ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC nalaze se točke P_1, P_2 i P_3 tako da vrijedi

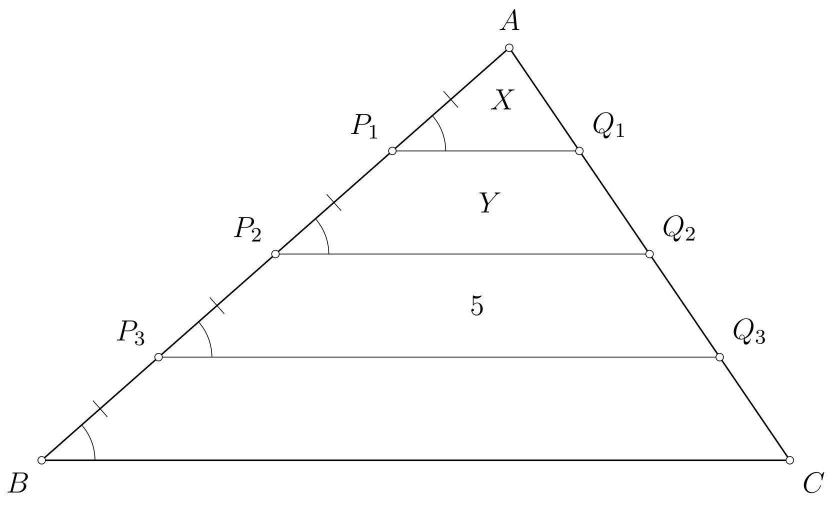
$$|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3B| = \frac{1}{4}|AB|.$$

Tim točkama povučene su paralele sa stranicom $\overline{BC}$, koje dijele trokut na četiri dijela. Površina dijela koji se nalazi između paralela kroz P_2 i P_3 iznosi 5.

Kolika je površina trokuta ABC?

Prvo rješenje.

Označimo s Q_1, Q_2 i Q_3 redom točke u kojima paralele kroz P_1, P_2 i P_3 sijeku stranicu $\overline{CA}$, kao na slici.



Budući da je $BC \parallel P_iQ_i$ za $i = 1, 2, 3$, zaključujemo da je

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AP_1Q_1 = \sphericalangle AP_2Q_2 = \sphericalangle AP_3Q_3. \qquad \text{1 bod}$$

Također, trokuti ABC, AP_1Q_1, AP_2Q_2 i AP_3Q_3 imaju zajednički kut u vrhu A, pa prema K–K poučku o sličnosti zaključujemo da su ti trokuti slični. 2 boda

Neka su X i Y redom površine trokuta AP_1Q_1 i četverokuta $P_1P_2Q_2Q_1$.

Budući da je $|AB| = 4|AP_1|$, slijedi da je površina trokuta ABC jednaka $16X$. 1 bod

Budući da je $|AP_2| = 2|AP_1|$, slijedi $X + Y = 4X$. 1 bod

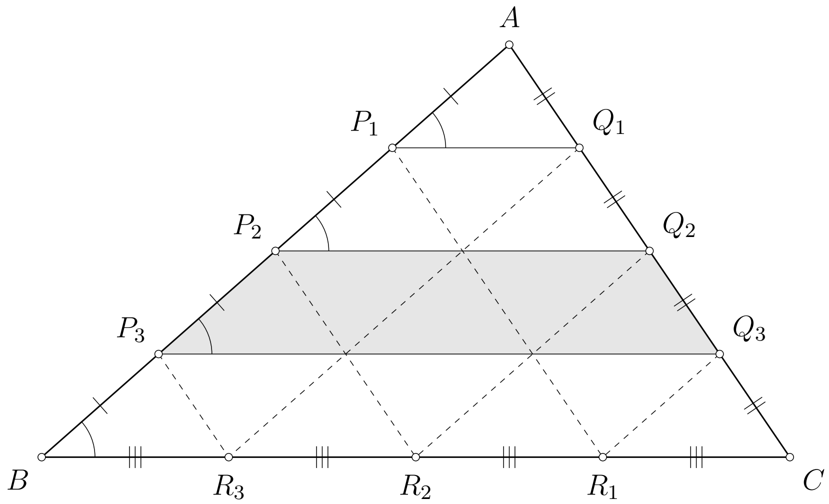
Također, budući da je $|AP_3| = 3|AP_1|$, vrijedi $X + Y + 5 = 9X$. 1 bod

Iz posljednje dvije jednakosti slijedi $4X + 5 = 9X$, tj. $X = 1$. 3 boda

Stoga je površina trokuta ABC jednaka 16. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo s Q_1, Q_2 i Q_3 redom točke u kojima paralele kroz P_1, P_2 i P_3 sijeku stranicu $\overline{CA}$. Budući da točke P_1, P_2 i P_3 dijele dužinu $\overline{AB}$ na četiri jednaka dijela, zbog Talesovog teorema o proporcionalnosti i točke Q_1, Q_2 i Q_3 dijele dužinu $\overline{AC}$ na četiri jednaka dijela. Slično, povucimo kroz P_1, P_2 i P_3 paralele sa stranicom $\overline{CA}$ i označimo točke u kojima sijeku stranicu $\overline{BC}$ redom s R_1, R_2 i R_3, kao na slici. 1 bod



Budući da su pravci P_1R_1, P_2R_2 i P_3R_3 paralelni s pravcem AC, točke R_1, R_2 i R_3 dijele dužinu $\overline{CB}$ na četiri jednaka dijela. Sada po obratu Talesovog teorema zaključujemo da su pravci Q_1R_3, Q_2R_2 i Q_3R_1 paralelni s pravcem AB. 2 boda

Na taj način smo trokut ABC podijelili na mrežu manjih trokuta čije stranice leže na pravcima paralelnim stranicama trokuta ABC. Budući da svi ti manji trokuti imaju iste kutove kao trokut ABC, oni su slični. 2 boda

Usto, susjedni trokuti u toj mreži imaju zajedničku stranicu, pa zaključujemo da su svi ti manji trokuti sukladni. 2 boda

Četverokut $P_2P_3Q_3Q_2$ se sastoji od pet manjih trokuta, pa zaključujemo da svaki manji trokut ima površinu 1. 2 boda

Budući da se trokut ABC sastoji od ukupno 16 manjih trokuta površine 1, površina trokuta ABC je jednaka 16. 1 bod

Napomena: Moguće je i krenuti od točaka R_1, R_2 i R_3 koje dijele dužinu $\overline{CB}$ na četiri jednaka dijela, pa argumentirati da su pravci P_1R_1, Q_3R_1 itd. paralelni s odgovarajućim stranicama.

Zadatak A-1.2.

Dokaži da ne postoje pozitivni realni brojevi x i y za koje vrijedi

$$(x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2(x + y) = 2.$$

Rješenje.

Izraze $x^2 + y^2$ i $x^3 + y^3$ možemo (koristeći $x + y = 1$) zapisati kao

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2xy, \qquad \text{1 bod}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \cdot (1 - 2xy - xy) = 1 - 3xy. \qquad \text{2 boda}$$

Stoga iz

$$(1 - 3xy)(1 - 2xy) = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2$$

sređivanjem dobivamo

$$6x^2y^2 - 5xy - 1 = 0,$$

što rastavljanjem srednjeg člana na $-6xy + xy$ možemo faktorizirati kao

$$(6xy + 1)(xy - 1) = 0. \qquad \text{3 boda}$$

Budući da su x i y pozitivni, očito je $xy > 0$, pa je $6xy + 1 \neq 0$. 1 bod

Zaključujemo da je $xy - 1 = 0$, odnosno $xy = 1$. Uvrštavanjem $y = 1 - x$ dobivamo $x(1 - x) = 1$, tj. $x^2 - x + 1 = 0$. Nadopunjavanjem na potpun kvadrat dobivamo

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0,$$

što nema rješenja u skupu realnih brojeva. Dakle, ne postoje takvi x i y. 3 boda

Napomena: Izraz $x^3 + y^3$ se može rastaviti i na sljedeći način:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 1 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy.$$

Učenik može obrazložiti da slučaj $xy = 1$ nema rješenja na više načina. Primjerice, budući da su $x, y > 0$, iz $x + y = 1$ zaključujemo da mora biti $x < 1$ i $y < 1$. Slijedi $xy < 1$, čime dolazimo do kontradikcije.

Zadatak A-1.3.

