ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Ako za realne brojeve x i y vrijedi $x - y = 6$ i $x^2 + y^2 = 22$, koliko je $x^3 - y^3$?

Rješenje.

Vrijedi

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2). \qquad \text{1 bod}$$

Sada zamijenimo $x - y$ s 6, a $x^2 + y^2$ s 22 i dobivamo

$$x^3 - y^3 = 6(xy + 22). \qquad \text{1 bod}$$

Preostaje još izračunati umnožak xy.

Nakon kvadriranja jednakosti $x - y = 6$ slijedi

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= 36 && \text{1 bod} \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 36 \\ 22 - 2xy &= 36 && \text{1 bod} \\ xy &= -7 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Vrijednost traženog izraza je

$$x^3 - y^3 = 6(xy + 22) = 90. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-1.2.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\dfrac{4n}{4n - 2019}$ cijeli broj.

Rješenje.

Zapišimo razlomak u sljedećem obliku

$$\frac{4n}{4n - 2019} = \frac{4n - 2019 + 2019}{4n - 2019} = 1 + \frac{2019}{4n - 2019} \qquad \text{2 boda}$$

Dobiveni će izraz biti cijeli broj ako je nazivnik $4n - 2019$ djeljitelj broja 2019.

Kako je $2019 = 3 \cdot 673$ rastav broja 2019 na proste faktore, 1 bod

da bi promatrani razlomak bio cijeli broj, broj $4n - 2019$ mora biti jedan od djeljitelja broja 2019:

$-1, 1, -3, 3, -673, 673, -2019, 2019.$ 1 bod

A to znači da je $4n$ jedan od brojeva: 2018, 2020, 2016, 2022, 1346, 2692, 0, 4038. 1 bod

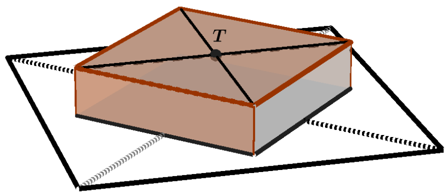
Četiri od tih brojeva nisu djeljiva s 4, a broj $n = 0$ nije prirodan broj, pa preostaju tri rješenja.

Traženi brojevi su $n = 504$, $n = 505$ i $n = 673$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne odbaci rješenje $n = 0$, gubi 1 bod.

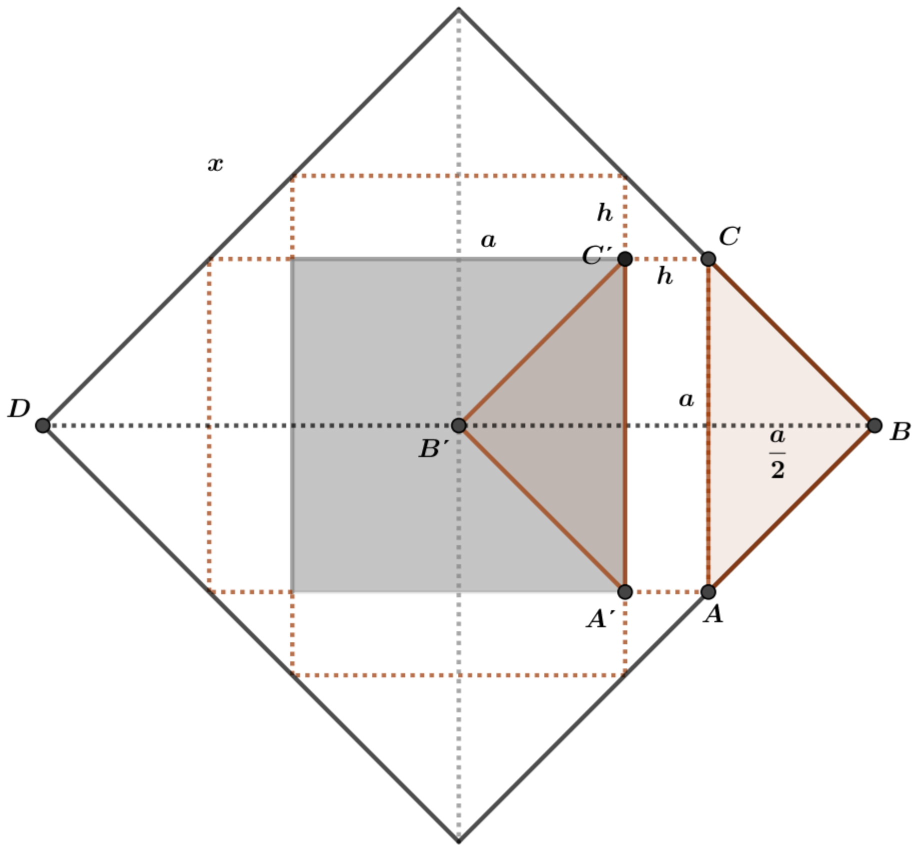
Zadatak B-1.3.

Mia želi umotati božićni poklon, kutiju oblika kvadratne prizme. Ima ukrasni papir kvadratnog oblika. Umatanje je moguće jedino ako kutiju smjesti tako da kvadratnu bazu kutije položi dijagonalno, kao na slici, pri čemu je središte baze u središtu kvadratnog papira. Četiri se vrha papira nakon umatanja poklope sa središtem T gornje baze, a rubovi papira se spoje na dijagonalama, bez preklapanja. Odredite površinu i dimenzije papira za umatanje, ako su dimenzije kutije $20\,\text{cm} \times 20\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$.



Rješenje.

Označimo dimenzije kutije: $a = 20\,\text{cm}$, $h = 5\,\text{cm}$.



(skica sa svim oznakama ili točnim iznosima) 2 boda

Prilikom umatanja trokut ABC se preslika na trokut $A'B'C'$.

Stoga je tražena površina jednaka

$$\begin{aligned} P &= a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a + 4ah + 4 \cdot \frac{1}{2} h^2 && \text{2 boda} \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 = 2(a+h)^2 \\ &= 2(20+5)^2\,\mathrm{cm}^2 = 1250\,\mathrm{cm}^2 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Tada za duljinu stranice kvadratnog papira vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 &= 1250\,\mathrm{cm}^2 \\ x &= 25\sqrt{2}\,\mathrm{cm} && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Zadatak B-1.4.

Dokažite da je broj $6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ djeljiv s 900 za sve prirodne brojeve n.

Rješenje.

Napišimo dani izraz u obliku umnoška dva prirodna broja.

$$\begin{aligned} 6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36 &= 6^{2n} \cdot 6^2 - 2^n \cdot 2^3 \cdot 3^n \cdot 3^2 + 36 && \text{1 bod} \\ &= 6^{2n} \cdot 36 - 6^n \cdot 72 + 36 && \text{1 bod} \\ &= 36(6^{2n} - 2 \cdot 6^n + 1) && \text{1 bod} \\ &= 36(6^n - 1)^2 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Dobiveni je izraz očito djeljiv s 36, a s obzirom da je $6^n - 1$ djeljivo s 5 za sve prirodne brojeve n, slijedi da je dani broj djeljiv s $36 \cdot 25 = 900$. 2 boda

Napomena: Tvrdnja da je $6^n - 1$ djeljivo s 5 slijedi iz $6^n - 1 = (6-1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \cdots + 6 + 1)$ i ne treba ju dokazivati.

Zadatak B-1.5.

Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su tri puta veći od kvadrata zbroja svojih znamenaka.

Prvo rješenje.

Neka je $x = \overline{abc}$ traženi broj i $n = a + b + c$.

