ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve troznamenkaste brojeve sa zbrojem znamenaka 11 od kojih se zamjenom znamenki jedinica i stotica dobiva za 594 veći broj.

Prvo rješenje.

Početnom broju smo dodali 600 i oduzeli 6, pa je znamenka jedinica za 6 veća od znamenke stotica. 3 boda

Ako je znamenka stotica barem 3, onda je znamenka jedinica barem 9 i zbroj znamenki je veći od 11. 1 bod

Ako je znamenka stotica 1, onda je znamenka jedinica 7, a desetica 3, tj. broj je 137. 1 bod

Ako je znamenka stotica 2, onda je znamenka jedinica 8, a desetica 1, tj. broj je 218. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Tada zamjenom znamenki jedinica i stotica dobivamo broj $\overline{cba}$. Iz uvjeta zadatka imamo:

$$\begin{aligned}
\overline{cba} &= \overline{abc} + 594, \\
100c + 10b + a &= 100a + 10b + c + 594, && \text{2 boda} \\
99c &= 99a + 594, \qquad / \; : 99 \\
c &= a + 6. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Drugi uvjet zadatka je $a + b + c = 11$, odnosno uvrštavanjem $c = a + 6$ dobivamo $b = 5 - 2a$. Odavde slijedi da je a jednak 1 ili 2. 1 bod

Jedine mogućnosti su $a = 1, b = 3, c = 7$ i $a = 2, b = 1, c = 8$. Odnosno, traženi brojevi su 137 i 218. 2 boda

Zadatak A-1.2.

Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \qquad \text{i} \qquad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10.$$

Odredi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Rješenje.

Množenjem svake od jednakosti s ab imamo

$$a^2 + b^2 = 3ab \qquad \text{i} \qquad a^3 + b^3 = 10ab.$$ 1 bod

Uočimo, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Uvrštavanjem prve jednakosti u drugu imamo $10ab = (a+b)(3ab - ab) = 2ab(a+b)$, odakle dijeljenjem s $2ab$ slijedi $a + b = 5$. 2 boda

Iz $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i prve jednakosti slijedi $(a+b)^2 = 5ab$. 1 bod

Uvrštavanjem imamo $5ab = 5^2$, odnosno $ab = 5$. 1 bod

Svođenjem na zajednički nazivnik i zbrajanjem imamo $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab}$.

Uvrštavanjem prethodno dobivenih vrijednosti slijedi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{5}{5} = 1$. 1 bod

Napomena: Jednakost $a + b = 5$ može se dobiti na više načina. Primjerice:

Množenjem prve jednakosti s a i s b imamo

$$\frac{a^2}{b} + b = 3a \qquad \text{i} \qquad a + \frac{b^2}{a} = 3b.$$

Zbrajanjem slijedi $\dfrac{a^2}{b} + b + a + \dfrac{b^2}{a} = 3(a+b)$.

Uvrštavanjem druge jednadžbe imamo $a + b + 10 = 3(a+b)$ odnosno $a + b = 5$.

Zadatak A-1.3.

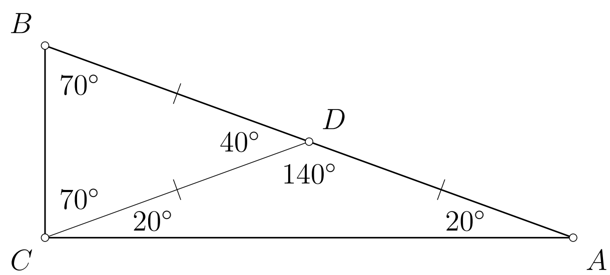
Neka je ABC trokut u kojem je $\sphericalangle CAB = 20°$ i neka je D polovište stranice $\overline{AB}$.
Ako je $\sphericalangle CDB = 40°$, odredi $\sphericalangle ABC$.

Rješenje.

Budući da je $\sphericalangle BDC = 40°$, slijedi da je $\sphericalangle CDA = 140°$ i

$$\sphericalangle ACD = 180° - \sphericalangle DAC - \sphericalangle CDA = 20°.$$ 2 boda

Dakle, trokut ADC je jednakokračan, pa vrijedi $|CD| = |AD| = |BD|$. 2 boda



Konačno, ovo znači da je trokut BDC jednakokračan, pa vrijedi

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle DCB = \frac{180° - 40°}{2} = 70°.$$ 2 boda

Zadatak A-1.4.

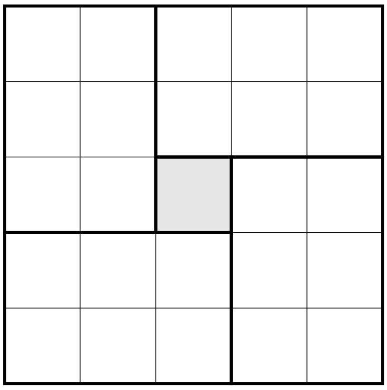
Za kvadratnu ploču čija su polja obojena crnom ili bijelom bojom kažemo da je *lijepa* ako se njezin izgled ne mijenja rotacijom za $90°$.

Koliko ima različitih lijepih ploča dimenzija 5×5?

Prvo rješenje.

Središnje polje ploče se pri rotaciji ne mijenja. Njega možemo proizvoljno obojiti. 1 bod

Uočimo da rotacijom ploče četiri puta u istom smjeru, proizvoljno polje prelazi u najviše tri različita polja te na kraju opet dolazimo do početnog polja. Iz uvjeta zadatka slijedi da ta četiri polja moraju biti iste boje (npr. sva polja u kutovima ploče moraju biti iste boje). 1 bod



Ostala 24 polja možemo podijeliti na četiri pravokutnika dimenzija 2×3 kao na slici: pri svakoj rotaciji se ta četiri pravokutnika ciklički preslikavaju jedan u drugog. Polja u jednom od tih pravokutnika možemo obojiti po volji, a ostali pravokutnici su onda jednoznačno određeni. 2 boda

Dakle, na cijeloj ploči možemo 7 polja obojiti po volji i za svako od tih polja imamo dvije mogućnosti. Zato ima 2^7 različitih bojenja, odnosno različitih lijepih ploča. 2 boda

Drugo rješenje.

Pridružimo poljima koordinate pripadnog retka i stupca, tako da je polje u gornjem lijevom kutu označeno $(1,1)$, polje desno od njega $(1,2)$ i tako dalje do polja u donjem desnom kutu koje je označeno $(5,5)$.

Reći ćemo da polje (a,b) *prelazi* u polje (k,l) ako rotacijom ploče za $90°$ u nekom smjeru koordinate polja (a,b) postaju (k,l).

Uočimo da polje $(3,3)$ ostaje na istom mjestu neovisno o rotacijama. 1 bod

Za sva ostala polja vrijedi: rotacijom ploče četiri puta u istom smjeru, proizvoljno polje (a,b) prelazi u tri različita polja te na kraju opet postaje polje (a,b). Iz uvjeta zadatka slijedi da sva polja u koja (a,b) prelazi moraju biti iste boje. 1 bod

Primjerice, polja $(1,1)$, $(1,5)$, $(5,1)$ i $(5,5)$ moraju biti iste boje.

Nadalje, polja $(1,2)$, $(2,5)$, $(5,4)$ i $(4,1)$ moraju biti iste boje itd.