Odredi sve prirodne brojeve $n > 2$ za koje postoji djelitelj d broja n takav da je

$$n = a^3 + d^3,$$

pri čemu je a najmanji djelitelj broja n veći od 1.

Prvo rješenje.

Ako pretpostavimo da je n neparan, onda su i njegovi djelitelji neparni, kao i njihovi kubovi, pa to znači da je $a^3 + d^3$ paran broj. S druge strane, zbog $n = a^3 + d^3$ vidimo da je to nemoguće. Prema tome, n mora biti paran. 3 boda

Za parne brojeve, najmanji pozitivni djelitelj veći od 1 je 2, tj. $a = 2$. 2 boda

Ako je d djelitelj broja n, onda je i djelitelj broja $n - d^3$. 2 boda

Iz $n - d^3 = a^3 = 8$ slijedi $d \mid 8$, pa su jedini mogući kandidati $d = 1, 2, 4, 8$. 1 bod

Za $d = 1$ slijedi $n = 9$, što nije rješenje jer n mora biti paran broj. 1 bod

Iz ostalih mogućnosti $d = 2, 4, 8$ redom dobivamo rješenja $n = 16$, $n = 72$ i $n = 520$. 1 bod

Drugo rješenje.

Uočimo da je a prost broj. 1 bod

Budući da a dijeli $a^3 = n - d^3$ i n, mora dijeliti i d^3. Kako je ujedno i prost, posebno vrijedi da a dijeli d. 1 bod

S druge strane, d dijeli $d^3 = n - a^3$ i n, pa mora dijeliti i a^3. 2 boda

Kako je a prost i dijeli d, jedine mogućnosti su $d = a$, $d = a^2$ i $d = a^3$. 1 bod

Ako je $d = a$, onda je $n = 2a^3$, pa je n paran i mora vrijediti $a = 2$, $n = 16$. 1 bod

Ako je $d = a^2$, onda je $n = a^3 + a^6 = a^3(1 + a^3)$. Budući da su a^3 i $1 + a^3$ različite parnosti, zaključujemo da je n paran i mora vrijediti $a = 2$, $n = 72$. 2 boda

Ako je $d = a^3$, onda je $n = a^3(1 + a^6)$, pa slično zaključujemo da je $a = 2$, $n = 520$. 2 boda

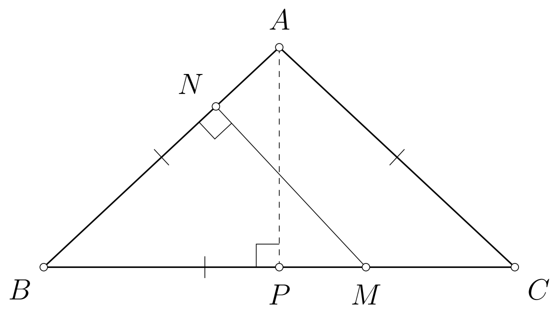
Zadatak A-1.4.

Osnovica $\overline{BC}$ je najdulja stranica jednakokračnog trokuta ABC. Neka je M točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BM| = |AB|$. Nožište okomice iz točke M na $\overline{AB}$ je točka N.

Dokaži da trokut BMN i četverokut $ACMN$ imaju jednake površine i jednake opsege.

Rješenje.

Neka je P polovište osnovice $\overline{BC}$. 1 bod



Budući da je trokut ABC jednakokračan, $\overline{AP}$ je njegova visina i vrijedi $\sphericalangle BPA = 90°$. 1 bod

Usto je $P_{ABP} = \frac{1}{2} P_{ABC}$. 1 bod

Trokuti ABP i MBN imaju zajednički kut $\sphericalangle ABP = \sphericalangle MBN$, oba imaju pravi kut ($\sphericalangle BPA = 90° = \sphericalangle BNM$) i vrijedi $|AB| = |MB|$, pa po K–S–K poučku o sukladnosti zaključujemo da su ti trokuti sukladni. 3 boda

Budući da sukladni trokuti imaju jednake površine, zaključujemo da je $P_{ABP} = P_{MBN}$, odnosno $P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{ABC}$. 1 bod

Slijedi

$$P_{ACMN} = P_{ABC} - P_{MBN} = P_{ABC} - \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2}P_{ABC} = P_{MBN}.$$ 1 bod

Nadalje, iz ranije pokazane sukladnosti imamo

$$|NB| + |BM| = |PB| + |BA| = \frac{1}{2}O_{ABC},$$ 1 bod

pa je i

$$\begin{aligned} O_{ACMN} &= O_{ABC} - |NB| - |BM| + |MN| \\ &= O_{ABC} - \frac{1}{2}O_{ABC} + |MN| = \frac{1}{2}O_{ABC} + |MN| \\ &= |NB| + |BM| + |MN| = O_{MBN}. \end{aligned}$$ 1 bod

Napomena: Alternativno, umjesto sukladnosti trokuta ABP i MBN može se dokazati i koristiti sukladnost trokuta APM i MNA.

Zadatak A-1.5.

Na stolu su 42 kamenčića. Dva igrača naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić.

Koji igrač sigurno može pobijediti?

Prvo rješenje.

Prvi igrač može pobijediti sa sljedećom strategijom: ostavit će protivniku redom 31, 15, 7, 3 i 1 kamenčić. 6 bodova

U prvom potezu uzme 11 kamenčića. Tada drugi igrač mora uzeti između 1 i 15 kamenčića, čime će na stolu ostati između 16 i 30 kamenčića. Koliko god da ih ostane, prvi igrač može uzeti dovoljno da ih na stolu nakon njegovog poteza ostane 15.

Kada je na stolu 15 kamenčića, drugi igrač mora uzeti između 1 i 7 kamenčića, čime će na stolu ostati između 8 i 14 kamenčića. Koliko god da ih ostane, prvi igrač može uzeti dovoljno da ih na stolu nakon njegovog poteza ostane 7.

Kada je na stolu 7 kamenčića, drugi igrač mora uzeti između 1 i 3 kamenčića, čime će na stolu ostati između 4 i 6 kamenčića. Koliko god da ih ostane, prvi igrač može uzeti dovoljno da ih na stolu nakon njegovog poteza ostane 3.

Kada su na stolu 3 kamenčića, drugi igrač može uzeti samo točno 1 kamenčić, čime na stolu ostaju 2 kamenčića. Prvi igrač tada uzima 1 kamenčić, ostavlja jedan na stolu i time pobjeđuje. 4 boda

Drugo rješenje.

Sigurno može pobijediti prvi igrač.

Promotrimo situaciju u kojoj su na potezu nekog igrača na stolu 3 kamenčića. Tada taj igrač smije uzeti samo točno 1 kamenčić pa preostalom igraču ostaju na stolu 2 kamenčića, od kojih on uzima točno jedan i pobjeđuje. Prema tome, igrač koji na svom potezu (prije uzimanja) ima 3 kamenčića na stolu sigurno gubi. 2 boda

Nadalje, promotrimo situaciju u kojoj je na potezu nekog igrača na stolu 7 kamenčića. Tada taj igrač smije uzeti najmanje 1, a najviše 3 kamenčića. U svakom od tih slučajeva, preostali igrač može uzeti točno onoliko kamenčića koliko je potrebno da ostavi 3 kamenčića na stolu i, prema prethodnom, pobijedi. Prema tome, igrač koji na svom potezu (prije uzimanja) ima 7 kamenčića na stolu sigurno gubi. 2 boda

Slično, promotrimo situaciju u kojoj je na potezu nekog igrača na stolu 15 kamenčića. Tada taj igrač smije uzeti najmanje 1, a najviše 7 kamenčića. U svakom od tih slučajeva, preostali igrač može uzeti točno onoliko kamenčića koliko je potrebno da ostavi 7 kamenčića na stolu i, prema prethodnom, pobijedi. Prema tome, igrač koji na svom potezu (prije uzimanja) ima 15 kamenčića na stolu sigurno gubi. 2 boda

Konačno, promotrimo situaciju u kojoj je na potezu nekog igrača na stolu 31 kamenčić. Tada taj igrač smije uzeti najmanje 1, a najviše 15 kamenčića. U svakom od tih slučajeva, preostali igrač može uzeti točno onoliko kamenčića koliko je potrebno da ostavi 15 kamenčića na stolu i, prema prethodnom, pobijedi. Prema tome, igrač koji na svom potezu (prije uzimanja) ima 31 kamenčić na stolu sigurno gubi. 2 boda

Uočimo sada da prvi igrač u prvom potezu može uzeti najmanje 1, a najviše 21 kamenčić. Posebno, prvi igrač može uzeti točno 11 kamenčića i ostaviti drugom igraču 31 kamenčić na stolu. Prema prethodno dokazanom, u tom slučaju drugi igrač sigurno gubi, a prvi igrač pobjeđuje. 2 boda

Napomena: Gore navedena strategija je jedina pobjednička. Ako prvi igrač u bilo kojem potezu odstupi od te strategije, drugi igrač može preuzeti pobjedničku strategiju.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi vrijednost realnog parametra p tako da rješenja jednadžbe

$$(p-3)x^2+(p^2+1)x-11p+18=0$$

budu duljine kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $\sqrt{17}$.