Tada je $x = 3n^2$. 1 bod

Za $n \leqslant 5$ i $n \geqslant 19$ broj $3n^2$ nije troznamenkast. 2 boda

Provjerimo za koje brojeve $n \in \{6, 7, 8, \ldots, 18\}$ vrijedi traženo svojstvo koristeći tablicu

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$3n^2$	108	147	192	243	300	363	432	507	588	675	768	867	972
zbroj	9	12	12	9	3	12	9	12	21	18	21	21	18

2 boda

Uvjete zadatka ispunjavaju brojevi 243 i 972. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $x = \overline{abc}$ traženi broj.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $\overline{abc} = 3(a+b+c)^2$. 1 bod

Očito je traženi broj djeljiv s 3, a tada je i zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3, odnosno $a+b+c = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. 1 bod

Tada je $\overline{abc} = 3(a+b+c)^2 = 27k^2$.

Ovo će biti troznamenkasti broj ako je $k^2 \in \{4, 9, 16, 25, 36\}$. 1 bod

Slijedi $\overline{abc} \in \{108, 243, 432, 675, 972\}$. 1 bod

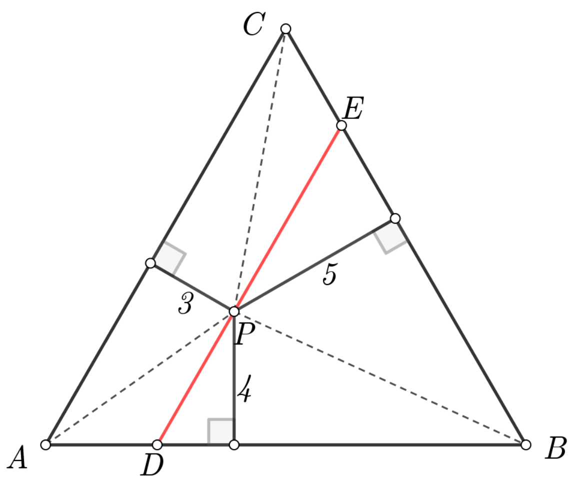
Izravnom provjerom zaključujemo da uvjete zadatka zadovoljavaju jedino brojevi

$243 = 3(2+4+3)^2$ i $972 = 3(9+7+2)^2$. 2 boda

Zadatak B-1.6.

Točka P se nalazi unutar jednakostraničnog trokuta tako da je od njegovih stranica udaljena redom 3 cm, 4 cm i 5 cm. Kroz točku P povučena je paralela sa stranicom trokuta koja je najbliža točki P. Izračunajte duljinu stranice zadanog trokuta i omjer u kojem povučena paralela dijeli površinu trokuta.

Rješenje.



(Boduje se prikaz danih udaljenosti od točke P do stranica trokuta) 1 bod

Iz točke P povučemo spojnice s vrhovima trokuta. Ako duljinu stranice trokuta označimo s a, površinu traženog trokuta možemo računati kao

$$P = \frac{1}{2}a \cdot 3 + \frac{1}{2}a \cdot 4 + \frac{1}{2}a \cdot 5 = 6a.$$ 2 boda

Kako je dani trokut jednakostraničan, površina se može računati po formuli $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Zato je $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6a$. 1 bod

Odatle je duljina stranice trokuta jednaka $a = \dfrac{24}{\sqrt{3}}\,\text{cm} = 8\sqrt{3}\,\text{cm}$, 1 bod

a duljina visine trokuta je $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 12\,\text{cm}$. 1 bod

Točkom P povučena je paralela sa stranicom $\overline{AC}$. Ona dijeli trokut ABC na jednakostraničan trokut DBE duljine visine $12\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$ te jednakokračan trapez $ADEC$ s visinom duljine $3\,\text{cm}$. Duljinu stranice trokuta DBE možemo izračunati iz duljine visine:

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = 9, \qquad x = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}.$$ 1 bod

Površina trokuta DBE jednaka je $P_1 = (6\sqrt{3})^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. 1 bod

Površina trapeza $ADEC$ jednaka je $P_2 = \dfrac{8\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = 21\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. 1 bod

Traženi omjer je $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{21\sqrt{3}} = \dfrac{9}{7}$ ili $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{7}{9}$. 1 bod

Zadatak B-1.7.

Aritmetička sredina niza brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jednaka je 100. Najveći od tih brojeva je troznamenkasti broj x_n. Ako njega zamijenimo s $4x_n$, aritmetička sredina novog niza brojeva jednaka je 200. Koliko najviše brojeva može biti u takvom nizu? Koju vrijednost u tom slučaju ima broj x_n?

Rješenje.

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 100$$
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + 4x_n}{n} = 200$$ 2 boda

Tada je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 100n$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + 4x_n = 200n$$ 2 boda

Oduzmemo li gornje jednakosti dobivamo $3x_n = 100n$. 1 bod

Kako je x_n troznamenkasti prirodni broj slijedi da je broj n djeljiv s 3 1 bod

i broj $\dfrac{100n}{3}$ je troznamenkast. 1 bod

To vrijedi za $n \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$. 1 bod

Kako se traži najveći broj n s danim svojstvom, onda je $n = 27$ 1 bod

i vrijedi $x_n = \dfrac{100n}{3} = \dfrac{100 \cdot 27}{3} = 900$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Ako se zbroje kvadrat i dvostruki kub nekog broja, dobije se trostruka četvrta potencija tog istog broja. Odredite sve realne brojeve za koje to vrijedi.

Rješenje.

Označimo li traženi broj x, prema uvjetima zadatka slijedi $x^2 + 2x^3 = 3x^4$. 1 bod

Ta je jednadžba ekvivalentna s $3x^4 - 2x^3 - x^2 = 0$,

odnosno $x^2(3x^2 - 2x - 1) = 0$. 1 bod

Slijedi $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ili $x^2 = 0$. 1 bod

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobiju se dva rješenja $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. 2 boda

a treće rješenje je $x_3 = 0$, 1 bod

Napomena: Ukoliko učenik podijeli jednadžbu s x^2 i time izgubi rješenje $x = 0$, gubi 2 boda, odnosno za dva točna rješenja uz postupak dobiva 4 boda.

Ako učenik pogodi jedno ili dva rješenja, bez napisane jednadžbe, dobiva samo 1 bod. Ako ima napisanu jednadžbu i pogođeno jedno ili dva rješenja, dobiva 3 boda.

Zadatak B-2.2.

Koliko cijelih brojeva x zadovoljava nejednadžbu $x^4 - 2020x^2 + 2019 < 0$?

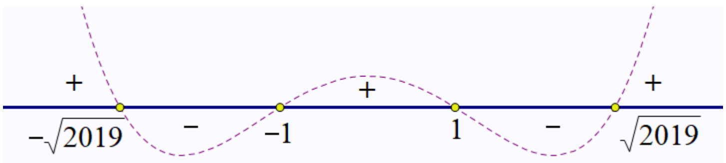
Prvo rješenje.

Danu nejednadžbu možemo pisati u faktoriziranom obliku:

$$(x^2 - 2019)(x^2 - 1) < 0 \qquad \text{2 boda}$$

$$(x - \sqrt{2019})(x + \sqrt{2019})(x - 1)(x + 1) < 0.$$

Tablicom predznaka ili grafički



2 boda

dolazimo do rješenja nejednadžbe u skupu $\mathbb{R}$

$$x \in \langle -\sqrt{2019}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{2019}\rangle.$$

Traženi brojevi su

$$x \in \mathbb{Z} \cap \left(\langle -\sqrt{2019}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{2019}\rangle\right)$$

odnosno

$$x \in \{-44, -43, \ldots, -3, -2, 2, 3, \ldots, 44\}$$ 1 bod

Takvih cijelih brojeva ima $43 \cdot 2 = 86$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uvedemo supstituciju $t = x^2$. Polazna nejednadžba prelazi u $t^2 - 2020t + 2019 < 0$, 1 bod

čija su rješenja $1 < t < 2019$. 1 bod

To znači da je $1 < x^2 < 2019$

odnosno $1 < |x| < \sqrt{2019}$. 1 bod

Dakle, $x \in \langle -\sqrt{2019}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{2019}\rangle$. 1 bod

Traženi cijeli brojevi su

$$x \in \{-44, -43, \ldots, -3, -2, 2, 3, \ldots, 44\}$$ 1 bod

Takvih cijelih brojeva ima $43 \cdot 2 = 86$. 1 bod

Zadatak B-2.3.