Prema tome, sva polja osim $(3,3)$ možemo razvrstati u 6 četveročlanih skupina tako da polja unutar iste skupine moraju biti jednako obojena, pri čemu boja jedne skupine ne utječe na preostale. Također možemo reći da polje $(3,3)$ pripada svojoj, jednočlanoj skupini. 2 boda

Polja možemo označiti brojevima tako da polja koja pripadaju istoj skupini budu označena istim brojem, kao na slici:

1	2	3	4	1
4	5	6	5	2
3	6	7	6	3
2	5	6	5	4
1	4	3	2	1

Budući da ima 7 različitih skupina te da je potrebno odrediti koje boje je pojedina skupina, ukupno ima 2^7 različitih bojenja, odnosno različitih lijepih ploča. 2 boda

Zadatak A-1.5.

Odredi sve parove (m,n) cijelih brojeva za koje vrijedi $mn+5m+2n=121$.

Rješenje.

Sređivanjem imamo:

$$\begin{aligned} mn+5m+2n &= 121, \\ m(n+5)+2(n+5)-10 &= 121, \\ (m+2)(n+5) &= 131. \end{aligned}$$

2 boda

Uočimo da je 131 prost broj. 1 bod

Prema tome, mora vrijediti $m+2 \in \{\pm 1, \pm 131\}$ i $n+5=\dfrac{131}{m+2}$. 1 bod

Raspisivanjem svih mogućnosti dobivamo:

- Za $m+2=1$ slijedi $n+5=131$, pa imamo $m=-1$, $n=126$.
- Za $m+2=-1$ slijedi $n+5=-131$, pa imamo $m=-3$, $n=-136$.
- Za $m+2=131$ slijedi $n+5=1$, pa imamo $m=129$, $n=-4$.
- Za $m+2=-131$ slijedi $n+5=-1$, pa imamo $m=-133$, $n=-6$. 2 boda

Prema tome, rješenja su

$$(m,n) \in \{(-1,126),(-3,-136),(129,-4),(-133,-6)\}.$$

Zadatak A-1.6.

Borna želi svaki od brojeva $2, 3, \ldots, 32$ obojiti jednom od k boja ($k \in \mathbb{N}$) tako da nijedan broj ne bude višekratnik nekog drugog broja iste boje. Odredi najmanji prirodni broj k za koji Borna može to postići.

Rješenje.

Uočimo da brojevi $2, 4, 8, 16$ i 32 prema uvjetu zadatka moraju biti obojeni različitim bojama. 4 boda

Prema tome, potrebno je barem 5 boja. 1 bod

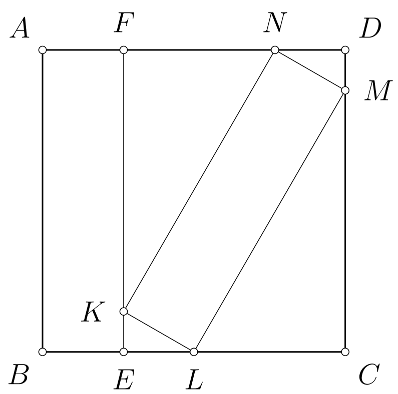
Preostaje dokazati da je $k = 5$ dovoljno boja. Jedno moguće bojenje je:

- Boja 1: brojevi $2, 3$
- Boja 2: brojevi $4, 5, 6, 7$
- Boja 3: brojevi $8, 9, \ldots, 15$
- Boja 4: brojevi $16, 17, \ldots, 31$
- Boja 5: broj 32. 5 bodova

Napomena: Moguća su i razna druga bojenja brojeva u pet boja, a potrebno je ili eksplicitno navesti boju za svaki broj kao u primjeru ili opisati bojenje riječima. Na primjer, u boju k možemo obojiti sve brojeve koji imaju točno k (ne nužno različitih) prostih faktora (broj 12 bismo obojili u boju 3).

Zadatak A-1.7.

Na slici je kvadrat $ABCD$ stranice duljine 1. Ako su $ABEF$ i $KLMN$ sukladni pravokutnici, odredi duljinu $|BE|$.



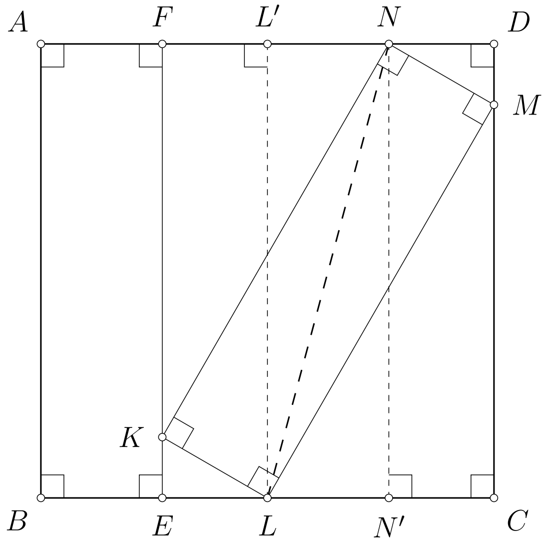
Rješenje.

Trokuti KEL i MDN imaju iste kutove i sukladne hipotenuze, pa je $|DN| = |EL|$. 1 bod

Neka su N' i L' redom nožišta okomica iz točke N na stranicu $\overline{BC}$ i iz točke L na stranicu $\overline{AD}$. 1 bod

Pravokutnici $LN'NL'$ i $KLMN$ imaju zajedničku dijagonalu, pa su sukladni. 2 boda

Iz toga slijedi da je $|LN'| = |KL| = |BE|$. 1 bod



Sad zaključujemo da je $|BL| = |BE| + |EL| = |LN'| + |ND| = |LN'| + |N'C| = |LC|$. Dakle, L je polovište stranice $\overline{BC}$, tj. $|LC| = \frac{1}{2}$. 1 bod

Pravokutni trokut MLC ima hipotenuzu duljine 1 i jednu katetu duljine $\frac{1}{2}$, pa je $\sphericalangle CLM = 60°$ i $|CM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2 boda

Također vrijedi $\sphericalangle DMN = 60°$, pa je

$$|BE| = |MN| = 2|DM| = 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - \sqrt{3}.$$ 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z^2 = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\bar{z}}$.

Prvo rješenje.

Neka su x i y realni i imaginarni dio broja z, odnosno $z = x + iy$. Jednadžbu iz zadatka tada možemo zapisati kao

$$x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{1}{x+iy} + \frac{1}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}.$$ 2 boda

Očito je desna strana realni broj, stoga i lijeva strana mora imati imaginarni dio jednak nuli. Odavde slijedi $2xy = 0$, tj. $x = 0$ ili $y = 0$. 2 boda

Ako uvrstimo $x = 0$ u gornji izraz, jednadžba postaje $-y^2 = 0$, pa je $z = 0 + 0i = 0$, a za taj z početna jednadžba nema smisla. 1 bod

Ako je $y = 0$, jednadžba se svodi na $x^2 = \frac{2}{x}$, odnosno $x^3 = 2$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = \sqrt[3]{2}$. 1 bod

Rješenje početne jednadžbe je $z = x + iy = \sqrt[3]{2}$.

Drugo rješenje.

