja može imati 16, 32 ili 64 godine. Pretpostavimo da Maja ima 16 godina, zbroj svih četiriju znamenaka njihovih godina je 14, a 14 nije neparan broj. Znači, Maja ne može imati 16 godina. Pretpostavimo da Maja ima 32 godine, zbroj svih četiriju znamenaka njihovih godina je 12, a 12 nije neparan broj. Znači, Maja ne može imati 32 godine.
Pretpostavimo da Maja ima 64 godine, zbroj svih četiriju znamenaka njihovih godina je 17 i 17 je neparan broj. Znači, Maja ima 64 godine. Umnožak znamenaka njihovih godina je $10 \cdot 24 = 240$.

12. Skup svih rješenja nejednadžbe $|x| + |x-3| > 3$ je:

A) $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$ B) $\langle -3, 3\rangle$ C) $\langle -\infty, -3\rangle$
D) $\langle -3, +\infty\rangle$ E) □

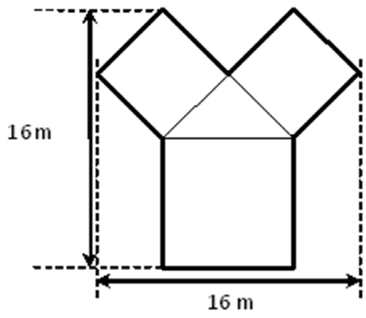
Rješenje: **A**
Rješavanjem nejednadžbe $|x| + |x-3| > 3$ na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ imamo: $-x - x + 3 > 3$, a rješenje je interval $\langle -\infty, 0\rangle$. Rješavanjem nejednadžbe $|x| + |x-3| > 3$ na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ imamo: $x - x + 3 > 3$, a rješenje je $\varnothing$. Rješavanjem nejednadžbe $|x| + |x-3| > 3$ na intervalu $\langle 3, +\infty\rangle$ imamo: $x + x - 3 > 3$, a rješenje je interval $\langle 3, +\infty\rangle$. Prema tome, skup svih rješenja zadane nejednadžbe je unija intervala $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 3, +\infty\rangle$.

13. Na ispitu iz povijesti prosječna ocjena jednog odjeljenja 8. razreda bila je 4. Prosječna ocjena dječaka u tom odjeljenju bila je 3.6, a djevojčica 4.2. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?

A) U odjeljenju je dva puta više dječaka od djevojčica.
B) U odjeljenju je četiri puta više dječaka od djevojčica.
C) U odjeljenju je dva puta više djevojčica od dječaka.
D) U odjeljenju je četiri puta više djevojčica od dječaka.
E) U odjeljenju ima jednaki broj djevojčica i dječaka.

Rješenje: **C**
Neka je x broj dječaka, a y broj djevojčica u tom odjeljenju. Tada vrijedi $3.6x + 4.2y = 4(x+y)$, a odatle slijedi da je $y = 2x$, odnosno broj djevojčica je dva puta veći od broja dječaka.

14. Na slici je gredica posađena ružama. Bijele ruže nalaze se u sukladnim kvadratima, a crvene ruže u trećem kvadratu. Žute ruže nalaze se u pravokutnom trokutu. Kolika je površina cijele gredice ?



A) 114 m² B) 130 m² C) 144 m²

D) 160 m² E) 186 m²

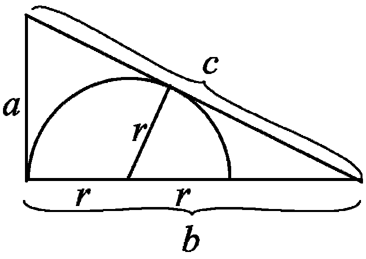
Rješenje: **C**
Neka je d duljina dijagonale manjeg kvadrata. Dakle, vrijedi: $2d = 16$, $d = 8$, a odatle slijedi da je duljina a stranice manjeg kvadrata jednaka $4\sqrt{2}$ m. Duljina A stranice većeg kvadrata je 8 m (jer je $d + A = 16$).
Površina cijele gredice jednaka je zbroju površina dvaju sukladnih manjih kvadrata, većeg kvadrata i pravokutnog trokuta. Dakle, $P = 2 \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 8^2 + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} = 144$ m².