U internetskoj je trgovini paket fotokopirnog papira 9 kuna jeftiniji nego u knjižari. U prosincu je tajnica za 1440 kn kupila 8 paketa više u internetskoj trgovini nego što je u studenom za isti iznos kupila u knjižari. Kolika je cijena fotokopirnog papira u internetskoj trgovini?

Rješenje.

Neka je x cijena paketa papira u internetskoj trgovini.

Možemo kupiti $\dfrac{1440}{x}$ paketa u internetskoj trgovini, odnosno $\dfrac{1440}{x+9}$ u knjižari. 2 boda

Razlika između broja paketa je $\dfrac{1440}{x} - \dfrac{1440}{x+9} = 8$, 1 bod

a rješavanjem ove jednadžbe redom dobivamo

$x^2 + 9x - 1620 = 0$ 2 boda

Zbog $x > 0$, jedino rješenje je $x = 36$. 1 bod

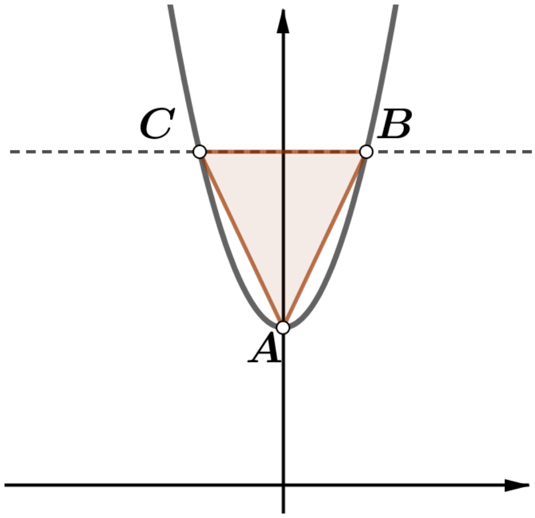
Cijena paketa u internetskoj trgovini je 36 kn.

Napomena: Ako x označava cijenu papira u knjižari, dobije se jednadžba: $\dfrac{180}{x-9} - \dfrac{180}{x} = 8$, odnosno nakon sređivanja $x^2 - 9x - 1620 = 0$. Rješenje te jednadžbe je $x = 45$, te je $y = 45 - 9 = 36$ cijena koju tražimo.

Zadatak B-2.4.

Sva tri vrha trokuta ABC pripadaju paraboli s jednadžbom $y = x^2 + 125$ tako da vrh A leži na njezinoj osi simetrije, a stranica $\overline{BC}$ je paralelna s osi x. Ako površina trokuta ABC iznosi 125, odredite koordinate njegovih vrhova.

Rješenje.



Vrh A je tjeme parabole i ima koordinate $(0, 125)$. 1 bod

Neka točka B ima koordinate $B(x, y)$. Iz uvjeta da je $\overline{BC}$ paralelno s osi x zaključujemo da je $C(-x, y)$.

Kako točke B i C pripadaju paraboli, za njihovu ordinatu vrijedi $y = x^2 + 125$. 1 bod

Dakle, točke B i C imaju koordinate $B(x, x^2 + 125)$ i $C(-x, x^2 + 125)$.

Duljina visine trokuta ABC je razlika ordinata točaka B i A, $h = y - 125 = x^2$, 1 bod

a duljina stranice $\overline{BC}$ iznosi $a = 2x$. Površina trokuta ABC je stoga

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{2x \cdot x^2}{2} = x^3$$ 1 bod

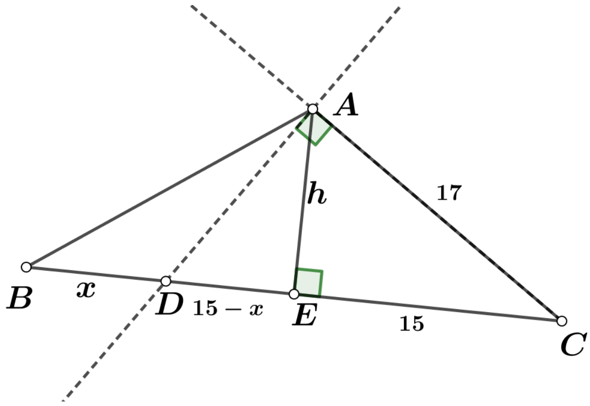
Kako je $P = 125$, slijedi $x = 5$, 1 bod

pa su vrhovi trokuta $A(0, 125)$, $B(5, 150)$, $C(-5, 150)$. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Duljina osnovice jednakokračnog trokuta ABC iznosi $|BC| = 30\,\text{cm}$, a duljina kraka $|AC| = 17\,\text{cm}$. U točki A povučena je okomica na pravac AC. Odredite omjer u kojem ova okomica dijeli osnovicu $\overline{BC}$.

Prvo rješenje.



1 bod

Visina trokuta ABC iznosi $h = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8\,\text{cm}$. 1 bod

Uočimo pravokutne trokute DEA i DAC i primijenimo Pitagorin poučak. Dobivamo

$$|AD|^2 = 8^2 + (15-x)^2 \quad \text{1 bod}$$
$$|AD|^2 = (30-x)^2 - 17^2 \quad \text{1 bod}$$

Izjednačimo li desne strane dobivamo

$$64 + (15-x)^2 = (30-x)^2 - 289$$
$$30x = 322$$

odnosno $x = \dfrac{161}{15}$. 1 bod

Traženi omjer je

$$\frac{161}{15} : \left(30 - \frac{161}{15}\right) = \frac{161}{15} : \frac{289}{15} = 161 : 289. \quad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Skica i određivanje visine, kao u prvom rješenju. 2 boda

Primijenimo Euklidov poučak za visinu h na hipotenuzu $\overline{CD}$ trokuta CDA.

$$h = \sqrt{(15-x)\cdot 15} \quad \text{2 boda}$$
$$64 = 225 - 15x$$
$$15x = 161$$

te je $x = \dfrac{161}{15}$. 1 bod

Slijedi računanje omjera kao u prvom rješenju. 1 bod

Treće rješenje.

Skica 1 bod

Trokuti AEC i DAC, osim pravog kuta, imaju kut u vrhu C zajednički što znači da su slični prema poučku $K-K$. Tada vrijedi 1 bod

$$\begin{aligned} 15 : 17 &= 17 : (30-x) \\ 15(30-x) &= 289 \\ 15x &= 161 \end{aligned}$$ 2 boda

te je $x = \dfrac{161}{15}$. 1 bod

Slijedi računanje omjera kao u prvom rješenju. 1 bod

Zadatak B-2.6.

Riješite jednadžbu

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4x-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)=112-4\sqrt{x}.$$

Prvo rješenje.

Najprije uočimo da mora biti $x > 0$, $x \neq 1$. 1 bod

Sređivanjem izraza u zagradama dobivamo

$$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x}},$$ 1 bod

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4x-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=4x+\frac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2}{x-1}=4x+\frac{4\sqrt{x}}{x-1}.$$ 2 boda

Stoga je dana jednadžba ekvivalentna s

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}}\cdot\left(4x+\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)=112-4\sqrt{x}.$$ 1 bod

Slijedi

$$4(x-1)\sqrt{x}+4=112-4\sqrt{x}$$ 2 boda

$$4x\sqrt{x}=108$$

$$x\sqrt{x}=27.$$ 1 bod

Dakle, $\sqrt{x}=3$, $x=9$. 2 boda

Napomena: Ako je učenik na početku napisao uvjet na rješenje, a nije prilikom množenja jednadžbe s $\sqrt{x}$ i s $x-1$ (ili $\sqrt{x}-1$) naglasio da se uz uvjet $x>0$ odnosno $x \neq 1$ u sljedećem koraku dobiva ekvivalentna jednadžba, ne treba oduzimati bod.