Izraz s desne strane zadane jednadžbe ne mijenja se konjugiranjem, stoga zaključujemo da se radi o realnom broju. 2 boda

Zbog toga je z^2 realni broj, odakle slijedi $z = x \in \mathbb{R}$ ili $z = yi$ za neki $y \in \mathbb{R}$. 2 boda

Uvrštavanjem $z = x$ u početnu jednadžbu dolazimo do jednadžbe $x^2 = \frac{2}{x}$, odnosno $x^3 = 2$, čije je jedino realno rješenje $\sqrt[3]{2}$. 1 bod

Uvrštavanjem $z = yi$ u početnu jednadžbu dobivamo $-y^2 = 0$, odakle slijedi $y = 0$. Odavde bi slijedilo $z = yi = 0$, no to nije moguće. 1 bod

Zaključujemo da je jedino rješenje početne jednadžbe $z = \sqrt[3]{2}$.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve parove (p, q) prostih brojeva za koje kvadratna jednadžba $x^2 + px + q = 0$ ima dva različita rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje.

Označimo rješenja zadane kvadratne jednadžbe s x_1 i x_2. Vièteove formule daju jednadžbe

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 x_2 = q. \qquad \text{2 boda}$$

Kako su x_1 i x_2 cijeli, a q prost, mora biti $x_1 \in \{\pm 1, \pm q\}$, $x_2 = \dfrac{q}{x_1}$. 1 bod

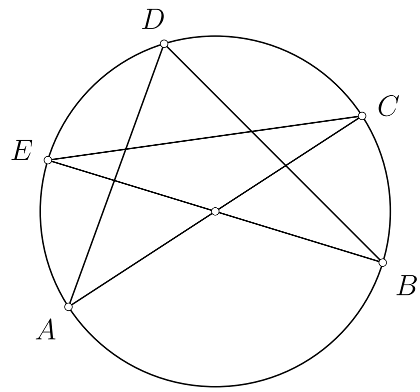
U slučajevima s pozitivnim predznacima dobivamo $x_1 + x_2 = q + 1$, odnosno $-p = q + 1$, a takav par prostih brojeva ne postoji ($q + 1$ je pozitivan, a $-p$ negativan). 1 bod

U slučajevima s negativnim predznacima dobivamo $x_1 + x_2 = -q - 1$, odnosno $p = q + 1$. Odavde vidimo da su p i q različite parnosti, tj. jedan od njih mora biti paran. Zaključujemo da je jedina mogućnost $q = 2$ i $p = 3$. 1 bod

Rješavanjem kvadratne jednadžbe $x^2 + 3x + 2 = 0$ zaista dobivamo cjelobrojna rješenja $x_1 = -1$, $x_2 = -2$. 1 bod

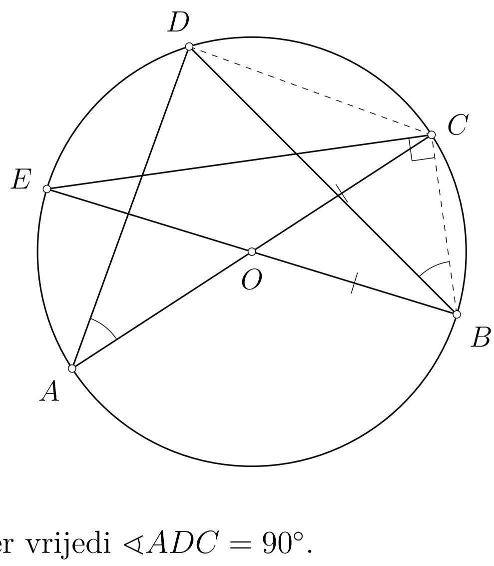
Zadatak A-2.3.

Na kružnici je dano pet točaka kao na slici. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u središtu kružnice. Ako je $\sphericalangle DAC = 37^\circ$ i $\sphericalangle EBD = 28^\circ$, odredi kut $\sphericalangle ACE$.



Prvo rješenje.

Uočimo da je $\sphericalangle ECD = \sphericalangle EBD = 28^\circ$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{DE}$. 2 boda



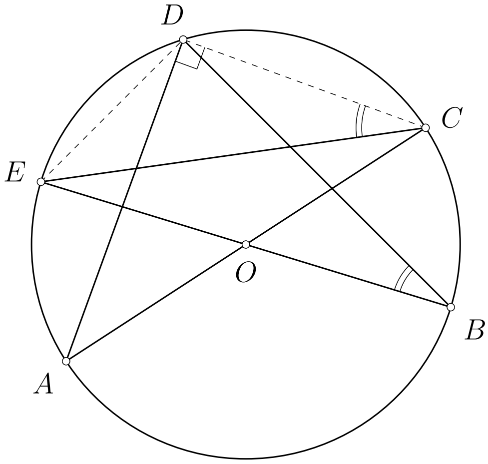
Budući da je $\overline{AC}$ promjer vrijedi $\sphericalangle ADC = 90^\circ$. 1 bod

Sada iz trokuta ACD zaključujemo da je

$$\sphericalangle ECA = 180^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle CAD - \sphericalangle DCE = 90^\circ - 37^\circ - 28^\circ = 25^\circ.$$ 3 boda

Drugo rješenje.

Vrijedi $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = 37^\circ$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{CD}$. 2 boda



Kut $\sphericalangle BCE$ je obodni kut nad promjerom kružnice, stoga je $\sphericalangle BCE = 90^\circ$. 1 bod

Označimo s O središte kružnice, tj. sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$. Trokut BCO je jednakokračan, stoga vrijedi

$$\sphericalangle BCO = \sphericalangle CBO = \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBE = 37^\circ + 28^\circ = 65^\circ.$$ 2 boda

Konačno, slijedi $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCE - \sphericalangle BCO = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$. 1 bod

Zadatak A-2.4.

Nađi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$xy^3 = -135, \qquad (x+y)y = -6.$$

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $a = xy, b = y^2$. 2 boda

Tada jednakosti postaju $ab = -135, a + b = -6$. Prema Vièteovim formulama, a i b zadovoljavaju kvadratnu jednadžbu $t^2 + 6t - 135 = 0$. 1 bod

Rješavanjem ove jednadžbe dolazimo do rješenja $t = -15$ i $t = 9$. 1 bod

Imamo dvije mogućnosti: $y^2 = 9, xy = -15$ ili $y^2 = -15, xy = 9$. Drugu mogućnost odbacujemo jer kvadrat realnog broja ne može biti negativan. 1 bod

Zato vrijedi $y^2 = 9$, dakle $y = 3$ ili $y = -3$. Sada iz $xy = -15$ dobivamo dva rješenja, $(x, y) = (-5, 3)$ i $(x, y) = (5, -3)$. 1 bod

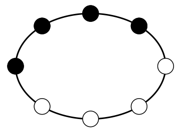
Zadatak A-2.5.

Koliko ima različitih narukvica koje se sastoje od četiri crne i četiri bijele kuglice poredane ukrug? Dvije narukvice smatramo različitima ako se ne mogu okrenuti tako da poredci kuglica na njima budu isti.

Rješenje.

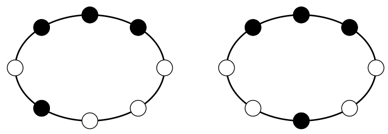
Promatrajmo koliko je dug najdulji niz koji se sastoji samo od crnih kuglica. 1 bod

Ako je duljine 4, tada su preostale četiri kuglice očito bijele i to je jedina mogućnost u ovom slučaju.



