Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

1. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC nalaze se točke P_1, P_2 i P_3 tako da vrijedi

$$|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3B| = \frac{1}{4}|AB|.$$

Tim točkama povučene su paralele sa stranicom $\overline{BC}$, koje dijele trokut na četiri dijela. Površina dijela koji se nalazi između paralela kroz P_2 i P_3 iznosi 5.

Kolika je površina trokuta ABC?

2. Dokaži da ne postoje pozitivni realni brojevi x i y za koje vrijedi

$$(x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2(x + y) = 2.$$

3. Odredi sve prirodne brojeve $n > 2$ za koje postoji djelitelj d broja n takav da je

$$n = a^3 + d^3,$$

pri čemu je a najmanji djelitelj broja n veći od 1.

4. Osnovica $\overline{BC}$ je najdulja stranica jednakokračnog trokuta ABC. Neka je M točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BM| = |AB|$. Nožište okomice iz točke M na $\overline{AB}$ je točka N.

Dokaži da trokut BMN i četverokut $ACMN$ imaju jednake površine i jednake opsege.

5. Na stolu su 42 kamenčića. Dva igrača naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić.

Koji igrač sigurno može pobijediti?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

1. Odredi vrijednost realnog parametra p tako da rješenja jednadžbe

$$(p-3)x^2 + (p^2+1)x - 11p + 18 = 0$$

budu duljine kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $\sqrt{17}$.

2. Odredi sve parove (a, n) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$3a^2 + 2^n = a^4.$$

3. Dokaži da za nenegativne realne brojeve a i b takve da je $a + b \leqslant 2$ vrijedi

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leqslant \frac{2}{1+ab}.$$

Kada se postiže jednakost?

4. Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ duljine 2. Neka je T diralište tangente iz točke A na kružnicu promjera $\overline{PB}$. Odredi duljinu $|PT|$.

5. Na ploču dimenzija 8×8 postavljeni su kraljevi i topovi, tako da nijedna figura nije napadnuta. Kralj napada susjedna polja (njih osam, osim kada je na rubu ploče), a top napada sva polja u retku i stupcu u kojem se nalazi. Koliko je najviše figura na ploči ako je broj topova jednak broju kraljeva?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

1. Riješi jednadžbu

$$\cos(2x) + \cos(2y) + 2\sin x \sin y + 2\cos x \cos y = 4.$$

2. Četiri sfere polumjera R leže na bazi stošca tako da svaka dodiruje dvije od preostalih sfera te plašt stošca. Peta sfera istog polumjera dodiruje prve četiri sfere i plašt stošca. Odredi volumen tog stošca.

3. Odredi sve uređene parove (m, n) prirodnih brojeva za koje postoji prost broj p takav da vrijedi

$$9^m + 3^m - 2 = 2p^n.$$

4. Unutar trokuta ABC nalazi se točka T takva da vrijedi $|AT| = 56$, $|BT| = 40$, $|CT| = 35$. Nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta ABC vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Odredi kut $\sphericalangle ABC$.

5. Za par brojeva $\{a, b\}$ kažemo da ima težinu $|a-b|$. Na koliko se načina skup $\{1, 2, \ldots, 12\}$ može razdijeliti na šest parova tako da ukupan zbroj težina tih parova bude 30?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

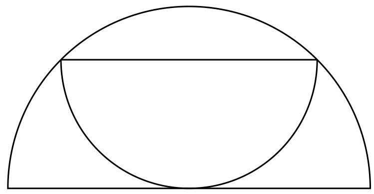
4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

1. Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) takve da je $b \geqslant 0$ i

$$a^2 + 2ab + b! = 131.$$

2. Za polukrug kažemo da je *pravilno smješten* u veći polukrug ako su im promjeri paralelni, krajevi promjera manjeg polukruga leže na polukružnici većeg polukruga i polukružnica manjeg polukruga dodiruje promjer većeg polukruga.



Dan je niz polukrugova $K_1, K_2, K_3, \ldots$, pri čemu je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, polukrug K_{n+1} pravilno smješten u polukrug K_n. Područje koje pripada polukrugu K_n i ne pripada polukrugu K_{n+1} obojeno je plavom ako je n neparan, a žutom bojom ako je n paran broj.

Polumjer polukruga K_1 iznosi 1. Odredi ukupnu površinu obojenu plavom bojom.

3. Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

4. Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{aligned}(x^2+1)y &= z^2+1\\(y^2+1)z &= x^2+1\\(z^2+1)x &= y^2+1.\end{aligned}$$

5. Na šahovskom turniru sudjelovali su dječaci i djevojčice. Svaki je natjecatelj odigrao po jednu partiju sa svakim drugim natjecateljem, a nijedna partija nije završila neodlučenim rezultatom. Odredi najmanji mogući broj natjecatelja na turniru ako je poznato da je svaka djevojčica pobijedila barem 21 dječaka i da je svaki dječak pobijedio barem 12 djevojčica.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.