Vrijedi i obratno, ako je učenik prilikom množenja jednadžbe s $\sqrt{x}$ i s $x-1$ (ili $\sqrt{x}-1$) naglasio da se uz uvjet $x>0$ odnosno $x \neq 1$ u sljedećem koraku dobiva ekvivalentna jednadžba, nije nužno da na početku piše uvjet.

Ako nema niti jedno, niti drugo oduzeti 1 bod.

Drugo rješenje.

Najprije uočimo da mora biti $x>0$, $x \neq 1$. 1 bod

Ako uvedemo supstituciju $a=\sqrt{x}$ dana jednadžba uz $a \neq 1$, $a>0$ prelazi u

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{a+1}{a-1}+4a^2-\frac{a-1}{a+1}\right)=112-4a.$$ 1 bod

Sređivanjem dobivamo

$$\frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{(a+1)^2+4a^2(a^2-1)-(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}=112-4a.$$ 2 boda

(Svođenje na zajednički nazivnik izraza u zagradama)

$$\frac{a^2+2a+1+4a^4-4a^2-a^2+2a-1}{a}=112-4a.$$ 1 bod

(Skraćivanje s a^2-1)

Sređivanjem dobivamo $\frac{4a^4-4a^2+4a}{a}=112-4a$, odnosno $4a^3-4a+4=112-4a$. 2 boda

(Svođenje na jednadžbu bez nazivnika)

Sada je redom $4a^3=108$, $a^3=27$,

te $a=3$. 2 boda

Iz $\sqrt{x}=a$ slijedi $x=a^2=9$. 1 bod

Zadatak B-2.7.

Odredite površinu skupa točaka kojega u kompleksnoj ravnini određuju rješenja nejednadžbi $\operatorname{Im} z \geqslant |\operatorname{Re} z-1|$, $|z-1| \leqslant 1$.

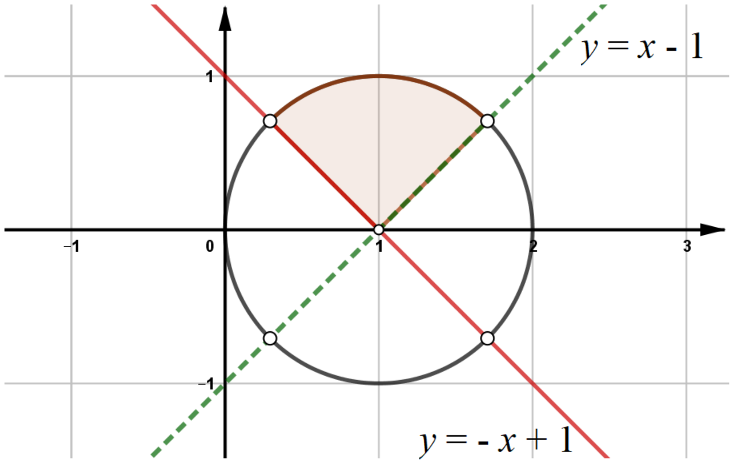
Rješenje.

Rješenje nejednadžbe $|z-1| \leqslant 1$ je skup svih točaka z koje se nalaze unutar kruga i na kružnici sa središtem u točki $S(1,0)$ i polumjera 1. 2 boda

Ako je $z=x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, tada nejednadžba $\operatorname{Im} z \geqslant |\operatorname{Re} z-1|$ prelazi u sustav nejednadžbi

$$\begin{gathered}
y \geqslant |x-1| \\
-y \leqslant x-1 \leqslant y, \quad y \geqslant 0 \\
y \geqslant x-1 \quad \text{i} \quad y \geqslant -x+1.
\end{gathered}$$ 3 boda

Skup rješenja ovog sustava i rješenja nejednadžbe $|z-1| \leqslant 1$ prikazujemo grafički.



3 boda

(1 bod za kružnicu, 1 bod za pravce, 1 bod za označen presjek)

Presjek tih skupova točaka je kružni isječak sa središnjim kutom od 90° (jer su pravci $y=x-1$ i $y=-x+1$ međusobno okomiti). 1 bod

Tada je površina nacrtanog kružnog isječka jednaka četvrtini površine cijelog kruga, tj. $P=\frac{1}{4}\cdot 1^2\pi=\frac{\pi}{4}$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Ako je $\sin x-\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, izračunajte $\sin^6 x+\cos^6 x$.

Rješenje.

Kvadriramo li danu jednakost dobivamo

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{3},$$ 1 bod

odnosno $\sin x\cos x=\dfrac{1}{3}$. 1 bod

Izraz $\sin^6 x+\cos^6 x$ možemo zapisati u obliku umnoška

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x&=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right) && \text{1 bod}\\ &=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x && \text{1 bod}\\ &=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x \quad =1-3\sin^2 x\cos^2 x. && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Koristeći $\sin x\cos x=\dfrac{1}{3}$ konačno je

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\left(\sin x\cos x\right)^2=1-3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}.$$ 1 bod

Zadatak B-3.2.

Koliko rješenja ima jednadžba $\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=\dfrac{16}{\operatorname{tg} x}$ na intervalu $\langle 0,2019\pi\rangle$?

Rješenje.

Uvjet na rješenje dane jednadžbe je $\operatorname{tg} x\neq 0$, $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, $\cos\frac{x}{2}\neq 0$. Drugim riječima, mora biti $x\neq k\pi$ za $k\in\mathbb{Z}$. 1 bod

Svedimo izraz na lijevoj strani jednadžbe na zajednički nazivnik.

$$\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}}.$$ 1 bod

Time jednadžba postaje

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{x}{2}} &= \frac{16}{\operatorname{tg} x} \\
\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin(2\cdot\frac{x}{2})\right)^2} &= \frac{16}{\operatorname{tg} x} \qquad \text{1 bod} \\
\frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 x} &= \frac{16\cos x}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Uz uvjet $\sin x \neq 0$ ovo je ekvivalentno s $4\sin x\cos x = 1$, odnosno $\sin 2x = \frac{1}{2}$. 1 bod

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ili $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$,

odnosno $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ili $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$.

Dana jednanžba ima dva rješenja na svakom intervalu $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$. 1 bod

Kako su na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ dva rješenja dane jednadžbe, na intervalu $\langle 0, 2019\pi\rangle$ je ukupno 4038 rješenja. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Kako bi pristupio određenoj web stranici Matko mora odabrati 4-znamenkasti broj - PIN. Nule na početku su dozvoljene, ali ipak postoje neki zahtjevi (zabrane) na PIN. Jedna se znamenka ne može ponavljati tri ili više puta u nizu. Primjerice 0006 ili 6666 nije dozvoljeni PIN, ali 0030 je dozvoljeni PIN. Zatim, par znamenaka se ne može ponoviti. Primjerice 1616 nije dozvoljeni PIN, ali 1661 ili 6611 je dozvoljeni PIN. Na koliko različitih načina Matko može odabrati PIN?

Rješenje.

Kombinaciju od 4 znamenke možemo odabrati na $10\cdot10\cdot10\cdot10 = 10000$ načina. 1 bod

Od toga ćemo oduzeti sve nedozvoljene kombinacije.

PIN-ovi u kojima su točno tri iste znamenke u nizu su oblika $aaab$ ili $baaa$ (uz $a \neq b$), te ih ima $2\cdot10\cdot9 = 180$. 2 boda

PIN-ova oblika $aaaa$ ima 10 , 1 bod

a PIN ova oblika $abab$ ima $10\cdot9 = 90$. 1 bod

Ukupan broj dozvoljenih kombinacija za PIN ima

$$10000 - (180 + 10 + 90) = 10000 - 280 = 9720. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-3.4.