1 bod

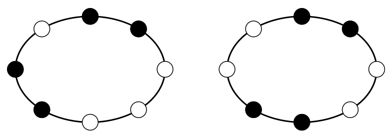
Ako je duljine 3, onda su te tri crne kuglice sigurno okružene dvjema bijelima, inače bi niz bio duljine 4. Treba postaviti još jednu crnu kuglicu na neko od tri preostala mjesta. Imamo dvije različite mogućnosti, kao na slici:



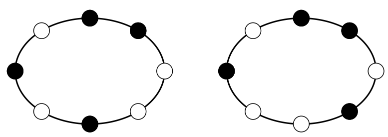
1 bod

Ako je duljine 2, onda preostale dvije crne kuglice mogu i ne moraju biti susjedne. 1 bod

Ako jesu, imamo dvije različite mogućnosti, kao na slici:

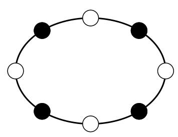


Ako nisu susjedne, imamo dvije mogućnosti, kao na slici:



1 bod

Ako je nadulji opisani niz duljine 1, onda imamo samo jednu narukvicu i to onu gdje se crne i bijele kuglice pojavljuju naizmjenično.



1 bod

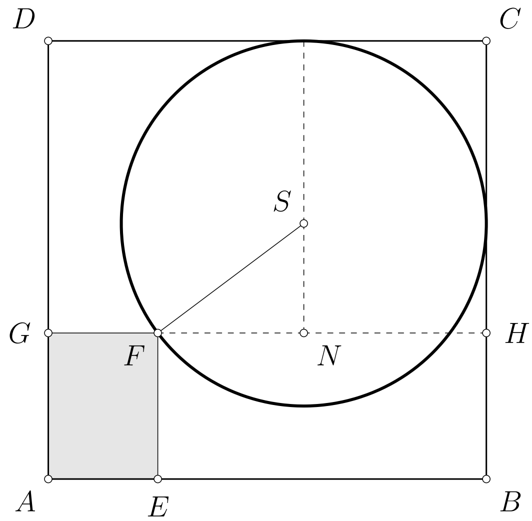
Dakle, ukupno ima osam različitih narukvica.

Zadatak A-2.6.

U kupaonici dimenzija $6\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m}$ jedan kut zauzima pravokutna kada dimenzija $2\,\mathrm{m} \times 1.5\,\mathrm{m}$. Koliki je polumjer najvećeg kružnog tepiha koji se može raširiti na podu kupaonice?

Rješenje.

Označimo tlocrt kupaonice kao na slici.



Promotrimo tepih (krug) koji se može smjestiti na pod kupaonice. Ako tepih ne dodiruje zid $\overline{BC}$, onda nema prepreka da ga pomaknemo prema tom zidu. Analogno, ako ne dodiruje zid $\overline{CD}$, onda ga možemo pomaknuti tako da ga dodiruje. Drugim riječima, ako se tepih određenog polumjera može smjestiti u kupaonicu, onda se može smjestiti tako da dodiruje dva zida nasuprot kade. 1 bod

To znači da tepih najvećeg polumjera dodiruje zidove $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Zato se središte tepiha nalazi na dijagonali $\overline{AC}$. 1 bod

Naravno, tepih najvećeg polumjera dodiruje i kadu u točki F, jer u protivnom možemo povećati tepih.

Neka je N nožište okomice iz točke S na pravac FG. Uočimo trokut FNS i primijenimo na njega Pitagorin poučak: $|FN|^2 + |SN|^2 = |FS|^2$. 1 bod

Označimo polumjer kružnice/tepiha s r. Tada je $|FN| = |FH| - |NH| = 4.5 - r$. Analogno je $|SN| = 4 - r$. 2 boda

Dakle, vrijedi

$$(4.5 - r)^2 + (4 - r)^2 = r^2.$$ 2 boda

Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $r^2 - 17r + 36.25 = 0$, čija su rješenja $r = 2.5$ i $r = 14.5$. 2 boda

Kako očito mora biti $r \leqslant 6$, zaključujemo da je polumjer tepiha $2.5\,\mathrm{m}$. 1 bod

Zadatak A-2.7.

Između gradova prometuju jednosmjerne avionske linije. Za svaka dva grada A i B postoji točno jedna linija: ili iz A prema B, ili iz B prema A. Dokaži da postoji grad iz kojeg je moguće doći do bilo kojeg drugog grada s najviše jednim presjedanjem.

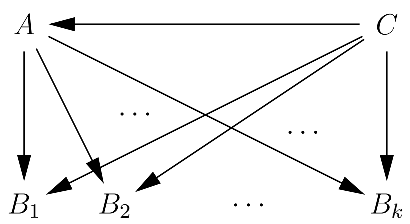
Prvo rješenje.

Neka je A neki grad iz kojeg polazi najveći broj linija. Tvrdimo da je A grad s traženim svojstvom. 3 boda

Neka su $B_1, \ldots, B_k$ gradovi u koje dolaze linije iz A. Neka je C bilo koji drugi grad (različit od A, B_1, …, B_k). Tada postoji linija iz C u A. 1 bod

Ako postoji linija iz nekog grada B_i u C, onda iz A u C možemo doći jednim presjedanjem. 2 boda

Ako bi sve linije između C i gradova B_1, …, B_k polazile iz C, onda bi iz C polazilo barem $k+1$ linija, dakle više nego iz A, što je suprotno načinu kako smo odabrali A. 4 boda



Dakle, iz grada A u svaki drugi grad možemo doći direktno ili jednim presjedanjem.

Drugo rješenje.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju gradova. 1 bod

Za bazu indukcije možemo uzeti situaciju s dva grada A i B među kojima postoji linija iz A u B. Tada je A traženi grad. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi kad imamo n gradova. Promotrimo situaciju s $n+1$ gradova i među njima odaberimo bilo koji grad C. Prema pretpostavci, među svim gradovima bez grada C postoji grad A iz kojeg možemo doći do svih drugih gradova različitih od C direktno ili jednim presjedanjem. Kao u prethodnom rješenju možemo gradove do kojih se može doći direktno iz A označiti B_1, …, B_k. 1 bod

Ako postoji linija iz A ili iz bilo kojeg grada B_i u C, onda iz A možemo doći i u C s najviše jednim presjedanjem, pa je dokaz gotov i traženi grad je grad A. 2 boda

Ako iz C polaze linije prema A i prema svima gradovima B_1, …, B_k, onda je traženi grad C. Zaista, za bilo koji grad D koji je različit od A, C, B_1, …, B_k, postoji linija iz nekog grada B_i u D jer se iz A može doći u D s presjedanjem, a to onda pokazuje da se i iz grada C može preko B_i doći u D. 5 bodova

Time smo proveli korak indukcije, pa prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za bilo koji broj gradova.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Izračunaj

$$\frac{\operatorname{tg} 192^\circ + \operatorname{tg} 48^\circ}{1 + \operatorname{tg} 168^\circ \cdot \operatorname{tg} 408^\circ}.$$

Rješenje.

