Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

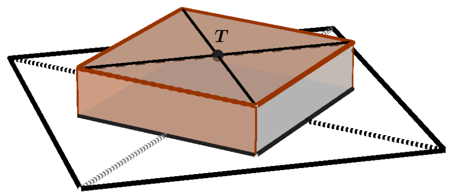
1. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

1. Ako za realne brojeve x i y vrijedi $x - y = 6$ i $x^2 + y^2 = 22$, koliko je $x^3 - y^3$?

2. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\dfrac{4n}{4n-2019}$ cijeli broj.

3. Mia želi umotati božićni poklon, kutiju oblika kvadratne prizme. Ima ukrasni papir kvadratnog oblika. Umatanje je moguće jedino ako kutiju smjesti tako da kvadratnu bazu kutije položi dijagonalno, kao na slici, pri čemu je središte baze u središtu kvadratnog papira. Četiri se vrha papira nakon umatanja poklope sa središtem T gornje baze, a rubovi papira se spoje na dijagonalama, bez preklapanja. Odredite površinu i dimenzije papira za umatanje, ako su dimenzije kutije $20\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$.



4. Dokažite da je broj $6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ djeljiv s 900 za sve prirodne brojeve n.

5. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su tri puta veći od kvadrata zbroja svojih znamenaka.

* * *

6. Točka P se nalazi unutar jednakostraničnog trokuta tako da je od njegovih stranica udaljena redom $3\,\text{cm}$, $4\,\text{cm}$ i $5\,\text{cm}$. Kroz točku P povučena je paralela sa stranicom trokuta koja je najbliža točki P. Izračunajte duljinu stranice zadanog trokuta i omjer u kojem povučena paralela dijeli površinu trokuta.

7. Aritmetička sredina niza brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jednaka je 100. Najveći od tih brojeva je troznamenkasti broj x_n. Ako njega zamijenimo s $4x_n$, aritmetička sredina novog niza brojeva jednaka je 200. Koliko najviše brojeva može biti u takvom nizu? Koju vrijednost u tom slučaju ima broj x_n?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

1. Ako se zbroje kvadrat i dvostruki kub nekog broja, dobije se trostruka četvrta potencija tog istog broja. Odredite sve realne brojeve za koje to vrijedi.

2. Koliko cijelih brojeva x zadovoljava nejednadžbu $x^4 - 2020x^2 + 2019 < 0$?

3. U internetskoj je trgovini paket fotokopirnog papira 9 kuna jeftiniji nego u knjižari. U prosincu je tajnica za 1440 kn kupila 8 paketa više u internetskoj trgovini nego što je u studenom za isti iznos kupila u knjižari. Kolika je cijena fotokopirnog papira u internetskoj trgovini?

4. Sva tri vrha trokuta ABC pripadaju paraboli s jednadžbom $y = x^2 + 125$ tako da vrh A leži na njezinoj osi simetrije, a stranica $\overline{BC}$ je paralelna s osi x. Ako površina trokuta ABC iznosi 125, odredite koordinate njegovih vrhova.

5. Duljina osnovice jednakokračnog trokuta ABC iznosi $|BC| = 30\,\text{cm}$, a duljina kraka $|AC| = 17\,\text{cm}$. U točki A povučena je okomica na pravac AC. Odredite omjer u kojem ova okomica dijeli osnovicu $\overline{BC}$.

* * *

6. Riješite jednadžbu

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + 4x - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = 112 - 4\sqrt{x}.$$

7. Odredite površinu skupa točaka kojega u kompleksnoj ravnini određuju rješenja nejednadžbi $\operatorname{Im} z \geqslant |\operatorname{Re} z - 1|$, $|z - 1| \leqslant 1$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

1. Ako je $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, izračunajte $\sin^6 x + \cos^6 x$.

2. Koliko rješenja ima jednadžba $\dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \dfrac{16}{\operatorname{tg} x}$ na intervalu $\langle 0, 2019\pi \rangle$?

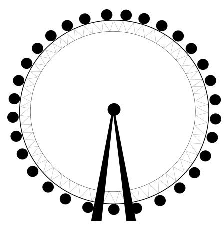
3. Kako bi pristupio određenoj web stranici Matko mora odabrati 4-znamenkasti broj - PIN. Nule na početku su dozvoljene, ali ipak postoje neki zahtjevi (zabrane) na PIN. Jedna se znamenka ne može ponavljati tri ili više puta u nizu. Primjerice 0006 ili 6666 nije dozvoljeni PIN, ali 0030 je dozvoljeni PIN. Zatim, par znamenaka se ne može ponoviti. Primjerice 1616 nije dozvoljeni PIN, ali 1661 ili 6611 je dozvoljeni PIN. Na koliko različitih načina Matko može odabrati PIN?

4. Pravilna uspravna četverostrana piramida kojoj bočni bridovi s ravninom baze zatvaraju kut od 60° i kocka imaju sukladne baze. Odredite omjer njihovih oplošja.

5. U jednakokračnom trokutu ABC s tupim kutom pri vrhu C, nožište visine na krak $\overline{BC}$ je točka D. Odredite kutove trokuta ABC, ako vrijedi $\dfrac{|AB| + |BD|}{|AC| + |CD|} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

* * *

6. Veliki kotač s kabinama za putnike ima polumjer 10 metara. Najniža točka kotača je 2 metra iznad tla zemlje. Kotač rotira konstantnom brzinom i treba mu za jedan puni okret 100 sekundi. Kotač počinje rotirati kada je kabina u najnižoj točki. Visina $h(t)$ je udaljenost kabine od zemlje (u metrima), t sekundi nakon početka rotacije. Odredite ovisnost visine $h(t)$ o vremenu t. Koliko se sekundi kabina nalazi iznad 17 metara visine (u jednom okretu)?



7. Zadan je kvadrat površine $P = 7 - \log_2 x$ i kocka obujma $V = \log_2 x - 2$. Izračunajte realni broj x ako je duljina stranice kvadrata za 1 veća od duljine brida kocke. Kolike su duljina stranice kvadrata i duljina brida kocke?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

1. U razvoju binoma $\left(\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[8]{x}}\right)^{2019}$ odredite član koji ne sadrži x.

2. Riješite nejednadžbu $4^{\sin^2 \pi x}+3\cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leqslant 8$.

3. Pravac $x-2y=0$ je asimptota hiperbole kojoj su žarišta u točkama $F_1(5,0)$ i $F_2(-5,0)$. Odredite koordinate svih točaka hiperbole iz kojih se žarišna udaljenost $\overline{F_1F_2}$ vidi pod pravim kutom.

4. Odredite najveći prirodan broj n takav da je $\dfrac{500!}{7^n}$ prirodan broj.

5. Duljina visine uspravnoga stošca jednaka je promjeru baze stošca. Koliki je omjer polumjera tome stošcu upisane kugle i tome stošcu opisane kugle?

* * *

6. Odredite troznamenkasti broj čiji se zapis u bazi 11 sastoji od istih znamenaka kao i zapis u bazi 9, ali u obrnutom redoslijedu.

7. Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi $\operatorname{Re} z>0$ i $z^8+(1-4i)z^4-4i=0$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.