Pravilna uspravna četverostrana piramida kojoj bočni bridovi s ravninom baze zatvaraju kut od $60°$ i kocka imaju sukladne baze. Odredite omjer njihovih oplošja.

Rješenje.

Neka je a duljina stranice kocke i baze piramide.

Oplošje kocke je $O_k = 6a^2$.

Oplošje piramide je $O_p = a^2 + 4 \cdot \dfrac{av}{2} = a^2 + 2av$ (v je visina pobočke). 1 bod

Potrebno je visinu pobočke v izraziti pomoću duljine brida a. Nasuprotni bočni bridovi i dijagonala baze tvore jednakostraničan trokut. 1 bod

Visina piramide je $h = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, 1 bod

a visina pobočke $v = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. 1 bod

Omjer oplošja dane piramide i kocke iznosi

$$\begin{aligned}
\frac{O_p}{O_k} &= \frac{a^2 + 2av}{6a^2} \\
&= \frac{a^2 + 2a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}}{6a^2} && \text{1 bod} \\
&= \frac{a^2(1+\sqrt{7})}{6a^2} \\
&= \frac{1+\sqrt{7}}{6} && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

(Ili obratno, $\dfrac{O_k}{O_p} = \sqrt{7} - 1$.)

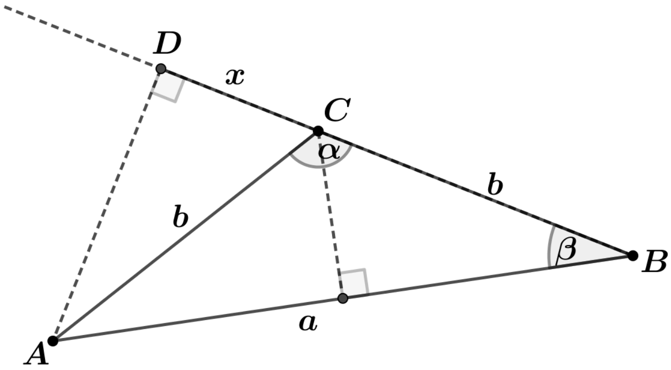
Napomena: Visina pobočke može se izračunati i kao visina jednakokračnog trokuta (pobočke): $v = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Zadatak B-3.5.

U jednakokračnom trokutu ABC s tupim kutom pri vrhu C, nožište visine na krak $\overline{BC}$ je točka D. Odredite kutove trokuta ABC, ako vrijedi $\dfrac{|AB| + |BD|}{|AC| + |CD|} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Prvo rješenje.

Neka je $a = |AB|$, $b = |AC| = |BC|$ i $|CD| = x$.



1 bod

Uz ove oznake dana jednakost prelazi u $\dfrac{a+b+x}{b+x} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$. Odatle je

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a+b+x}{b+x} - 1 = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$ 2 boda

odnosno $\dfrac{b+x}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Uočimo da je $\cos\beta = \dfrac{b+x}{a}$, 1 bod

pa iz prethodnog rezultata slijedi $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ te $\beta = 30°$. 1 bod

Kako je $\alpha + 2\beta = 180°$, dobivamo $\alpha = 120°$. 1 bod

Dakle, kutovi trokuta ABC su $30°$, $30°$, $120°$.

Drugo rješenje.

Neka je $a = |AB|$, $b = |AC| = |BC|$ i $|CD| = x$.

Skica kao u prvom rješenju. 1 bod

Kako je $\cos\beta = \dfrac{a}{2b} = \dfrac{b+x}{a}$, slijedi $a^2 = 2b(b+x) = 2b^2 + 2bx$

odakle dobivamo $x = \dfrac{a^2 - 2b^2}{2b}$. 2 boda

Uvrštavanjem u danu jednakost $\dfrac{a+b+x}{b+x} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ dobivamo $\dfrac{a+b+\frac{a^2-2b^2}{2b}}{b+\frac{a^2-2b^2}{2b}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

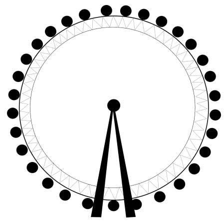
Sređivanjem slijedi $\dfrac{a}{b} = \sqrt{3}$. 1 bod

Odatle je $\cos\beta = \dfrac{a}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $\beta = 30°$ 1 bod

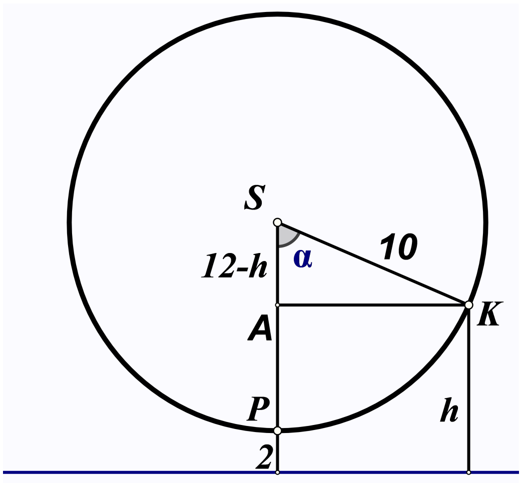
i konačno $\alpha = 120°$. 1 bod

Zadatak B-3.6.

Veliki kotač s kabinama za putnike ima polumjer 10 metara. Najniža točka kotača je 2 metra iznad tla zemlje. Kotač rotira konstantnom brzinom i treba mu za jedan puni okret 100 sekundi. Kotač počinje rotirati kada je kabina u najnižoj točki. Visina $h(t)$ je udaljenost kabine od zemlje (u metrima), t sekundi nakon početka rotacije. Odredite ovisnost visine $h(t)$ o vremenu t. Koliko se sekundi kabina nalazi iznad 17 metara visine (u jednom okretu)?



Prvo rješenje.



1 bod

Brzina kojom se mijenja kut $\sphericalangle KSP$ je konstantna i iznosi $\dfrac{360°}{100} = 3.6°$ u sekundi. 1 bod

To znači da je kut za koji se kabina zarotira od početnog položaja P do položaja K (oko središta S) jednak $\alpha = 3.6°\, t$ ili $\alpha = \dfrac{\pi}{50}\, t$. 1 bod

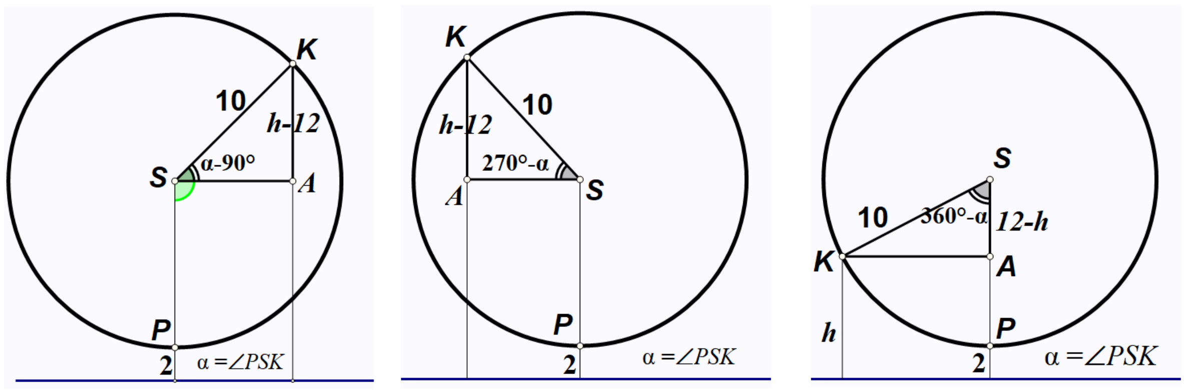
Uočimo pravokutni trokut SAK. Vrijedi $\cos\alpha = \dfrac{12-h}{10}$ odnosno

$$h = 12 - 10\cos\alpha.$$ 1 bod

Uvrštavajući izraz za α, dobivamo traženu ovisnost visine o vremenu

$$h(t) = 12 - 10\cos(3.6°\, t) = 12 - 10\cos\frac{\pi t}{50}.$$ 1 bod

Treba provjeriti vrijedi li ista ovisnost i ako je kut rotacije veći od 90°. Pogledajmo slike:



Ako je kut rotacije između 90° i 180° (prva slika), onda iz trokuta SAK slijedi $\cos(\alpha - 90^\circ) = \dfrac{h-12}{10}$.