Budući da je

$$\operatorname{tg} 192^\circ = \operatorname{tg}(12^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg} 12^\circ, \qquad \text{1 bod}$$

$$\operatorname{tg} 408^\circ = \operatorname{tg}(48^\circ + 360^\circ) = \operatorname{tg} 48^\circ, \qquad \text{1 bod}$$

$$\operatorname{tg} 168^\circ = \operatorname{tg}(-12^\circ + 180^\circ) = -\operatorname{tg} 12^\circ, \qquad \text{1 bod}$$

zadani izraz je jednak

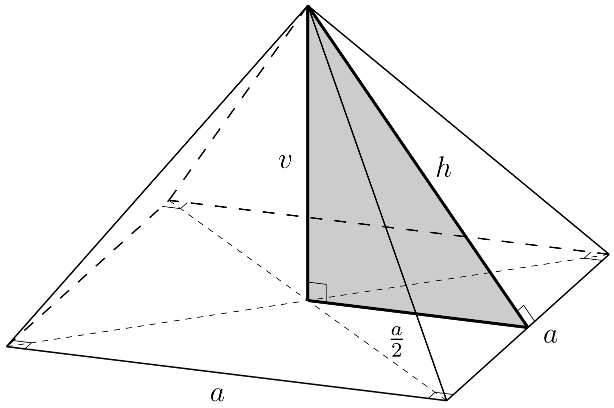
$$\frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 48^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \operatorname{tg} 48^\circ} = \operatorname{tg}(12^\circ + 48^\circ) \qquad \text{2 boda}$$

$$= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak A-3.2.

Baza pravilne uspravne četverostrane piramide je kvadrat stranice duljine 12, a duljina visine je 8. Koliko je oplošje te piramide?

Rješenje.



Ako je a stranica baze, v visina piramide i h visina pobočke piramide, onda je prema Pitagorinom poučku

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 = h^2.$$ 3 boda

Dakle, $h = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. 1 bod

Oplošje piramide je $4 \cdot \dfrac{12 \cdot 10}{2} + 12^2 = 384$. 2 boda

Zadatak A-3.3.

Odredi posljednjih 2019 znamenaka broja $2^{2019} \cdot 5^{2018} \cdot 9^{2017}$.

Rješenje.

Budući da je

$$2^{2019} \cdot 5^{2018} \cdot 9^{2017} = 2 \cdot 9^{2017} \cdot (10)^{2018},$$

a $2 \cdot 9^{2017}$ nije djeljiv s 10, vidimo da će na kraju dekadskog zapisa zadanog broja biti 2018 nula. 2 boda

Zadnja znamenka različita od nule jednaka je zadnjoj znamenci broja $2 \cdot 9^{2017}$. 1 bod

Kako je

$$9^{2017} + 1 = (9+1)(9^{2016} - 9^{2015} + \cdots + 1),$$

broj $9^{2017} + 1$ je djeljiv s 10. 2 boda

Dakle, zadnja znamenka broja 9^{2017} je 9, pa je zadnja znamenka $2 \cdot 9^{2017}$ jednaka 8. 1 bod

Napomena: Zadnja znamenka broja 9^{2017} može se odrediti na temelju činjenice da se ostaci potencija 9^n pri dijeljenju s 10 periodično ponavljanju: $1, 9, 1, 9, \ldots$. Tu činjenicu učenici ne trebaju dokazivati.

Zadatak A-3.4.

Neka je a pozitivni realni broj za koji vrijedi $\log_{4a} 40\sqrt{3} = \log_{3a} 45$. Dokaži da je a^3 cijeli broj i odredi ga.

Rješenje.

Neka je $x = \log_{4a} 40\sqrt{3} = \log_{3a} 45$. Tada je $(4a)^x = 40\sqrt{3}$ i $(3a)^x = 45$. 1 bod

Dijeljenjem ovih izraza dobivamo

$$\frac{(4a)^x}{(3a)^x} = \frac{40\sqrt{3}}{45},$$ 1 bod

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8\sqrt{3}}{9},$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$ 2 boda

Dakle, $2x = 3$, tj. $x = \dfrac{3}{2}$. 1 bod

Imamo $(3a)^{\frac{3}{2}} = 45$, pa je $a^3 = \dfrac{45^2}{3^3} = 75$. 1 bod

Napomena: Prelaskom na logaritme s bazom 10 i primjenom svojstava logaritama dobivamo

$$\log a = \frac{\log 4 \cdot \log 45 - \log 3 \cdot \log 40\sqrt{3}}{\log 40\sqrt{3} - \log 45}.$$

Za ovaj izraz učenik treba dobiti 3 boda, a samo prelazak na logaritme s bazom 10 nosi 1 bod (od ta tri). Dokaz da je $10^{3\log a} = 75$ nosi preostala 3 boda.

Bodovi prema ovom načinu rješavanja se ne mogu zbrajati s bodovima dodijeljenim prema gornjem rješenju.

Zadatak A-3.5.

Umnožak određenog broja međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od 1000 nije djeljiv brojem 250. Koliko je najviše brojeva pomnoženo?

Prvo rješenje.

Rastav broja 250 na proste faktore glasi $250 = 2 \cdot 5^3$. 1 bod

Ako uzmemo sve brojeve koji nisu djeljivi s 5 i neka dva broja koja su djeljiva s 5, ali ne i s 25 (npr. 5 i 10), dobit ćemo umnožak koji nije djeljiv s 250. 2 boda

Dakle, možemo uzeti barem 802 brojeva. 1 bod

Ako uzmemo barem 803 brojeva, onda među njima ima barem 3 broja koja su djeljiva s 5 i barem jedan koji je paran, pa dobivamo umnožak koji je djeljiv s 250. 2 boda

Drugo rješenje.

Rastav broja 250 na proste faktore glasi $250 = 2 \cdot 5^3$. 1 bod

Da umnožak ne bi bio djeljiv s 250 možemo uzeti ili sve neparne brojeve ili možemo uzeti sve brojeve koji nisu djeljivi s 5 te još najviše dva broja koja jesu djeljiva s 5. 2 boda

U prvom slučaju bismo uzeli najviše 500 brojeva, a u drugom slučaju možemo uzeti najviše 802 broja: ima 800 brojeva koji nisu djeljivi s 5 i možemo uzeti još npr. brojeve 5 i 10. 3 boda

Dakle, najveći mogući broj pomnoženih brojeva je 802.

Zadatak A-3.6.

U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BCA$. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D tako da je $|AB| = |CD|$. Odredi $\sphericalangle CAB$.

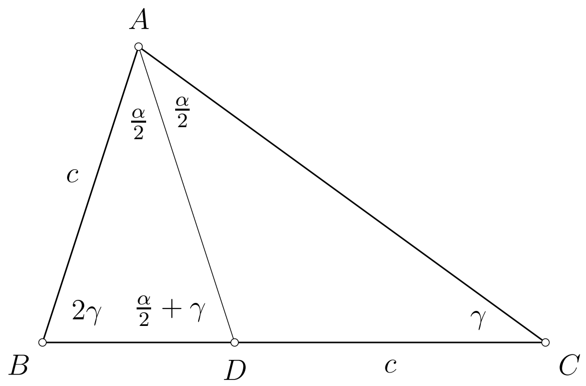
Prvo rješenje.

Neka je $c = |AB| = |CD|$, te $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$.