Rješenje.

Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane jednadžbe. Uvjet zadan u zadatku tada glasi $x_1^2+x_2^2=17$. Prema Vièteovim formulama imamo

$$x_1+x_2=-\frac{p^2+1}{p-3} \qquad \text{i} \qquad x_1x_2=\frac{-11p+18}{p-3}$$ 1 bod

pa je

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{p^2+1}{p-3}\right)^2-2\cdot\frac{-11p+18}{p-3}.$$ 3 boda

Zbog toga tražimo sve realne brojeve p takve da vrijedi

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{p^2+1}{p-3}\right)^2-2\cdot\frac{-11p+18}{p-3}=17\\
\iff\ &(p^2+1)^2-2(-11p+18)(p-3)=17(p-3)^2\\
\iff\ &p^4+7p^2-44=0.
\end{aligned}$$ 2 boda

Zamjenom $t=p^2$ dolazimo do kvadratne jednadžbe

$$t^2+7t-44=0$$

čija su rješenja $t=4$ i $t=-11$. 1 bod

Budući da jednadžba $p^2=-11$ nema rješenja odbacujemo drugu opciju. Prva opcija vodi do $p^2=4$, odnosno $p=\pm2$. 1 bod

Rješavanjem početne jednadžbe za $p=-2$ dobivamo rješenja $x_{1,2}=\frac{1-\sqrt{33}}{2}$ od kojih jedno nije pozitivan broj, stoga opciju $p=-2$ odbacujemo. 1 bod

Rješavanjem jednadžbe za $p=2$ dobivamo da su $x_1=1$ i $x_2=4$ doista pozitivni realni brojevi. Zbog toga je jedino rješenje $p=2$. 1 bod

Zadatak A-2.2.

Odredi sve parove (a, n) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$3a^2 + 2^n = a^4.$$

Prvo rješenje.

Iz početnog uvjeta čitamo $2^n = a^4 - 3a^2$, to jest $2^n = a^2(a^2 - 3)$. 3 boda

Uočimo da su a^2 i a^2-3 suprotne parnosti. S druge strane, budući da je njihov umnožak jednak 2^n, jedini prosti faktor koji se može pojaviti je 2. Zbog toga zaključujemo da je manji od dva faktora jednak 1, a veći 2^n.

Drugim riječima, imamo

$$a^2 - 3 = 1 \qquad \text{i} \qquad a^2 = 2^n.$$ 5 bodova

Iz prve jednadžbe, jer je $a > 0$, dobivamo $a = 2$, pa iz druge slijedi $n = 2$. 2 boda

Zaključujemo da je jedino rješenje $(a, n) = (2, 2)$.

Drugo rješenje.

Neka je (a, n) cjelobrojno rješenje zadane jednadžbe. Tada je a^2 rješenje kvadratne jednadžbe $3x + 2^n = x^2$, to jest $x^2 - 3x - 2^n = 0$. 1 bod

Da bi kvadratna jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima imala cjelobrojno rješenje, njezina diskriminanta mora biti kvadrat cijelog broja. Dakle, postoji cijeli broj k takav da je $9 + 4 \cdot 2^n = k^2$. 1 bod

Odavde je $2^{n+2} = (k - 3)(k + 3)$. 1 bod

Zaključujemo da su $k-3$ i $k+3$ potencije broja 2. Nadalje, uočimo da najveći zajednički djelitelj M brojeva $k - 3$ i $k + 3$ dijeli $(k + 3) - (k - 3) = 6$. Istovremeno M mora biti potencija broja 2. Zbog toga je jedina mogućnost

$$k - 3 = 2 \qquad \text{i} \qquad k + 3 = 2^{n+1}.$$ 4 boda

Iz prve jednadžbe je $k = 5$, pa iz druge slijedi $n = 2$. 1 bod

Uvrštavanjem $n = 2$ u početnu jednadžbu sada dolazimo do kvadratne jednadžbe $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Njezina rješenja su $x = 4$ i $x = -1$. Kako je $x = a^2$, drugo rješenje odbacujemo. 1 bod

Iz prvog slijedi $a^2 = 4$, to jest $a = 2$, budući da je a prirodan broj. 1 bod

Zaključujemo da je jedino rješenje početne jednadžbe $(a, n) = (2, 2)$.

Zadatak A-2.3.

Dokaži da za nenegativne realne brojeve a i b takve da je $a + b \leqslant 2$ vrijedi

$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \leqslant \frac{2}{1 + ab}.$$

Kada se postiže jednakost?

Prvo rješenje.

Nazivnici $1+a^2$, $1+b^2$ i $1+ab$ su pozitivni pa je početna nejednakost ekvivalentna s

$$(1+b^2)(1+ab)+(1+a^2)(1+ab) \leqslant 2(1+a^2)(1+b^2).$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

$$1+ab+b^2+ab^3+1+ab+a^2+a^3b-2-2a^2b^2-2a^2-2b^2 \leqslant 0$$

odnosno

$$\begin{aligned} ab^3+2ab+a^3b-2a^2b^2-a^2-b^2 &\leqslant 0 \\ ab(b-a)^2-(b-a)^2 &\leqslant 0 \\ (b-a)^2(ab-1) &\leqslant 0. \end{aligned}$$

5 bodova

Očito vrijedi $(b-a)^2 \geqslant 0$. 1 bod

Također, primjenom nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine dobivamo $ab \leqslant \dfrac{1}{4}(a+b)^2$. 1 bod

Prema uvjetu zadatka slijedi $ab \leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2 \leqslant \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$. 1 bod

Time je nejednakost $(b-a)^2(ab-1) \leqslant 0$ dokazana, a ona je ekvivalentna zadanoj nejednakosti, pa smo dokazali da vrijedi nejednakost iz zadatka.

Jednakost u početnoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $(b-a)^2(ab-1)=0$, odnosno $a=b$ ili $ab=1$. Iz dokaza nejednakosti $ab \leqslant 1$ vidimo da se jednakost $ab=1$ postiže samo ako je $a=b$ i $a+b=2$, odakle je $a=b=1$. Time smo dokazali da se jednakost postiže ako i samo ako je $0 \leqslant a=b \leqslant 1$. 2 boda

Napomena: Umjesto nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine možemo koristiti

$$0 \leqslant (a-b)^2 \iff 0 \leqslant a^2-2ab+b^2 \iff 4ab \leqslant a^2+2ab+b^2 \iff 4ab \leqslant (a+b)^2.$$

Drugo rješenje.

Imamo

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}=1+\frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}$$

Uočimo da vrijedi $(1+ab)^2 \leqslant (1+a^2)(1+b^2)$ jer je

$(1+ab)^2 \leqslant (1+a^2)(1+b^2) \iff 1+2ab+a^2b^2 \leqslant 1+a^2+b^2+a^2b^2 \iff 0 \leqslant (a-b)^2$. 2 boda

Kao u prvom rješenju pokazujemo da je $ab \leqslant 1$, tj. $1-a^2b^2 \geqslant 0$. 2 boda

Zbog toga je

$$1+\frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \leqslant 1+\frac{1-a^2b^2}{(1+ab)^2}=1+\frac{1-ab}{1+ab}=\frac{2}{1+ab}.$$

4 boda

Time smo dokazali traženu nejednakost.