Analogno, za kut između 180° i 270° (druga slika), onda je $\cos(270^\circ - \alpha) = \dfrac{h-12}{10}$.

Kako je $\cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, u oba slučaja vrijedi $h = 12 - 10\cos\alpha$.

Kada je kut rotacije između 270° i 360° (treća slika), tada je $\cos(360^\circ - \alpha) = \dfrac{12-h}{10}$.

Vrijedi $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, pa je u i ovom slučaju $h = 12 - 10\cos\alpha$.

Zaključujemo da je visina kabine u ovisnosti o kutu rotacije α uvijek dana s $h = 12 - 10\cos\alpha$,

a u ovisnosti o vremenu t formulom $h(t) = 12 - 10\cos(3.6^\circ t) = 12 - 10\cos\dfrac{\pi t}{50}$. 3 boda

Treba još odrediti koliko je vremena kabina iznad 17 metara visine.

Riješimo nejednadžbu $12 - 10\cos(3.6^\circ t) > 17$.

$$\begin{gathered}
-10\cos(3.6^\circ t) > 5 \\
\cos(3.6^\circ t) < -0.5 \\
120^\circ < 3.6^\circ t < 240^\circ \\
\frac{120}{3.6} < t < \frac{240}{3.6} \\
\frac{100}{3} < t < \frac{200}{3}
\end{gathered}$$

1 bod

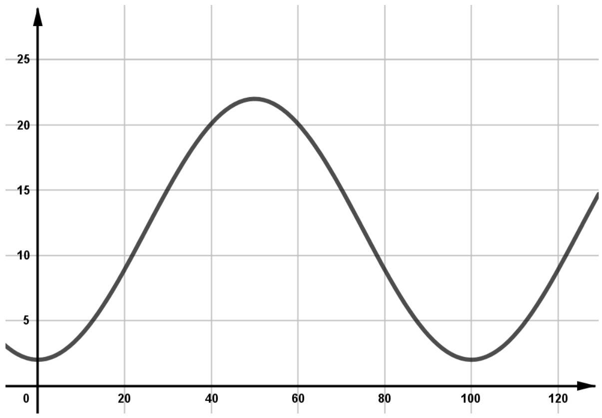
Kako je $\dfrac{200}{3} - \dfrac{100}{3} = \dfrac{100}{3} = 33\dfrac{1}{3}$, kabina će u svakom okretu 33 i 1/3 sekunde biti iznad 17 metara visine. 1 bod

Drugo rješenje.

Prema zadanim podacima o brzini gibanja kotača, učenik može napraviti tablicu i grafički prikazati dobivene podatke:

t (s)	0	25	50	75	100
h (m)	2	12	22	12	2

2 boda



1 bod

Ovisnost visine kabine o vremenu možemo prikazati funkcijom sinus ili kosinus:

$$h(t) = A\sin(Bt + C) + D,$$ 1 bod

gdje je $A = 10$, $D = 12$. 1 bod

Kako je $P = 100$ iz $P = \dfrac{2\pi}{B}$ slijedi $B = \dfrac{\pi}{50}$. 1 bod

Iz uvjeta $h(0) = 10\sin\left(\dfrac{\pi}{50} \cdot 0 + C\right) + 12 = 2$ dobivamo $C = -\dfrac{\pi}{2}$. 1 bod

Ovisnost visine kabine o vremenu dana je formulom

$$10\sin\left(\frac{\pi}{50} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 12.$$ 1 bod

(ili $-10\cos\dfrac{\pi t}{50} + 12$)

Na kraju treba riješiti nejednadžbu $h(t) > 17$, kao u prvom rješenju. 2 boda

Treće rješenje.

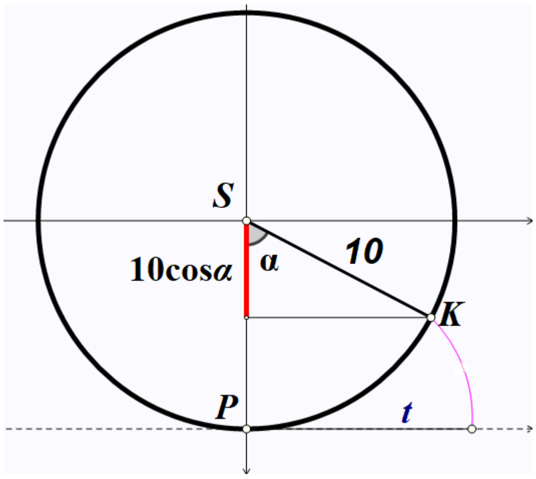
Kako je gibanje kabine periodično učenici će možda pretpostaviti da je tražena ovisnost dana s trigonometrijskom funkcijom kosinus (ili sinus), a zatim određivati nepoznate koeficijente. Ako koristimo funkciju kosinus, a s obzirom da kotač kreće od trenutka $t = 0$, pretpostavit ćemo da je gibanje dano s $h(t) = A\cos Bt + C$. Odredimo koeficijente A, B, C. 2 boda

Amplituda A iznosi $A = \dfrac{h_{max} - h_{min}}{2} = 10$. 1 bod

Period (u sekundama) je $100 = \dfrac{2\pi}{B}$, pa je $B = \dfrac{\pi}{50}$. 1 bod

Također vrijedi $C = \dfrac{h_{max} + h_{min}}{2} = 12$. 1 bod

Još treba obrazložiti zašto je ovisnost $h(t)$ dana s funkcijom kosinus (ili sinus). Primjerice, učenik može nacrtati sljedeću sliku i uočiti pridruživanje kao na brojevnoj kružnici:



Koordinatni sustav je zarotiran tako da je ishodište u točki S, os x je pravac SP, a os y horizontalna os. Vremenu t (realnom broju na pravcu paralelnom s y osi) pridružena je točka K (položaj kabine). Pridružimo li točki K njezinu apscisu, dobili smo periodičnu funkciju kosinus. 3 boda

Na kraju treba riješiti nejednadžbu $h(t) > 17$, kao u prvom rješenju. 2 boda

Zadatak B-3.7.

Zadan je kvadrat površine $P = 7 - \log_2 x$ i kocka obujma $V = \log_2 x - 2$. Izračunajte realni broj x ako je duljina stranice kvadrata za 1 veća od duljine brida kocke. Kolike su duljina stranice kvadrata i duljina brida kocke?

Rješenje.