Tada je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = \frac{\alpha}{2}$ te $\sphericalangle BDA = \frac{\alpha}{2} + \gamma$. 1 bod

Primjenom poučka o sinusima na trokute ADC i ABD dobivamo

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|AD|}{c}, \qquad \frac{\sin 2\gamma}{\sin(\frac{\alpha}{2}+\gamma)} = \frac{|AD|}{c}.$$ 2 boda



Dalje imamo

$$\sin\gamma\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)=\sin 2\gamma\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

$$\sin\gamma\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)=2\sin\gamma\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)=2\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\gamma+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\gamma=2\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{2 boda}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\gamma=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Budući da su α i γ kutovi trokuta, jedina mogućnost je $\gamma=\frac{\alpha}{2}$. 1 bod

Vrijedi $\alpha+3\gamma=180^\circ$, pa je $\alpha=\frac{2}{5}\cdot 180^\circ=72^\circ$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je E sjecište simetrale kuta $\sphericalangle ABC$ i stranice $\overline{AC}$. 1 bod

Zbog uvjeta $\beta=2\gamma$, trokuti ABC i AEB su slični. Zato je $|AB|:|AC|=|AE|:|AB|$. 2 boda

Prema poučku o simetrali kuta vrijedi $|AE|=\dfrac{bc}{a+c}$. 1 bod

Slijedi $c:b=\dfrac{bc}{a+c}:c$, odnosno $b^2=ac+c^2$. 1 bod

Prema poučku o simetrali kuta vrijedi $|DC|=\dfrac{ab}{b+c}$, pa zbog uvjeta $|CD|=|AB|=c$ vrijedi

$$c^2=ab-bc. \qquad \text{1 bod}$$

Zbrajanjem ove jednakosti s $b^2=ac+c^2$ dobivamo

$$b^2+c^2=ac+c^2+ab-bc, \qquad \text{2 boda}$$

$$b^2+bc=ac+ab,$$

$$b(b+c)=a(b+c).$$

Slijedi $a=b$, te $\alpha=\beta=2\gamma$. 1 bod

Iz $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ dobivamo da su kutovi $\alpha=72^\circ$, $\beta=72^\circ$, $\gamma=36^\circ$. 1 bod

Zadatak A-3.7.

Marko stavlja novčiće na neka polja 3×3 ploče, a zatim zapisuje koliko je novčića u svakom pojedinom retku i stupcu. Koliko najmanje novčića Marko mora staviti na ploču ako želi da tih šest brojeva bude međusobno različito?

Rješenje.

Neka je Z zbroj svih šest brojeva (novčića po redcima i stupcima). 1 bod

Ako je svih šest brojeva različito, zbroj tih brojeva Z je barem $0+1+2+3+4+5=15$. 3 boda

Uočimo da je Z paran broj jer je jednak dvostrukom broju novčića na ploči. 2 boda

Zbog parnosti je $Z \geqslant 16$, tj. Marko mora iskoristiti barem osam novčića. 1 bod

Primjerom pokazujemo da Marko može uspjeti s točno osam novčića:

0	0	0
0	0	2
1	3	2

3 boda

U ovom primjeru brojevi po redcima su 0, 2 i 6, a zbrojevi po stupcima 1, 3 i 4.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Umnožak drugog i četvrtog člana aritmetičkog niza s razlikom d iznosi $-d^2$. Odredi umnožak trećeg i petog člana tog niza.

Rješenje.

Označimo prvih pet članova zadanog aritmetičkog niza a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Budući da je razlika d vrijedi $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d$. 1 bod

Prema uvjetu zadatka, umnožak drugog i četvrtog broja s jedne strane je jednak $-d^2$, a s druge

$$a_2 \cdot a_4 = (a_1 + d)(a_1 + 3d) = a_1^2 + 4da_1 + 3d^2.$$ 1 bod

Izjednačavajući dobivamo:

$$\begin{aligned} a_1^2 + 4da_1 + 3d^2 &= -d^2, && \text{1 bod} \\ a_1^2 + 4da_1 + 4d^2 &= 0, \\ (a_1 + 2d)^2 &= 0, \\ a_1 + 2d &= 0. && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Uvrštavajući dobiveno u umnožak $a_3 \cdot a_5$ dobivamo

$$a_3 \cdot a_5 = (a_1 + 2d)(a_1 + 4d) = 0$$ 1 bod

jer je prva zagrada jednaka nuli.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da se neka tri uzastopna koeficijenta u razvoju $(1 + x)^n$ odnose kao $3 : 4 : 5$.

Rješenje.

Tri uzastopna koeficijenta u razvoju $(1+x)^n$ su oblika $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, pri čemu je k prirodni broj manji od n. 1 bod

Budući da je

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)! \cdot (n-k+1)},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)! \cdot k},$$ 1 bod

nakon kraćenja zajedničkih faktora dobivamo $\frac{3}{4} = \frac{k}{n-k+1}$. 1 bod

Analogno dobivamo $\frac{4}{5} = \frac{k+1}{n-k}$. 1 bod

Sređivanjem dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 3n - 7k &= -3 \\ 4n - 9k &= 5, \end{aligned}$$

čije jedino rješenje glasi $n = 62$, $k = 27$. 2 boda

Dakle, jedini prirodni broj iz teksta zadatka je $n = 62$.

Zadatak A-4.3.

Dokaži da je za svaki prirodni broj n, broj

$$\underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n \text{ znamenaka}} - 3^n + 1$$

djeljiv brojem 7.

Prvo rješenje.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Baza indukcije vrijedi jer je broj $2 - 3 + 1 = 0$ djeljiv sa 7. 1 bod

Pretpostavimo sada da za neki prirodni broj n tvrdnja vrijedi, tj. da je broj $A_n = \underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n} - 3^n + 1$ djeljiv sa 7. Vrijedi:

$$\begin{aligned} A_{n+1} = \underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n+1} - 3^{n+1} + 1 &= 10 \cdot \underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n} + 2 - 3^{n+1} + 1 && \text{1 bod} \\ &= 10 \cdot (\underbrace{\overline{2\ldots2}}_{n} - 3^n + 1) + 10 \cdot 3^n - 10 + 2 - 3^{n+1} + 1 \\ &= 10 \cdot A_n + 10 \cdot 3^n - 3^{n+1} - 7 && \text{2 boda} \\ &= 10 \cdot A_n + 10 \cdot 3^n - 3 \cdot 3^n - 7 \\ &= 10 \cdot A_n + 7 \cdot (3^n - 1). && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Broj A_{n+1} smo prikazali kao zbroj dva broja djeljiva sa 7, pa je i on sam djeljiv sa 7. Time smo proveli korak indukcije, pa prema principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja zadatka. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Nakon što provjerimo bazu indukcije, pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n i dokazujemo za $n+1$: 1 bod

$$\begin{aligned} A_{n+1} = \underbrace{\overline{2\dots2}}_{n+1} - 3^{n+1} + 1 &= \underbrace{\overline{2\dots2}}_{n} + 2\cdot 10^n - 3^{n+1} + 1 && \text{1 bod} \\ &= \underbrace{\overline{2\dots2}}_{n} - 3^n + 1 + 2\cdot 10^n - 3^{n+1} + 3^n \\ &= A_n + 2\cdot 10^n - 3^{n+1} + 3^n && \text{2 boda} \\ &= A_n + 2\cdot 10^n - 2\cdot 3^n \\ &= A_n + 2\cdot(10^n - 3^n). \end{aligned}$$

Kako je

$$10^n - 3^n = (10-3)(10^{n-1} + 10^{n-2}\cdot 3 + \cdots + 10\cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}), \qquad \text{1 bod}$$

vidimo da je taj izraz djeljiv sa 7.

Po pretpostavci indukcije je i A_n djeljiv sa 7, pa je i

$$\underbrace{\overline{2\dots2}}_{n+1} - 3^{n+1} + 1$$

djeljiv sa 7 kao zbroj dva takva broja. Time je dokazan korak indukcije, pa prema principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja zadatka. 1 bod

Treće rješenje.