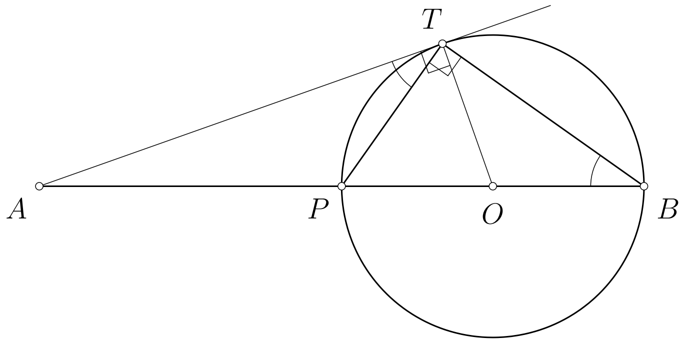
Kao u prvom rješenju vidimo da se jednakost postiže ako i samo ako je $a=b$, te su $a, b \in [0,1]$. 2 boda

Zadatak A-2.4.

Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ duljine 2. Neka je T diralište tangente iz točke A na kružnicu promjera $\overline{PB}$. Odredi duljinu $|PT|$.

Prvo rješenje.

Neka je O polovište dužine $\overline{PB}$. Iz uvjeta zadatka je jasno da je $|AP| = |BP| = 1$.



Budući da je AT tangenta, vrijedi da je $\sphericalangle ATP = \sphericalangle PBT$. Zaista, imamo

$$\sphericalangle ATP = 90° - \sphericalangle PTO = 90° - \sphericalangle TPO = 90° - \sphericalangle TPB = \sphericalangle TBP.$$ 2 boda

Ovdje prva jednakost slijedi iz činjenice da je AT tangenta, a $\overline{PT}$ polumjer kružnice (stoga je $\sphericalangle ATO = 90°$). Druga jednakost vrijedi jer je trokut OPT jednakokračan, treća je očita, a posljednja vrijedi jer je po Talesovom poučku trokut BPT pravokutan.

Trokuti PAT i TAB imaju zajednički kut u vrhu A, pa zbog $\sphericalangle ATP = \sphericalangle TBP$, po K–K poučku, zaključujemo da su ti trokuti slični. 2 boda

Zato vrijedi

$$\frac{|PT|}{|BT|} = \frac{|AT|}{|AB|} = \frac{|AP|}{|AT|}.$$ 2 boda

Iz toga dobivamo

$$|AT|^2 = |AB||AP| = 2, \qquad \text{tj.} \quad |AT| = \sqrt{2}.$$ 1 bod

Također, slijedi da je

$$\frac{|PT|}{|BT|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{tj.} \quad |BT| = \sqrt{2}|PT|.$$ 1 bod

Već smo komentirali da je trokut PTB pravokutan. Zato po Pitagorinom poučku imamo

$$|PT|^2 + |BT|^2 = |PB|^2 = 1.$$ 1 bod

Uvrštavanje $|BT| = \sqrt{2}|PT|$ slijedi $3|PT|^2 = 1$, pa je konačno $|PT| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 1 bod

Napomena: Tvrdnja da je $\sphericalangle ATP = \sphericalangle PBT$ naziva se poučak o kutu tetive i tangente, te se može koristiti bez dokaza ako se navede ime poučka (ili da je to poznata tvrdnja).

Iz $|AT| = \sqrt{2}$, $|PT|^2 + |TB|^2 = 1$ i $|AB| = 2$ možemo direktno izračunati da je $|PT| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ koristeći formulu za duljinu težišnice (ili Stewartov poučak) u trokutu ATB:

$$4|PT|^2 = |AT|^2 + 2|BT|^2 - |AB|^2.$$

Drugo rješenje.

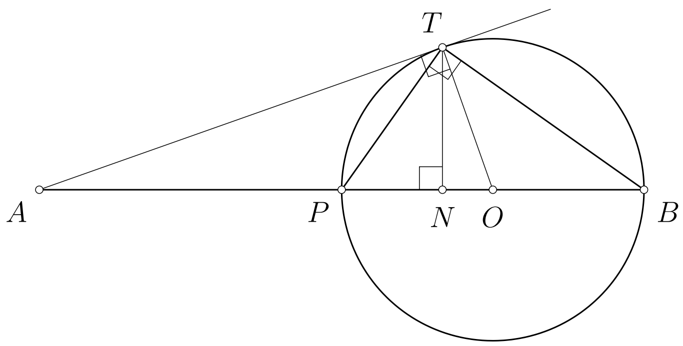
Neka je O polovište dužine $\overline{PB}$. Iz uvjeta zadatka je jasno da je $|AP| = |BP| = 1$, $|PO| = |OB| = \frac{1}{2}$.

Trokut ATO je pravokutan zbog činjenice da je polumjer okomit na tangentu. Zato po Pitagorinom poučku slijedi $|AT|^2 + |OT|^2 = |AO|^2$, pa uvrštavanjem $|OT| = 1$ i $|AO| = \frac{3}{2}$, slijedi

$$|AT| = \sqrt{2}.$$ 2 boda

Neka je N nožište okomice iz T na PB. 1 bod

Označimo $|PN| = x$. Tada je $|BN| = |BP| - |PN| = 1 - x$.



Trokut PTB je pravokutan jer je $\overline{PB}$ promjer kružnice. Primjenom Euklidovog poučka na trokut PTB dobivamo

$$|NT|^2 = |PN| \cdot |NB| = x(1-x).$$ 2 boda

Po Pitagorinom poučku za trokut ATN slijedi $(1+x)^2 + x(1-x) = 2$.

Slijedi $1 + 3x = 2$, tj. $x = \frac{1}{3}$ 2 boda

Sada direktno slijedi iz ranijih jednakosti slijedi

$$|NB| = 1 - x = \frac{2}{3} \qquad \text{i} \qquad |NT| = \sqrt{x(1-x)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$ 1 bod

Iskoristimo li još Pitagorin poučak u trokutu PTN, slijedi $|PN|^2 + |NT|^2 = |PT|^2$. 1 bod

Konačno uvrštavanjem $|PN|$ i $|NT|$, dobivamo

$$|PT| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ 1 bod

Napomena: Tvrdnju $|AT|^2 = |AP| \cdot |AB|$ možemo argumentirati promatrajući potenciju točke A ili koristeći sličnost trokuta APT i ATB, kao u prvom rješenju.

Stewartov poučak možemo primijeniti direktno na trokut ATO. Tako dobivamo

$$|AP| \cdot |TO|^2 + |OP| \cdot |AT|^2 = |AO| \cdot (|PT|^2 + |AP| \cdot |PO|).$$

Ako prethodno izračunamo $|AT| = \sqrt{2}$, odavde lako dobivamo $|PT|$.

Zadatak A-2.5.

Na ploču dimenzija 8×8 postavljeni su kraljevi i topovi, tako da nijedna figura nije napadnuta. Kralj napada susjedna polja (njih osam, osim kada je na rubu ploče), a top napada sva polja u retku i stupcu u kojem se nalazi. Koliko je najviše figura na ploči ako je broj topova jednak broju kraljeva?

Rješenje.

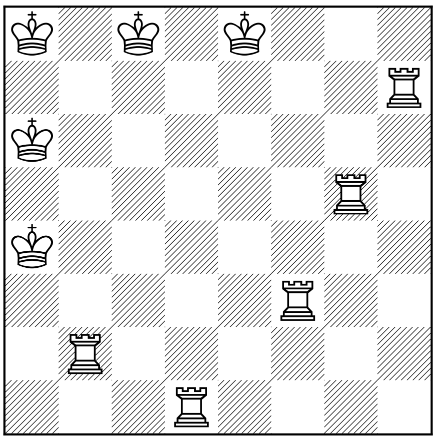
Jedan top pokriva svoje polje i napada po 7 dodatnih polja u svom retku i stupcu. 1 bod

Drugi top pokriva svoje polje i napada po 6 dodatnih polja u svom retku i stupcu (ne brojeći ona koja već napada prvi top). 1 bod

Nastavljajući dalje, šesti top pokriva svoje polje i po 2 dodatna polja u svom retku i stupcu. Ukupno je $15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 = 60$ pokrivenih ili napadnutih polja. 2 boda

Dakle, ako stavimo šest topova, ostaju samo 4 slobodna polja na koja nikako ne možemo postaviti šest kraljeva. 1 bod

Na slici je jedan valjan raspored pet kraljeva (♔) i pet topova (♖), pa je odgovor 10. 5 bodova



Napomena: U dokazu da nije moguće postaviti šest kraljeva i šest topova dovoljno je komentirati da je nakon postavljanja šest topova blokirano 6 redaka i 6 stupaca; zbog toga ostaju samo 4 slobodna polja.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Riješi jednadžbu

$$\cos(2x) + \cos(2y) + 2\sin x \sin y + 2\cos x \cos y = 4.$$

Prvo rješenje.