Neka je a duljina brida kocke, a b duljina stranice kvadrata. Tada je

$V = \log_2 x - 2 = a^3$, pa je $a = \sqrt[3]{\log_2 x - 2}$. 1 bod

$P = 7 - \log_2 x = b^2$, pa je $b = \sqrt{7 - \log_2 x}$. 1 bod

Kako su a i b duljine mora vrijediti $\log_2 x - 2 > 0$ i $7 - \log_2 x > 0$, pa je $2 < \log_2 x < 7$ (odnosno $4 < x < 128$). 1 bod

Prema uvjetu zadatka treba riješiti jednadžbu

$$\sqrt{7 - \log_2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x - 2} = 1.$$

Uvedemo li supstituciju $t = \log_2 x$ slijedi niz ekvivalentnih jednadžbi:

$$\sqrt{7-t} - \sqrt[3]{t-2} = 1$$

$$\sqrt{7-t} - 1 = \sqrt[3]{t-2}$$

$$\left(\sqrt{7-t} - 1\right)^3 = t - 2 \qquad \text{1 bod}$$

$$(7-t)\sqrt{7-t} - 3(7-t) + 3\sqrt{7-t} - 1 = t - 2$$

$$(10-t)\sqrt{7-t} = 20 - 2t \qquad \text{1 bod}$$

$$\left((10-t)\sqrt{7-t}\right)^2 = (20-2t)^2 \qquad \text{1 bod}$$

$$(10-t)^2(7-t) = 4(10-t)^2$$

$$(10-t)^2(3-t) = 0 \qquad \text{1 bod}$$

Rješenja posljednje jednadžbe su $t = 10$ i $t = 3$,

pa je $\log_2 x = 10$ odnosno $\log_2 x = 3$.

Zbog uvjeta, prva jednadžba ne vodi rješenju našeg problema. 1 bod

Iz $\log_2 x = 3$ slijedi $x = 8$. 1 bod

Tražene duljine stranica kvadrata i brida kocke su $b = 2$ i $a = 1$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. siječnja 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

U razvoju binoma $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2\sqrt[8]{x}}\right)^{2019}$ odredite član koji ne sadrži x.

Rješenje.

Opći član u razvoju danog binoma je $\binom{2019}{k}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{2019-k}\cdot 2^{-k}x^{-\frac{1}{8}k}$. 2 boda

Kako tražimo član koji ne sadrži x, mora vrijediti $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{2019-k}\cdot x^{-\frac{1}{8}k}=x^0$, 1 bod

odnosno $\frac{1}{4}(2019-k)-\frac{1}{8}k=0$. 1 bod

Rješavanjem dobivamo $k=1346$. 1 bod

Traženi član je $\binom{2019}{1346}\cdot 2^{-1346}$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Riješite nejednadžbu $4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\leqslant 8$.

Rješenje.

Primjenimo li osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
&4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\leqslant 8\\
\Leftrightarrow\quad &4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{1-\sin^2\pi x}\leqslant 8\\
\Leftrightarrow\quad &4^{\sin^2\pi x}+12\cdot 4^{-\sin^2\pi x}\leqslant 8
\end{aligned}
$$

1 bod

Uvođenjem supstitucije $t=4^{\sin^2\pi x}$ nejednadžba prelazi u

$$t+\frac{12}{t}\leqslant 8$$

1 bod

$$t^2-8t+12\leqslant 0.$$

Rješenje ove nejednadžbe je $t\in[2,6]$ 1 bod pa dalje dobivamo

$$
\begin{aligned}
2 \leqslant 4^{\sin^2 \pi x} &\leqslant 6 \\
\frac{1}{2} \leqslant \sin^2 \pi x &\leqslant \log_4 6 \qquad \text{1 bod} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |\sin \pi x| &\leqslant \sqrt{\log_4 6}
\end{aligned}
$$

Kako je $\log_4 6 > 1$, nejednakost $|\sin \pi x| \leqslant \sqrt{\log_4 6}$ vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$.

Preostaje riješiti $|\sin \pi x| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. To je ekvivalentno s

$$\sin \pi x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ili} \quad \sin \pi x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ 1 bod

Dakle, uz $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant \pi x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant \pi x \leqslant -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

tj.

$$\frac{1}{4} + 2k \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} + 2k \quad \text{ili} \quad -\frac{3}{4} + 2k \leqslant x \leqslant -\frac{1}{4} + 2k.$$ 1 bod

Kraće možemo zapisati $\dfrac{1}{4} + k \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4} + k$

te konačno $x \in \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{4} + k, \frac{3}{4} + k\right]$.

Zadatak B-4.3.

Pravac $x - 2y = 0$ je asimptota hiperbole kojoj su žarišta u točkama $F_1(5,0)$ i $F_2(-5,0)$. Odredite koordinate svih točaka hiperbole iz kojih se žarišna udaljenost $\overline{F_1F_2}$ vidi pod pravim kutom.

Prvo rješenje.

Ako je pravac $x - 2y = 0$ asimptota hiperbole, tada je $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$ tj. $a = 2b$. 1 bod

Iz $a^2 + b^2 = e^2$ slijedi

$a^2 + b^2 = 25$, odnosno $4b^2 + b^2 = 25$, pa je

$b^2 = 5$, $a^2 = 20$. 1 bod

Jednadžba hiperbole je $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ odnosno $x^2 - 4y^2 = 20$. 1 bod

Kako je obodni kut nad promjerom kružnice pravi kut, točke T možemo dobiti kao sjecišta kružnice $x^2 + y^2 = 25$ (sa središtem u ishodištu, promjera $2e = 10$) i hiperbole.

1 bod

Rješavanjem sustava $x^2 - 4y^2 = 20$, $x^2 + y^2 = 25$ dobivamo $x^2 = 24$, $y^2 = 1$ tj. $x = \pm 2\sqrt{6}$, $y = \pm 1$. 1 bod

Tražene točke su

$$T_1(2\sqrt{6}, 1), \quad T_2(-2\sqrt{6}, 1), \quad T_3(2\sqrt{6}, -1), \quad T_4(-2\sqrt{6}, -1).$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Jednadžbu hiperbole dobijemo kao i u prvom rješenju. 3 boda

Iz jednadžbe hiperbole proizlazi $y^2 = \dfrac{1}{4}x^2 - 5$, pa proizvoljna točka T hiperbole ima koordinate $T = \left(x, \pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 5}\right)$.

Točke T koje zadovoljavaju uvjet zadatka možemo odrediti primjenjujući Pitagorin poučak na trokut F_1TF_2.

Vrijedi $|TF_1|^2 + |TF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ tj.

$$(x-5)^2 + \left(\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 5} - 0\right)^2 + (x+5)^2 + \left(\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 5} - 0\right)^2 = 10^2$$ 1 bod

Sređivanjem dobivamo

$$x^2 - 10x + 25 + \frac{1}{4}x^2 - 5 + x^2 + 10x + 25 + \frac{1}{4}x^2 - 5 = 100$$

odnosno $\dfrac{5}{2}x^2 = 60$.

Dakle, $x^2 = 24$, $y^2 = 1$. 1 bod

Tražene točke su

$$T_1(2\sqrt{6}, 1), \quad T_2(-2\sqrt{6}, 1), \quad T_3(2\sqrt{6}, -1), \quad T_4(-2\sqrt{6}, -1).$$ 1 bod

Zadatak B-4.4.

Odredite najveći prirodan broj n takav da je $\dfrac{500!}{7^n}$ prirodan broj.

Rješenje.

Potrebno je prebrojati koliko se puta broj 7 pojavljuje u umnošku 1 bod
$500! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 500$.

Višekratnika broja 7 u tom umnošku ima k, pri čemu je $7k$ najveći prirodni broj takav da je $7k \leqslant 500$.

Dakle, broj višekratnika broja 7 u umnošku je 71. 1 bod

Među višekratnicima broja 7 postoje i višekratnici broja $7^2 = 49$ a njih ima ukupno 10. 2 boda

Kako je među višekratnicima broja 49 i broj $7^3 = 343$, zaključujemo da se faktor 7 u promatranom umnošku pojavljuje $71 + 10 + 1 = 82$ puta. 2 boda

Najveći prirodan broj n takav da je $\dfrac{500!}{7^n}$ prirodan broj je broj 82.