Koristeći činjenicu da brojevi 10 i 3 daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7, dobivamo niz jednakosti i kongruencija:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{2\dots2}}_{n} - 3^n + 1 &= 2\cdot(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) - 3^n + 1 && \text{1 bod} \\ &\equiv 2\cdot(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1) - 3^n + 1 \pmod 7. && \text{3 boda} \end{aligned}$$

Primijenimo li formulu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza, dobivamo

$$\underbrace{\overline{2\dots2}}_{n} - 3^n + 1 \equiv 2\cdot\frac{3^n - 1}{2} - 3^n + 1 = 0 \pmod 7. \qquad \text{2 boda}$$

Iz toga zaključujemo da je broj s lijeve strane jednakosti djeljiv sa 7, a to je i trebalo dokazati.

Zadatak A-4.4.

Odredi broj kompleksnih rješenja jednadžbe

$$z^{2019} = z + \bar{z}.$$

Rješenje.

Uvedimo trigonometrijski zapis kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, za $|z| \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Jednadžbu tada možemo zapisati na sljedeći način:

$$|z|^{2019}\left(\cos(2019\varphi) + i\sin(2019\varphi)\right) = 2|z|\cos\varphi.$$ 1 bod

Primijetimo da je $z = 0$ jedno rješenje. Neka je nadalje $z \neq 0$. 1 bod

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela lijeve i desne strane i dijeljenjem obje jednadžbe sa $|z|$ dobivamo

$$\begin{aligned} |z|^{2018}\cos(2019\varphi) &= 2\cos\varphi \\ \sin(2019\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe zaključujemo da je

$$\varphi = \frac{k\pi}{2019}, \quad k \in \{0, \ldots, 4037\}.$$ 1 bod

Za takve φ primijećujemo da je vrijednost izraza $\cos(2019\varphi)$ jednaka 1 kada je k paran, te -1 kada je k neparan. Kraće, možemo pisati $\cos(2019\varphi) = (-1)^k$.

Uvrštavajući to u gornju jednadžbu dobivamo

$$|z|^{2018}(-1)^k = 2\cos\frac{k\pi}{2019},$$

odnosno

$$|z|^{2018} = 2(-1)^k\cos\frac{k\pi}{2019}.$$ 1 bod

Ova jednadžba ima rješenje za $|z|$ (pa i za z) kad je desna strana pozitivna, tj. ako i samo ako je $k \in \{0, 2, 4, \ldots, 1008, 3030, 3032, \ldots, 4036\}$ ili $k \in \{1011, 1013, \ldots, 3027\}$. 1 bod

Brojeći ta rješenja, zajedno s rješenjem $z = 0$, vidimo da je ukupan broj rješenja jednak 2019. 1 bod

Zadatak A-4.5.

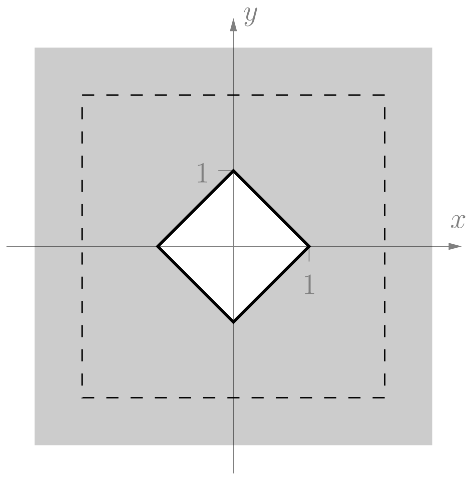
Kolika je vjerojatnost da za dva slučajno odabrana broja x, y iz skupa $[-2,2]$ vrijedi

$$|x|+|y| \geqslant 1 \qquad \text{i} \qquad ||x|-|y|| \leqslant 1?$$

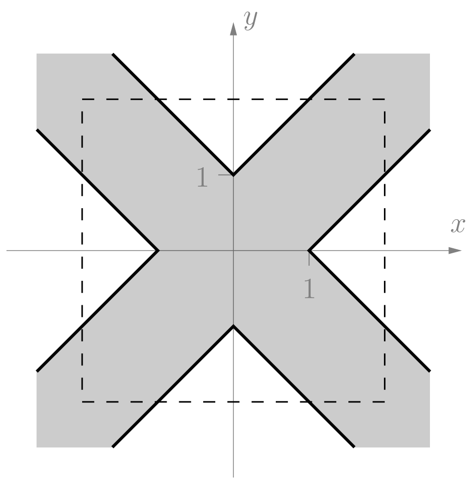
Prvo rješenje.

Označimo s $\Omega = \{(x,y) \in [-2,2]\times[-2,2] : |x|+|y| \geqslant 1,\ ||x|-|y|| \leqslant 1\}$. Vjerojatnost da se točka (x,y) nalazi u Ω jednaka je omjeru površine skupa Ω i površine skupa $[-2,2]\times[-2,2]$. Drugi skup je kvadrat stranice duljine 4. Kako bismo odredili površinu skupa Ω, nacrtat ćemo ga u ravnini, promatrajući nejednakost po nejednakost.

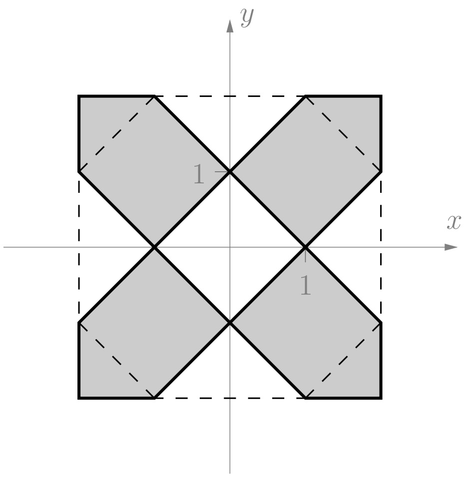
Promatrajući po kvadrantima dobivamo da nejednakost $|x|+|y| \geqslant 1$ zadovoljavaju točke koje leže u komplementu unutrašnjosti kvadrata s vrhovima u $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ i $(0,-1)$. 1 bod



Nejednakost $||x|-|y|| \leqslant 1$ ekvivalentna je s $-1 \leqslant |x|-|y| \leqslant 1$. Promatrajući zasebno za prvi i treći kvadrant, pa za drugi i četvrti kvadrant, dobivamo područje na slici. 1 bod



Uzimajući presjek dobivenih skupova i kvadrata $[-2,2]\times[-2,2]$, dobivamo osjenčani dio ravnine na sljedećoj slici. 2 boda



Površinu osjenčanog dijela (skupa Ω) izračunat ćemo kao četverostruku površinu osjenčanog dijela u jednom kvadrantu. U svakom kvadrantu osjenčan je jedan kvadrat stranice duljine $\sqrt{2}$ i jedan jednakokračan pravokutni trokut kateta duljine 1. Zato je površina skupa Ω jednaka

$$4 \cdot \left(\sqrt{2}^2 + \frac{1 \cdot 1}{2}\right) = 10.$$ 1 bod

Površina kvadrata $[-2,2] \times [-2,2]$ je jednaka 16, pa je tražena vjerojatnost $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. 1 bod

Napomena: Površinu skupa Ω moguće je izračunati na više načina, npr. kao zbroj površina osam trapeza dobivenih crtanjem dijagonala velikog kvadrata ili oduzimanjem površina neosjenčanih likova od površine velikog kvadrata.

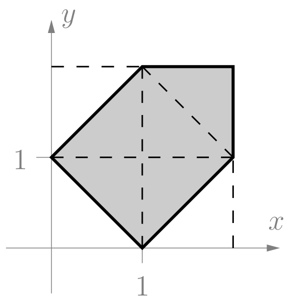
Drugo rješenje.