Primjenom adicijske formule dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$\cos(2x) + \cos(2y) + 2\cos(x - y) = 4.$$ 2 boda

Budući da je kosinus najviše 1, zaključujemo da je $\cos(2x) = \cos(2y) = \cos(x - y) = 1$. 4 boda

Slijedi da je $2x = 2n\pi$ za neki cijeli broj n i $2y = 2m\pi$ za neki cijeli broj m. 1 bod

Također i $x - y = (n - m)\pi$ mora biti cjelobrojni višekratnik od 2π, pa stoga n i m moraju biti iste parnosti. 2 boda

Stoga su rješenja $(x, y) = (2k\pi, 2l\pi)$ i $(x, y) = ((2k + 1)\pi, (2l + 1)\pi)$ za $k, l \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Računamo:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &+ \cos(2y) + 2\sin x \sin y + 2\cos x \cos y \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + \cos^2(y) - \sin^2(y) + 2\sin x \sin y + 2\cos x \cos y \\ &= (\cos x + \cos y)^2 - (\sin x - \sin y)^2.\end{aligned}$$

Prema tome, početna jednadžba ekvivalentna je s

$$(\cos x + \cos y)^2 = 4 + (\sin x - \sin y)^2.$$ 2 boda

Izraz na lijevoj strani jednakosti iznosi najviše 4, a na desnoj najmanje 4, pa svaka strana jednakosti mora biti jednaka 4, tj. mora vrijediti

$$|\cos x + \cos y| = 2 \qquad \text{i} \qquad \sin x - \sin y = 0.$$ 4 boda

Gornji uvjeti ekvivalentni su s

$$\cos x = \cos y = 1 \qquad \text{ili} \qquad \cos x = \cos y = -1.$$ 3 boda

Stoga su rješenja $(x, y) = (2k\pi, 2l\pi)$ i $(x, y) = ((2k + 1)\pi, (2l + 1)\pi)$ za $k, l \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Treće rješenje.

Primjenom formula za pretvorbu zbroja kosinusa u produkt i adicijske formule dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$2\cos(x-y)(\cos(x+y)+1)=4.$$ 2 boda

Budući da je kosinus najviše 1, zaključujemo da je $\cos(x-y)=1$ i $\cos(x+y)=1$. 4 boda

Slijedi da je $x-y=2n\pi$ za neki cijeli broj n i $x+y=2m\pi$ za neki cijeli broj m. 1 bod

Zbrajanjem dobivamo da je $x=(n+m)\pi$, što znači da je x cjelobrojni višekratnik broja π, a zbog prve jednadžbe slijedi da su x i y višekratnici iste parnosti. 2 boda

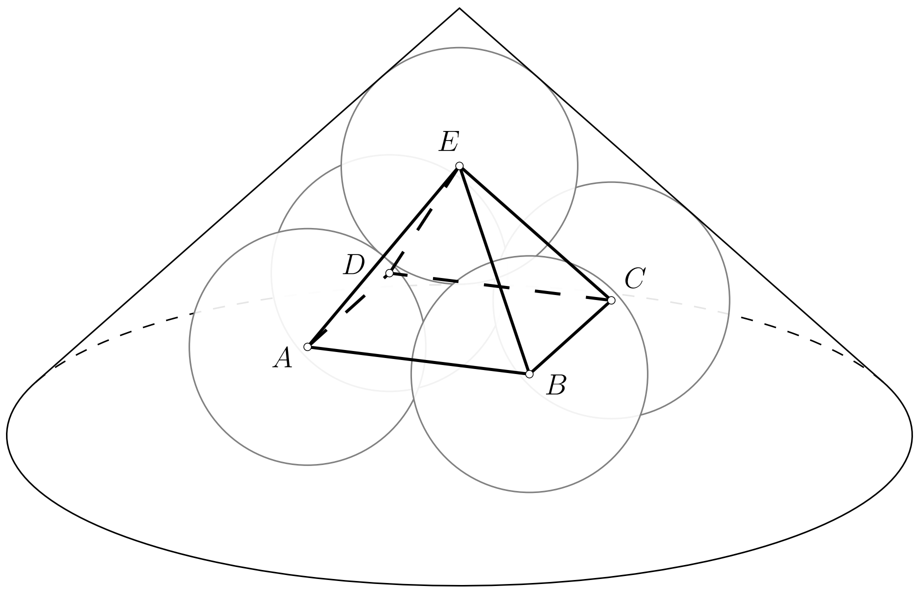
Sva rješenja su $(x,y)=(2k\pi,2l\pi)$ i $(x,y)=((2k+1)\pi,(2l+1)\pi)$ za $k,l\in\mathbb{Z}$. 1 bod

Zadatak A-3.2.

Četiri sfere polumjera R leže na bazi stošca tako da svaka dodiruje dvije od preostalih sfera te plašt stošca. Peta sfera istog polumjera dodiruje prve četiri sfere i plašt stošca. Odredi volumen tog stošca.

Rješenje.

Neka su A, B, C i D središta sfera koje leže na bazi stošca, a E središte pete sfere.

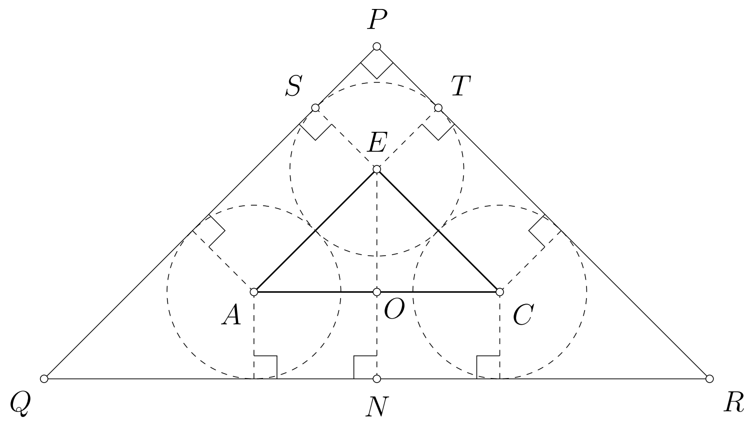


Tada je $ABCDE$ pravilna četverostrana piramida čiji su svi bridovi duljine $2R$. Stoga je $ABCD$ kvadrat i vrijedi $|AC|=2R\sqrt{2}$. 1 bod

Budući da je $|AE|=|CE|=2R$ i $|AC|=2R\sqrt{2}$, slijedi da je $\sphericalangle AEC=90^\circ$. 2 boda

Promotrimo presjek stošca s ravninom koja prolazi točkama A, C i E. 1 bod

Označimo vrh stošca s P, te neka su Q i R preostala dva vrha tog presjeka.



Budući da sfere sa središtima A, C i E diraju plašt stošca, slijedi $AE \parallel QP$ i $CE \parallel RP$, pa je $\sphericalangle QPR = 90^\circ$. 1 bod

Dakle, trokut QPR je jednakokračan pravokutan, pa je polumjer baze stošca jednak njegovoj visini. 1 bod

Neka su S i T redom dirališta pete sfere i izvodnica $\overline{QP}$ i $\overline{RP}$. Tada je četverokut $PSET$ kvadrat stranice duljine r i zaključujemo da je $|PE| = R\sqrt{2}$. 1 bod

Neka je O središte kvadrata $ABCD$, tj. polovište dužine $\overline{AC}$. Tada je

$$|OE| = \frac{1}{2}|AC| = R\sqrt{2}.$$ 1 bod

Konačno, neka je N nožište visine stošca, tj. polovište dužine $\overline{QR}$. Tada je $|ON| = R$ i zaključujemo da je visina stošca

$$\begin{aligned} v &= |PN| = |PE| + |EO| + |ON| \\ &= R\sqrt{2} + R\sqrt{2} + R \\ &= (1 + 2\sqrt{2})R. \end{aligned}$$ 1 bod

Sada je volumen stošca

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Bv \\ &= \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{2})^2 R^2\pi \cdot (1 + 2\sqrt{2})R \\ &= \frac{(1 + 2\sqrt{2})^3}{3} \cdot R^3\pi \\ &= \frac{25 + 22\sqrt{2}}{3} \cdot R^3\pi. \end{aligned}$$ 1 bod

Zadatak A-3.3.