15. Sve karte za prvi red kina su prodane. Sjedala su redom označena brojevima 1, 2, 3, ... Pogreškom su za jedno isto sjedalo prodane dvije karte. Zbroj brojeva sjedala na svim prodanim kartama 1. reda iznosi 857. Koji je broj sjedala za koje su prodane dvije karte?

A) 4 B) 16 C) 25 D) 37 E) 42

Rješenje: **D**
Najbliži zbroj brojeva sjedala broju 857 je 820. Prvi sljedeći bio bi 861, što je veće od 857. Zbroj brojeva sjedala određuje broj sjedala, a broj sjedala je 40. Razlika 857 – 820 = 37 određuje broj sjedala za koje su zabunom prodane dvije karte.

16. Na slici je pravokutni trokut sa stranicama duljina *a*, *b* i *c*. U trokut je upisana polukružnica. Koliki je radijus *r* te polukružnice?



A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ B) $\frac{ab}{a+b+c}$ C) $\frac{ab}{b+c}$ D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ E) $\frac{ab}{a+c}$

Rješenje: **E**
Nadopunimo li pravokutni trokut sukladnim trokutom, dobit ćemo jednakokračni trokut s krakovima duljine c i osnovicom duljine $2a$. Površina tog jednakokračnog trokuta iznosi ab, a radijus ρ njemu upisane kružnice

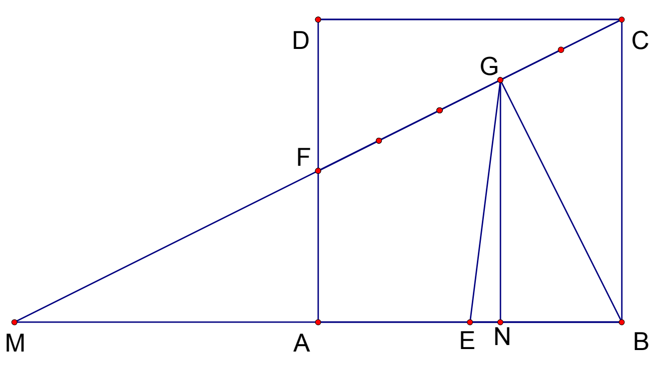
$$\rho = \frac{P}{s} = \frac{ab}{a+c} .$$

Pitanja za 5 bodova:

17. Kvadrat ABCD ima stranice duljine 2 cm. Točke E i F su redom polovišta stranica $\overline{\mathrm{AB}}$ i $\overline{\mathrm{AD}}$. Točka G je točka na dužini $\overline{CF}$ takva da vrijedi $3|\mathrm{CG}| = 2|\mathrm{GF}|$. Površina trokuta BEG iznosi:

A) $\frac{7}{10}$ cm² B) $\frac{4}{5}$ cm² C) $\frac{8}{5}$ cm² D) $\frac{3}{5}$ cm² E) $\frac{6}{5}$ cm²

Rješenje: **B**



Iz $3|\mathrm{CG}| = 2|\mathrm{GF}|$ slijedi da je $|\mathrm{CG}| : |\mathrm{GF}| = 2 : 3 = 2k : 3k$.
Neka je $x = |\mathrm{MF}|$ i $y = |\mathrm{MA}|$.
Produljimo li dužine $\overline{CF}$ i $\overline{AB}$ redom preko točaka A i F, dobit ćemo slične pravokutne trokute MBC i MAF (slični su po poučku KK, $\angle$M zajednički i 90°).
Zbog sličnosti slijedi: $y : (y+2) = 1 : 2$, a odatle je $y = 2$ cm i $|\mathrm{MB}| = 4$ cm. Analogno je $x = |\mathrm{MF}| = |\mathrm{FC}| = 5k$.
Neka je N nožište visine iz vrha G na stranicu $\overline{EB}$ .Iz sličnosti trokuta MNG i MBC (slični su po poučku KK) dalje slijedi: $(x+3k):(x+5k) = |\mathrm{NG}| : 2$, a odatle je $|\mathrm{NG}| = \frac{16k}{10k} = \frac{8}{5}$ cm.

$$\mathrm{P(BGE)} = \frac{|\mathrm{EB}||\mathrm{NG}|}{2} = \frac{1 \cdot \frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2.$$

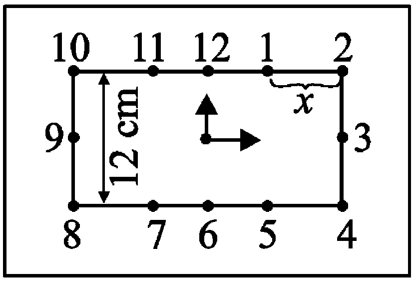
18. Simetrala kuta nasuprot osnovici u jednakokračnom trokutu ABC dijeli trokut na dva jednakokračna trokuta. Koja je najmanja moguća veličina kuta uz osnovicu trokuta ABC?