Neka je Ω kao u prvom rješenju.

Ako se točka (x, y) nalazi u skupu Ω, onda se u njemu nalaze i točke $(-x, y)$ i $(x, -y)$. Zato je skup Ω osnosimetričan u odnosu na x-os i y-os, pa je dovoljno odrediti omjer površine skupa Ω u prvom kvadrantu i površine kvadrata $[0,2] \times [0,2]$. 1 bod

Prva nejednakost u prvom kvadrantu postaje $x + y \geqslant 1$, a druga nejednakost postaje $-1 \leqslant x - y \leqslant 1$. 1 bod

Točke koje zadovoljavaju te uvjete unutar $[0,2] \times [0,2]$ čine osjenčani dio na slici:



2 boda

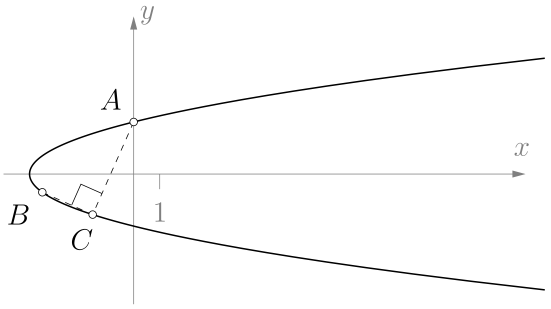
Uočimo da kvadrat $[0,2] \times [0,2]$ možemo podijeliti na osam sukladnih trokuta kao na slici, od kojih je pet osjenčano. Zato je tražena vjerojatnost jednaka $\frac{5}{8}$. 2 boda

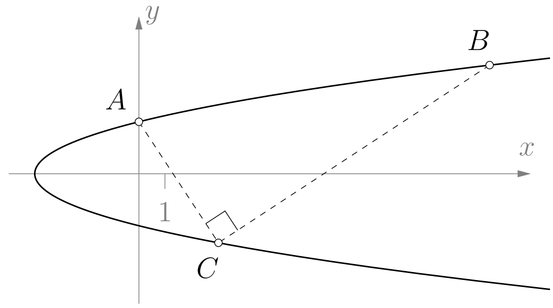
Zadatak A-4.6.

Dana je točka $A(0,2)$ na paraboli $y^2 = x+4$. Odredi sve točke B različite od A na danoj paraboli za koje postoji točka C, također na paraboli, takva da je kut $\sphericalangle ACB$ pravi.

Rješenje.

Neka je $B(b^2-4, b)$ i $C(c^2-4, c)$ za neke realne brojeve b i c. Primijetimo da je nemoguće da je $c = \pm 2$ ili $c = \pm b$ jer bi se u suprotnom neke dvije od točaka A, B i C poklapale, ili bi ležale na pravcu paralelnom s x-osi.





Koeficijenti pravaca AC i BC iznose redom

$$\frac{c-2}{c^2-4} = \frac{1}{c+2} \qquad \text{i} \qquad \frac{c-b}{c^2-b^2} = \frac{1}{c+b}.$$ 2 boda

Pravci AC i BC su međusobno okomiti, što znači da je

$$\frac{1}{c+2} \cdot \frac{1}{c+b} = -1,$$ 2 boda

ili drugačije zapisano

$$c^2 + bc + 2c + 2b + 1 = 0.$$ 1 bod

Želimo naći sve točke B na paraboli za koje postoji točka C na paraboli sa svojstvom da je kut $\sphericalangle ACB$ pravi, što je ekvivalentno tome da nađemo realne brojeve b za koje kvadratna jednadžba po c

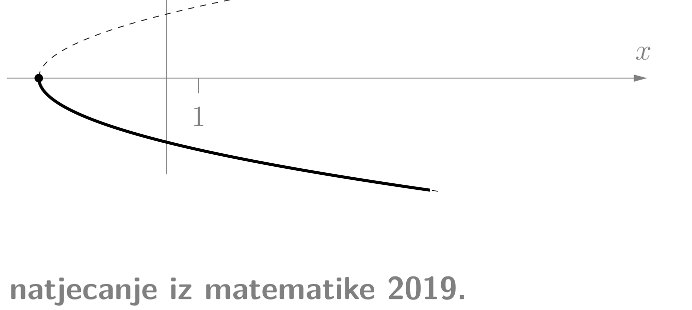
$$c^2 + (b+2)c + 2b + 1 = 0$$

ima realna rješenja. Za to je nužno i dovoljno da je diskriminanta te jednadžbe nenegativna, tj.

$$(b+2)^2 - 4(2b+1) \geqslant 0.$$ 3 boda

To zadovoljavaju brojevi b za koje je $b(b-4) \geqslant 0$, odnosno $b \leqslant 0$ ili $b \geqslant 4$. 1 bod

Tražene točke su sve točke oblika $B = (b^2-4, b)$, gdje je $b \in \langle -\infty, 0] \cup [4, +\infty\rangle$. 1 bod



Zadatak A-4.7.

Povlačenjem pravaca paralelnih sa svakom stranicom, jednakostranični trokut stranice duljine n podijeljen je na n^2 jednakostraničnih trokuta stranice duljine 1. Koliko najviše dužina duljine 1 na dobivenoj mreži možemo obojiti u crveno tako da nikoje tri crvene dužine ne tvore jednakostranični trokut?

Rješenje.

Dokažimo da je odgovor $n(n+1)$.

Neka u nastavku *segment* označava dužinu duljine 1.

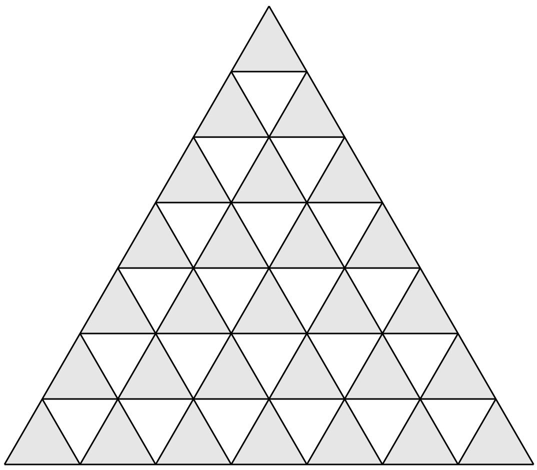
Sa svakom stranicom početnog trokuta paralelno je

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

segmenata. 2 boda

Ako obojimo svih $n(n+1)$ segmenata koji su paralelni jednoj od dvije stranice početnog trokuta, onda ne postoji jednakostranični trokut sa sve tri crvene stranice. 4 boda

Još je potrebno dokazati da ne možemo obojiti više od $n(n+1)$ segmenata, a da ne postoji jednakostranični trokut sa tri crvene stranice.



Osjenčajmo trokute kojima je vrh nasuprot stranice paralelne donjoj stranici početnog trokuta okrenut prema gore, kao na slici. Baze tih trokuta su segmenti paralelni s donjom stranicom trokuta, pa tih trokuta ima $\frac{1}{2}n(n+1)$. 2 boda

Nikoja dva od tih trokuta nemaju zajedničku stranicu. Kada bi više od $n(n+1)$ segmenata bilo obojeno u crveno, tada bi po Dirichletovom principu barem jedan od osjenčanih trokuta imao sve tri stranice obojene u crveno. Zato je $n(n+1)$ najveći broj segmenata koji može biti obojen u crveno. 2 boda