Odredi sve uređene parove (m, n) prirodnih brojeva za koje postoji prost broj p takav da vrijedi

$$9^m + 3^m - 2 = 2p^n.$$

Prvo rješenje.

Faktorizacijom lijeve strane dobivamo

$$(3^m - 1)(3^m + 2) = 2p^n.$$ 2 boda

Kada bi oba faktora s lijeve strane jednakosti bila djeljiva s p, onda bi i njihova razlika

$$3^m + 2 - (3^m - 1) = 3$$

bila djeljiva s p, tj. vrijedilo bi $p = 3$. 2 boda

No, lijeva strana jednakosti nije djeljiva s 3, pa to nije moguće. 1 bod

Zaključujemo da p ne dijeli $3^m - 1$, tj. da je $3^m - 1 = 1$ ili $3^m - 1 = 2$. 3 boda

Prvi faktor je paran broj, pa mora biti $3^m - 1 = 2$ i $3^m + 2 = p^n$. 1 bod

Iz prve jednakosti je $m = 1$, pa uvrštavanjem u drugu dobivamo $p = 5$ i $n = 1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Faktorizacijom lijeve strane dobivamo

$$(3^m - 1)(3^m + 2) = 2p^n.$$ 2 boda

Najveći zajednički djelitelj brojeva $3^m - 1$ i $3^m + 2$ iznosi

$$M(3^m - 1, 3^m + 2) = M(3, 3^m + 2) = 1.$$ 3 boda

Stoga je $3^m - 1 = 2$ i $3^m + 2 = p^n$, ili je $3^m - 1 = 1$ i $3^m + 2 = 2p^n$. 3 boda

U prvom slučaju imamo $3^m = 3$, tj. $m = 1$, pa je $p = 5$ i $n = 1$. 1 bod

U drugom slučaju je $3^m - 1 = 1$, što nije moguće. 1 bod

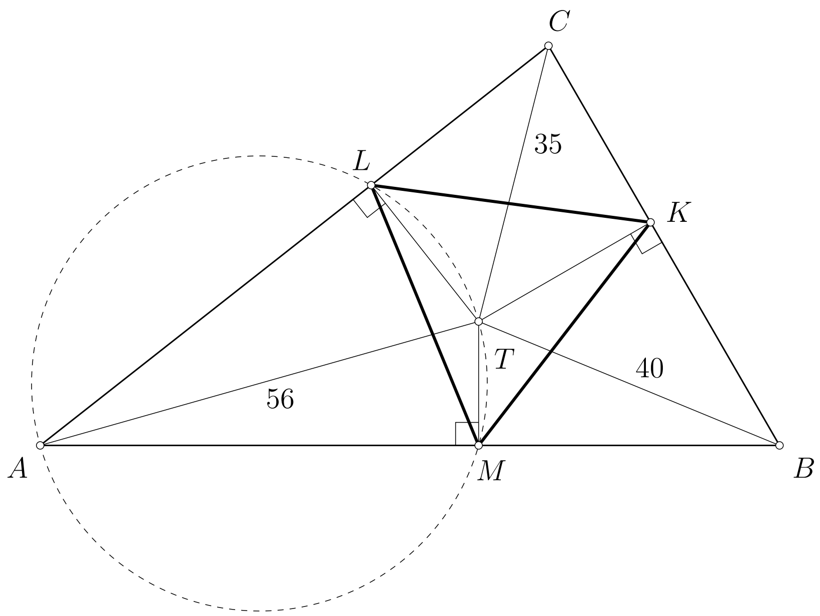
Jedino rješenje je $(n, m) = (1, 1)$.

Zadatak A-3.4.

Unutar trokuta ABC nalazi se točka T takva da vrijedi $|AT| = 56$, $|BT| = 40$, $|CT| = 35$. Nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta ABC vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Odredi kut $\sphericalangle ABC$.

Rješenje.

Neka su K, L i M redom nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, te neka je d duljina stranice jednakostraničnog trokuta KLM. Označimo na uobičajen način s α, β i γ veličine kutova, a s a, b i c duljine stranica trokuta ABC.



Uočimo da je četverokut $AMTL$ tetivan jer ima dva nasuprotna prava kuta. 1 bod

Dužina $\overline{AT}$ je promjer opisane kružnice tom četverokutu, pa vrijedi

$$d = |LM| = |AT| \sin\alpha = 56 \sin\alpha.$$ 2 boda

Analogno pokazujemo $d = 40 \sin\beta$ i $d = 35 \sin\gamma$. 2 boda

Koristeći poučak o sinusima za trokut ABC zaključujemo

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$$ 1 bod

i analogno $\frac{c}{b} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$. 1 bod

Prema poučku o kosinusu imamo $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$, pa dijeljenjem s b^2 dobivamo

$$1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cos\beta,$$

iz čega uvrštavanjem dobivenih omjera slijedi

$$1 = \frac{64}{49} + \frac{25}{49} - \frac{80}{49}\cos\beta.$$ 2 boda

Sređivanjem dobivamo $\cos\beta = \frac{1}{2}$, pa je $\beta = 60°$. 1 bod

Zadatak A-3.5.

Za par brojeva $\{a, b\}$ kažemo da ima težinu $|a-b|$. Na koliko se načina skup $\{1, 2, \ldots, 12\}$ može razdijeliti na šest parova tako da ukupan zbroj težina tih parova bude 30?

Rješenje.

Označimo parove s $\{a_i, b_i\}$ za $i = 1, 2, \ldots, 6$, pri čemu je a_i uvijek veći, a b_i manji broj u paru. Primijetimo da je zbroj svih brojeva

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_6 + b_6 = 1 + 2 + \cdots + 12 = 78.$$

S druge strane, zbroj težina je

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_6 - b_6) = 30.$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo da je $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_6) = 108$, odnosno, zbroj većih brojeva u svim parovima je 54. 3 boda

Budući da je $7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 3 \cdot 19 = 57$, slijedi da od tog zbroja treba oduzeti 3 kako bi zbroj bio 54. To možemo učiniti na tri načina.

i) Skup većih brojeva je $\{4, 8, 9, 10, 11, 12\}$. To znači da je skup manjih brojeva $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. U paru s brojem 4 može biti bilo koji od tri manja broja, a za preostale brojeve možemo proizvoljno odabrati manji broj u paru. To nam daje ukupno $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360$ načina. 2 boda

ii) Skup većih brojeva je $\{5, 7, 9, 10, 11, 12\}$. To znači da je skup manjih brojeva $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$. U paru s brojem 5 može biti bilo koji od četiri manja broja, a u paru s brojem 7 bilo koji od šest manjih brojeva osim onih u prvom paru (dakle, također četiri mogućnosti). U ovom slučaju imamo $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 384$ načina. 2 boda

iii) Skup većih brojeva je $\{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$. To znači da je skup manjih brojeva $\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$. Slično kao u prethodnim slučajevima, imamo $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360$ načina. 2 boda

Postoji ukupno $360 + 384 + 360 = 1104$ načina. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) takve da je $b \geqslant 0$ i

$$a^2 + 2ab + b! = 131.$$

Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu kao $a^2 + 2ab + b^2 + b! = 131 + b^2$, odnosno

$$(a+b)^2 = 131 + b^2 - b!.$$ 2 boda

Kako je lijeva strane nenengativna, mora biti $131 + b^2 \geqslant b!$. 2 boda

Primijetimo da je za $b = 6$, $167 = 131 + 6^2 < 6! = 720$. 1 bod

Dokažimo da ista nejednakost vrijedi i za sve $b \geqslant 6$, matematičkom indukcijom. Gore je dokazana baza. Pretpostavimo da je $131 + b^2 < b!$ za neki prirodni broj b. Tada je

$$\begin{aligned}(b+1)! &= b! \cdot (b+1)\\ &> (131 + b^2) \cdot (b+1) = b^3 + b^2 + 131b + 131\\ &> b^2 + 2b + 1 + 131\\ &= (b+1)^2 + 131.\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da je $b! > 131 + b^2$, za svaki prirodni broj $b \geqslant 6$. 2 boda

Dakle $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Uvrštavanjem $b = 0, 1, 2, 3, 4$ vidimo da niti jedan cijeli broj a ne zadovoljava jednakost. 2 boda

Konačno, uvrštavanjem $b = 5$ dobivamo jedina dva rješenja: $(a, b) \in \{(1, 5), (-11, 5)\}$.