A) 15° B) 22.5° C) 30° D) 36° E) 45°

Rješenje: **E**

Simetrala kuta nasuprot osnovici u jednakokračnom trokutu ABC dijeli trokut na dva pravokutna jednakokračna trokuta. Oba šiljasta kuta u tim pravokutnim trokutima iznose 45°. Prema tome, veličina kuta uz osnovicu je 45°.

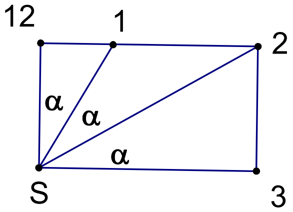
19. Sat na slici je pravokutnog oblika. Kolika je duljina x dužine između brojeva 1 i 2, ako je duljina dužine između brojeva 8 i 10 jednaka 12 cm?



A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$

D) $2+\sqrt{3}$ E) $12-3\sqrt{3}$

Rješenje: **C**



Neka je S točka oko koje kazaljke rotiraju, a udaljenost od točke "12" do "1" označimo s y. Pravokutnik određen točkama S, "3","2" i "12" ima jednu stranicu duljine 6 cm, a drugu $x+y$. Veličina kuta α je 30°. Trokut s vrhovima S, "3" i "2" je polovina jednakostraničnog trokuta s osnovicom duljine 12 cm. Trokut s vrhovima S, "12" i "1" je također polovina jednakostraničnog trokuta s visinom duljine 6 cm, odatle slijedi da je $y = 2\sqrt{3}$, a dužina između S i "1" ima duljinu $4\sqrt{3}$. Primjenom kosinusovog poučka na trokut s vrhovima S, "1" i "2", lako se nalazi da je $x = 4\sqrt{3}$.

20. Koliko permutacija (x_1, x_2, x_3, x_4) na skupu prirodnih brojeva $\{1,2,3,4\}$ ima svojstvo da je zbroj $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ djeljiv brojem 3?

A) 8 B) 12 C) 14 D) 16 E) 24

Rješenje: **D**

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = x_1(x_2+x_4) + x_3(x_2+x_4) = (x_1+x_3)(x_2+x_4)$. Taj zbroj je djeljiv brojem 3 ako je barem jedan od faktora x_1+x_3 ili x_2+x_4 djeljiv brojem 3.

Neka je x_1+x_3 djeljiv brojem 3, znači x_1+x_3 ima vrijednost 3 ili 6. Ako je $x_1+x_3=3$, onda je $x_1=1$ i $x_3=2$ ili obratno. Moguće permutacije su: 1324, 1423, 2314 i 2413. Ako je $x_1+x_3=6$, onda je $x_1=2$ i $x_3=4$ ili obratno. Moguće permutacije su: 2143, 2341, 4123 i 4321.

Neka je x_2+x_4 djeljiv brojem 3, znači x_2+x_4 ima vrijednost 3 ili 6. Ako je $x_2+x_4=3$, onda je $x_2=1$ i $x_4=2$ ili obratno. Moguće permutacije su: 3142, 4132, 3241 i 4231. Ako je $x_2+x_4=6$, onda je $x_2=2$ i $x_4=4$ ili obratno. Moguće permutacije su: 1234, 1432, 3214 i 3412.