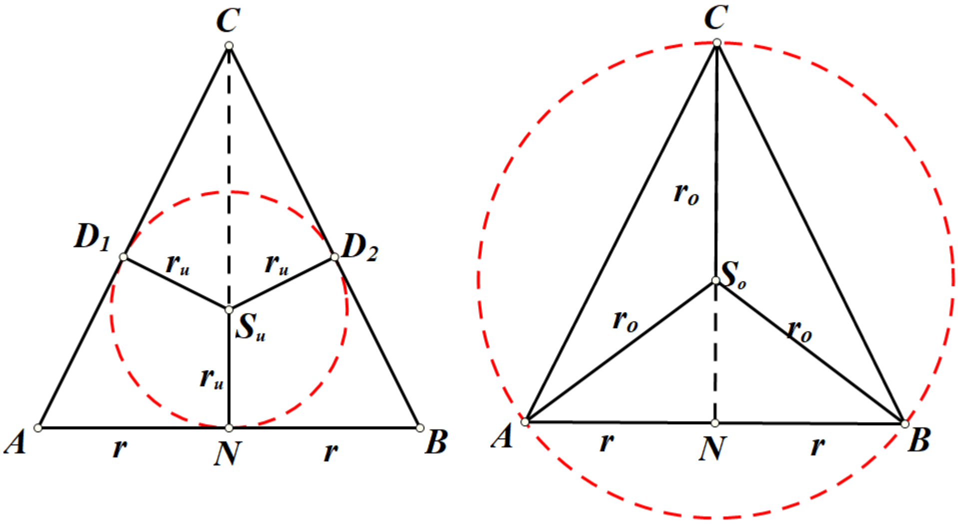
Zadatak B-4.5.

Duljina visine uspravnoga stošca jednaka je promjeru baze stošca. Koliki je omjer polumjera tome stošcu upisane kugle i tome stošcu opisane kugle?

Rješenje.

Promatrat ćemo osni presjek stošca, odnosno jednakokračan trokut ABC kojemu je osnovica promjer baze stošca, a krak izvodnica stošca. Tada je polumjer kugle upisane u stožac jednak polumjeru kružnice upisane u taj trokut, a polumjer kugle opisane stošcu, jednak je polumjeru kružnice opisane tom trokutu. (umjesto ovog opisa dovoljna je skica osnog presjeka s upisanom i opisanom kružnicom) 1 bod

Označimo polumjer upisane kružnice s r_u, a opisane kružnice s r_o, te polumjer baze s r.



Duljina izvodnice stošca je $|AC| = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = r\sqrt{5}$. 1 bod

Površina trokuta ABC jednaka je $P = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$,

a njegov poluopseg iznosi $s = \dfrac{1}{2}(2r + 2 \cdot r\sqrt{5}) = r(1 + \sqrt{5})$. 1 bod

Polumjer trokutu ABC upisane kružnice računamo iz $P = r_u \cdot s$:

$$r_u = \frac{P}{s} = \frac{2r^2}{r(1+\sqrt{5})} = \frac{2r}{1+\sqrt{5}}.$$ 1 bod

Polumjer trokutu ABC opisane kružnice računamo koristeći formulu $P = \dfrac{abc}{4r_o}$:

$$r_o = \frac{abc}{4P} = \frac{2r \cdot r\sqrt{5} \cdot r\sqrt{5}}{4 \cdot 2r^2} = \frac{10r^3}{8r^2} = \frac{5}{4}r$$ 1 bod

Konačno, omjer polumjera stošcu upisane i stošcu opisane kugle je

$$\frac{r_u}{r_o} = \frac{\frac{2r}{1+\sqrt{5}}}{\frac{5}{4}r} = \frac{8}{5(1+\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5}.$$ 1 bod

Napomena: Polumjeri upisane i opisane kugle mogu se dobiti i pomoću sličnosti.
Uočimo na prvoj skici da je trokut ANC sličan trokutu CD_1S_u. Zato je $\dfrac{r}{r\sqrt{5}} = \dfrac{r_u}{2r - r_u}$ odakle slijedi $r_u = \dfrac{2r}{1+\sqrt{5}}$. (2 boda)

Iz pravokutnog trokuta ANS_o na drugoj skici slijedi $r_o^2 = r^2 + (2r - r_o)^2$ odakle slijedi $r_o = \dfrac{5}{4}r$. (2 boda)

Preostala 2 boda su za skicu i računanje traženog omjera kao i u prethodno raspisanom rješenju.

Zadatak B-4.6.

Odredite troznamenkasti broj čiji se zapis u bazi 11 sastoji od istih znamenaka kao i zapis u bazi 9, ali u obrnutom redoslijedu.

Rješenje.

Tražimo broj za koji vrijedi $xyz_{(9)} = zyx_{(11)}$, gdje su $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (znamenke u bazi 9), $x \neq 0$, $z \neq 0$. 2 boda

Raspisivanjem dobivamo

$$x \cdot 9^2 + y \cdot 9 + z = z \cdot 11^2 + y \cdot 11 + x \qquad \text{1 bod}$$
$$81x + 9y + z = 121z + 11y + x$$
$$80x - 2y - 120z = 0$$
$$y = 40x - 60z = 20(2x - 3z) \qquad \text{1 bod}$$

Kako je y znamenka, jedina mogućnost je $y = 0$. 1 bod

Dakle $2x - 3z = 0$, tj. $2x = 3z$. 1 bod

Broj z mora biti paran. 1 bod

Ispitajmo sve mogućnosti:

iz $z = 2$ slijedi $x = 3$: $302_{(9)} = 203_{(11)}$ $(= 245)$ 1 bod

iz $z = 4$ slijedi $x = 6$: $604_{(9)} = 406_{(11)}$ $(= 490)$ 1 bod

za $z \geqslant 6$ bilo bi $x \geqslant 9$ pa nema drugih rješenja. 1 bod

Zadatak B-4.7.

Odredite sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi $\operatorname{Re} z > 0$ i $z^8 + (1-4i)z^4 - 4i = 0$.

Rješenje.

Uvođenjem supstitucije $z^4 = t$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + (1-4i)t - 4i = 0. \qquad (*)$$

Rješavanjem jednadžbe (*) dobivamo

$$t_{1,2} = \frac{-1+4i \pm \sqrt{(1-4i)^2+16i}}{2} = \frac{-1+4i \pm \sqrt{(1+4i)^2}}{2} = \frac{-1+4i \pm (1+4i)}{2},$$

tj. $t_1 = 4i$, $t_2 = -1$. 2 boda

Zapišemo li $t_1 = 4i$ u trigonometrijskom obliku $t_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ iz $z^4 = t_1$ dobivamo

$$z_{1,k} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{(4k+1)\pi}{8} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{8}\right), \quad k = 0,1,2,3. \qquad (**)$$ 2 boda

Iz (**) slijedi:

za $k=0$, $z_{1,0} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$,

za $k=1$, $z_{1,1} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$,

za $k=2$, $z_{1,2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$,

za $k=3$, $z_{1,3} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$.

Iz uvjeta $\operatorname{Re} z > 0$ slijedi da su rješenja $z_{1,0}$ i $z_{1,3}$. 2 boda

Analogno, zapišemo li $t_2 = -1$ u trigonometrijskom obliku $t_2 = \cos\pi + i\sin\pi$, iz $z^4 = t_2$ dobivamo

$$z_{2,k} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}, \quad k = 0,1,2,3. \qquad (***)$$ 2 boda

Iz (***) slijedi:

za $k=0$, $z_{2,0} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$,

za $k=1$, $z_{2,1} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$,

za $k=2$, $z_{2,2} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$,

za $k=3$, $z_{2,3} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$.

Iz uvjeta $\operatorname{Re} z > 0$ slijedi da su rješenja $z_{2,0}$ i $z_{2,3}$. 2 boda

Dakle, tražena rješenja su:

$$z \in \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right),\ \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right\}.$$