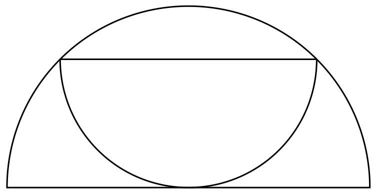
1 bod

Napomena: Nejednakost $131 + b^2 \geqslant b!$ može se dokazati i bez matematičke indukcije. Primjerice, za brojeve $b \geqslant 6$ vrijedi

$$b! \geqslant b \cdot (b-1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24(b^2 - b) \geqslant 12b^2 \geqslant b^2 + 11 \cdot 36 > b^2 + 131,$$

gdje smo iskoristili $2(b^2 - b) \geqslant b^2$, što je ekvivalentno $b(b-2) \geqslant 0$.

Zadatak A-4.2.



Za polukrug kažemo da je *pravilno smješten* u veći polukrug ako su im promjeri paralelni, krajevi promjera manjeg polukruga leže na polukružnici većeg polukruga i polukružnica manjeg polukruga dodiruje promjer većeg polukruga.

Dan je niz polukrugova $K_1, K_2, K_3, \ldots$, pri čemu je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, polukrug K_{n+1} pravilno smješten u polukrug K_n. Područje koje pripada polukrugu K_n i ne pripada polukrugu K_{n+1} obojeno je plavom ako je n neparan, a žutom bojom ako je n paran broj.

Polumjer polukruga K_1 iznosi 1. Odredi ukupnu površinu obojenu plavom bojom.

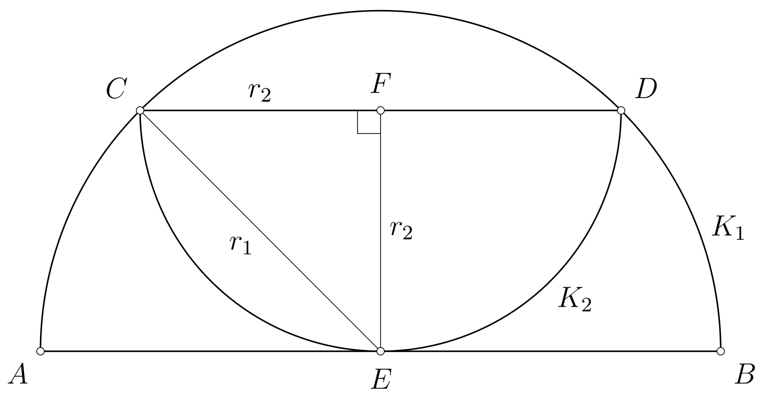
Prvo rješenje.

Neka je, za $n \in \mathbb{N}$, polumjer polukruga K_n jednak r_n i njegova površina jednaka P_n.

Neka je $\overline{AB}$ promjer polukruga K_1, $\overline{CD}$ promjer polukruga K_2, te neka je F polovište dužine $\overline{CD}$. Neka je točka E diralište polukružnice K_2 i pravca AB.

Tada je $\overline{EF}$ polumjer kružnice K_2, te je okomit na tangentu AB. Budući da su AB i CD paralelni, slijedi da su pravci CD i EF također okomiti. 1 bod

Budući da je F polovište dužine $\overline{CD}$, pravac EF je simetrala te dužine. Polovište dužine AB je središte polukružnice na kojoj se nalaze točke C i D, pa i ono leži na pravcu EF. Zaključujemo da je F upravo polovište dužine AB. 1 bod



Prema pokazanom, trokut EFC je jednakokračni pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu F. Njegove katete su duljine $|FE| = |FC| = r_2$ i hipotenuza je duljine $|EC| = r_1$. Iz Pitagorinog poučka za taj trokut zaključujemo da je $r_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_1$. 2 boda

Analogno je $r_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_n$, odnosno

$$r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}, \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$ 1 bod

Nadalje, računamo da je

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot r_n^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \pi = \frac{\pi}{2^n}, \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$ 1 bod

Površinu prekrivenu plavom bojom možemo izračunati tako da prvo ubrojimo površinu plave P_1, pa od nje oduzmemo površinu žute P_2, pa njoj pribrojimo površinu plave P_3, pa opet oduzmemo površinu žute P_4, itd. Dakle, tražimo

$$P = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \cdots .$$ 2 boda

Uvrstimo li izraze za P_n slijedi

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} + \cdots \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$ 1 bod

U predzadnjem koraku smo koristili formulu za sumu geometrijskog reda:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{za } q = -\frac{1}{2} \in \langle -1, 1\rangle.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, nađemo da je površina n-te polukružnice jednaka $P_n = \frac{\pi}{2^n}$. 6 bodova

Ukupnu plavu površinu možemo izračunati tako da izračunamo zbroj površina skupova $K_1 \setminus K_2$, $K_3 \setminus K_4$, ...

Točnije, računamo

$$P = (P_1 - P_2) + (P_3 - P_4) + (P_5 - P_6) + \cdots ,$$ 1 bod

gdje je jedna od zagrada jednaka

$$P_{2k-1} - P_{2k} = \frac{\pi}{2^{2k-1}} - \frac{\pi}{2^{2k}} = \frac{\pi}{2^{2k}} = \frac{\pi}{4^k}.$$ 1 bod

Računamo ukupnu površinu:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$ 1 bod

gdje smo koristili formulu za sumu geometrijskog reda, za $q = \frac{1}{4} \in \langle -1, 1\rangle$. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

Prvo rješenje.

Promatrajmo standardnu (dakle, onu kojoj nisu odstranjena kutna polja) ploču dimenzija $n \times n$. Dva nasuprotna kutna polja koja bi trebala biti odstranjena obojimo crnom, a sva ostala polja bijelom bojom.

Dobar raspored je raspored n figura na standardnoj ploči u kojem nikoje dvije figure nisu u istom retku ili stupcu. Trebamo odrediti broj različitih dobrih rasporeda takvih da nikoja figura nije na crnom polju. 1 bod

Najprije, svih dobrih rasporeda ima $n!$ jer u svakom od n redaka moramo izabrati jedinstven stupac u kojem se nalazi figura. 2 boda

Dobrih rasporeda u kojem je jedna figura na jednom crnom polju je naprosto $(n-1)!$ jer je ta figura u kutu, a sve ostale razmještamo na ostatak ploče, što je standardna ploča dimenzija $(n-1) \times (n-1)$. 2 boda

Broj dobrih rasporeda u kojima su oba crna polja zauzeta je (istom logikom kao u prethodnom slučaju) $(n-2)!$. 2 boda

Konačno, formula uključivanja i isključivanja nam daje rezultat

$$n! - 2 \cdot (n-1)! + (n-2)! = (n^2 - 3n + 3)(n-2)!.$$ 3 boda

Drugo rješenje.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo odstranili prvo polje u prvom retku i zadnje polje u zadnjem.

Promotrimo prvi redak ploče. Razlikujemo dva slučaja ovisno o tome nalazi li se figura na zadnjem polju. 2 boda

Ako u njemu figura stoji na zadnjem polju, onda ostale figure možemo razmjestiti na točno $(n-1)!$ načina, što je naprosto standardna ploča $(n-1) \times (n-1)$ (kao i u prvom rješenju). 2 boda

Ako figura u prvom retku nije na zadnjem mjestu, onda ona može stajati na nekom od $n-2$ mjesta (ono koje nije prvo ni zadnje). Nadalje, figura u zadnjem stupcu može stajati na nekom od $n-2$ mjesta (bilo gdje osim u prvom i zadnjem retku). 2 boda

Preostalih $n-2$ figura moramo razmjestiti u $n-2$ redaka (ne mogu biti u prvom retku ili u retku gdje se nalazi druga već postavljena figura) te u $n-2$ stupaca (ne mogu biti u zadnjem stupcu ili u stupcu gdje se nalazi prva postavljena figura). To možemo napraviti na $(n-2)!$ načina. 2 boda

Konačno, ukupno imamo

$$(n-1)! + (n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-2)! = (n^2 - 3n + 3)(n-2)!.$$ 2 boda

Zadatak A-4.4.

Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{aligned}(x^2+1)y &= z^2+1 \\ (y^2+1)z &= x^2+1 \\ (z^2+1)x &= y^2+1.\end{aligned}$$

Prvo rješenje.