21. Nakon sata matematike na ploči je ostao nacrtan graf funkcije $f(x)=x^2$ i 2012 pravaca paralelnih s pravcem $y=x$ od kojih svaki parabolu siječe u dvije točke. Zbroj apscisa svih sjecišta pravaca i parabole iznosi:

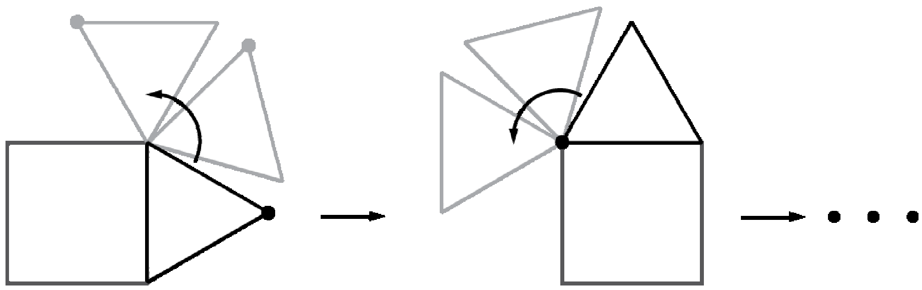
A) 0 B) 1 C) 1006 D) 2012 E) nemoguće odrediti

Rješenje: **D**

Pravci usporedni s pravcem $y=x$ imaju jednadžbu oblika $y=x+l$. Rješavanjem sustava $y=x^2$ i $y=x+l$, dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - x - l = 0$, a zbroj rješenja te jednadžbe je $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=1$.

Kako ima 2012 pravaca usporednih s pravcem $y=x$, zbroj apscisa svih sjecišta pravaca i parabole iznosi $2012 \cdot 1 = 2012$.

22. Jednakostranični trokut rotira oko vrhova kvadrata sa stranicom duljine 1 cm, kao što je prikazano na slici.



Kolika je duljina puta koji napravi označena točka takvom rotacijom trokuta dok trokut i označena točka ne dođu ponovno u početni položaj?

A) 4π B) $\frac{28}{3}\pi$ C) 8π D) $\frac{14}{3}\pi$ E) $\frac{21}{2}\pi$

Rješenje: **B**

Duljina kružnog luka koji točka opisuje dok prvi puta ne padne na stranicu kvadrata (lijevi gornji vrh kvadrata) iznosi $\frac{1 \cdot \pi \cdot 210°}{180°} = \frac{7\pi}{6}$. Da bi točka ponovno došla u isti položaj u kojem je bila prije početka rotacije, mora opisati 8 takvih lukova, pa je duljina tog puta $8 \cdot \frac{7\pi}{6} = \frac{28\pi}{3}$.

23. Zadan je niz 1, 1, 0, 1, -1, ...: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_1 - a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, itd. Koliki je zbroj prvih 100 članova tog niza?

A) 0 B) 3 C) – 21 D) 100 E) – 1

Rješenje: **B**

Članovi niza se ciklički ponavljaju: 1, 1, 0, 1 , -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0, pa opet 1, 1, 0, 1 , -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0, itd. U podnizu koji se ponavlja ima 12 članova. U prvih 100 članova zadanog niza takvih podnizova ima 12 ($8 \cdot 12 = 96$) i još prva četiri člana niza. Zbroj članova podniza iznosi 0, pa je zbroj prvih 100 članova zadanog niza $12 \cdot 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 3$.

24. Ivana je izabrala dva broja a i b iz skupa $\{1, 2, 3, ..., 26\}$. Umnožak $a \cdot b$ jednak je zbroju preostala 24 broja. Kolika je vrijednost izraza $|a - b|$?

A) 10 B) 9 C) 7 D) 6 E) 2

Rješenje: **D**

Kako su a i b iz skupa $\{1, 2, 3, 4, ..., 25, 26\}$ i njihov umnožak je jednak zbroju preostala 24 broja, vrijedi: $a + b + a \cdot b = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 25 + 26$, odnosno $a + b + a \cdot b = 351$. S obje strane jednakosti dodajemo 1, pa vrijedi $a + b + a \cdot b + 1 = 352$. Faktorizacijom lijeve strane dobivamo $(1 + b) \cdot (1 + a) = 352$. Znači, broj 352 je umnožak neka dva prirodna broja $a + 1$ i $b + 1$. Rastavljanjem broja 352 na proste faktore dobivamo $352 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$. Brojevi a i b su iz skupa $\{1, 2, 3, 4, ..., 25, 26\}$ pa slijedi da je $a + 1 = 16$ i $b + 1 = 22$. Nadalje, $a = 15$ i $b = 21$. $|a - b| = 6$.