Izmnožimo li sve tri dane jednadžbe vidimo da je

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)yzx = (z^2+1)(x^2+1)(y^2+1).$$ 2 boda

Primijetimo da za sve realne brojeve t vrijedi $t^2+1 \geqslant 1 > 0$, stoga iz gornje jednadžbe zaključujemo da je $xyz = 1$. 1 bod

Kako je $x^2+1 > 0$ i $z^2+1 > 0$, zaključujemo da je $y > 0$, te analogno $z > 0$ i $x > 0$. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $z = \min\{x, y, z\}$.

Pretpostavimo da je $z < 1$. Tada je nužno $xy > 1 > z^2$ (jer je $xyz = 1$).

Promotrimo prvu jednadžbu

$$z^2+1 = (x^2+1)y \geqslant 2xy = xy + xy > z^2+1,$$ 3 boda

gdje u prvoj jednakosti koristimo da je, za svaki realni broj x, $x^2+1 \geqslant 2x$, a u drugoj činjenice da je $xy > z^2$ i $xy > 1$. Dakle, slučaj u kojemu je $z < 1$ je nemoguć. 1 bod

Ako je $z \geqslant 1$, onda je jedina mogućnost $x = y = z = 1$ (jer je $xyz = 1$). 1 bod

Uvrštavanjem vidimo da je $x = y = z = 1$ uistinu rješenje, pa je i jedino rješenje danog sustava. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključimo da je $xyz = 1$ i $x, y, z > 0$. 4 boda

Primijetimo da je $z = \dfrac{1}{xy}$ i uvrstimo to u drugu jednadžbu. Dobivamo

$$\begin{aligned}(y^2+1)\cdot\frac{1}{xy} &= x^2+1, \\ y^2+1 &= (x^3+x)y, \\ y^2-(x^3+x)y+1 &= 0.\end{aligned}$$ 1 bod

Posljednja kvadratna jednadžba (u varijabli y) mora imati barem jedno realno rješenje pa njezina diskriminanta mora biti nenegativna, tj. 2 boda

$$\begin{aligned}(x^3+x)^2-4 &\geqslant 0, \\ (x^3+x)^2 &\geqslant 4, \\ x^3+x &\geqslant 2, \\ (x-1)(x^2+x+2) &\geqslant 0,\end{aligned}$$

(pretposljednja ekivalencija vrijedi zato što je $x > 0$). Iz zadnje nejednakosti zaključujemo da je nužno $x \geqslant 1$ (drugi faktor je uvijek pozitivan). 1 bod

Analogno možemo dobiti da je $y \geqslant 1$ i $z \geqslant 1$. 1 bod

Konačno, kako je $xyz = 1$, vidimo da je jedina mogućnost da je $x = y = z = 1$ i to je jedino rješenje. 1 bod

Zadatak A-4.5.

Na šahovskom turniru sudjelovali su dječaci i djevojčice. Svaki je natjecatelj odigrao po jednu partiju sa svakim drugim natjecateljem, a nijedna partija nije završila neodlučenim rezultatom. Odredi najmanji mogući broj natjecatelja na turniru ako je poznato da je svaka djevojčica pobijedila barem 21 dječaka i da je svaki dječak pobijedio barem 12 djevojčica.

Prvo rješenje.

Neka je m broj djevojčica, a n broj dječaka na natjecanju. Potrebno je odrediti minimalnu vrijednost za $m + n$. Budući da nije potrebno zadovoljiti nikakve uvjete na međusobne partije djevojčica i međusobne partije dječaka, u rješenju promatramo samo partije između djevojčica i dječaka.

Među njima je odigrano mn partija (svaki dječak sa svakom djevojčicom). Broj partija u kojima su pobijedile djevojčice, iz uvjeta zadatka, veći ili jednak je od $21m$, dok je broj partija u kojima su pobijedili dječaci barem $12n$. Iz toga zaključujemo da je

$$mn \geqslant 21m + 12n.$$ 2 boda

Tu nejednakost možemo zapisati kao $(m - 12)(n - 21) \geqslant 252$. 2 boda

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo da je

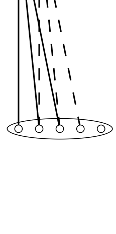
$$(m - 12) + (n - 21) \geqslant 2\sqrt{(m - 12)(n - 21)} \geqslant 2\sqrt{252} > \sqrt{961} = 31,$$

pa je $m + n > 64$. Iz toga zaključujemo da je $m + n \geqslant 65$. 2 boda

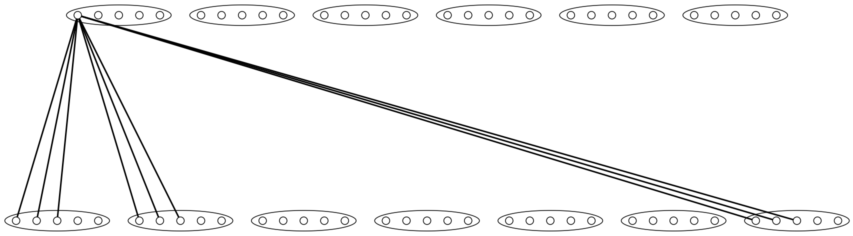
Preostaje pokazati da je moguće da je na turniru bilo $m + n = 65$ natjecatelja. Konstruirat ćemo primjer za slučaj $m = 30$ i $n = 35$.

Podijelimo djevojčice u šest skupina (nazovimo ih $X_1, \ldots, X_6$), a dječake u sedam skupina (nazovimo ih $Y_1, \ldots, Y_7$) po 5 osoba. 1 bod

Za svaki par skupina X_i i Y_j neka je djevojčica koja je na mjestu k u grupi X_i pobijedila dječake koji su na mjestima k, $k + 1$ i $k + 2$ u grupi Y_j, pri čemu mjesta promatramo ciklički (šesto mjesto je prvo, sedmo je drugo, osmo je treće). 2 boda



Tada je svaka djevojčica pobijedila $7 \cdot 3 = 21$ dječaka, te je svaki dječak pobijedio $6 \cdot 2 = 12$ djevojčica. 1 bod



Napomena: Iz nejednakosti $(m-12)(n-21) \geqslant 252$ ne možemo direktno zaključiti da će $m+n$ biti najmanje kad vrijedi jednakost. Naime, $ab < cd$ ne povlači $a+b < c+d$ za cijele brojeve, kao što pokazuje primjer: $76 = 4 \cdot 19 < 77 = 7 \cdot 11$, iako je $4+19 > 7+11$. Zbog toga moramo koristiti neki oblik nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine ili razmišljanja kao u drugom rješenju.

Napomena: Primjer iz rješenja možemo opisati i na drugačiji način. Podijelimo djevojčice u pet skupina od po njih 6 (nazovimo ih A_1, A_2, A_3, A_4, A_5), a dječake u 5 skupina od po njih 7 (nazovimo ih B_1, B_2, B_3, B_4, B_5). Imamo 5 skupina djevojčica i 5 skupina dječaka (1 bod).

Neka su svi dječaci iz skupine B_i pobijedili djevojčice iz skupine A_i i A_{i+1}, za $1 \leqslant i \leqslant 4$, te B_5 su pobijedili djevojčice iz A_5 i A_1. Od svih ostalih djevojčica su izgubili. (2 boda)

To znači da je svaki dječak pobijedio djevojčice iz točno dvije skupine djevojčica, dakle u točno $2 \cdot 6 = 12$ partija. Svaka djevojčica je pobijedila sve dječake iz točno tri njihove skupine, dakle u točno $3 \cdot 7 = 21$ partija. (1 bod)

Drugo rješenje.

Uz oznake kao u prvom rješenju opet dolazimo do nejednakosti $mn \geqslant 21m + 12n$. 2 boda

Neka je $S = m + n$, tada je

$$(S-n)n \geqslant 21(S-n) + 12n, \qquad \text{odnosno} \quad S \geqslant \frac{n^2 - 9n}{n - 21}.$$ 1 bod

Neka je $a_k = \dfrac{k^2 - 9k}{k - 21}$, gdje je $k \geqslant 22$ prirodan broj, računamo

$$a_{k+1} - a_k = \frac{k^2 - 41k + 168}{(k-21)(k-20)},$$

stoga je $a_{k+1} > a_k$ ako i samo ako je $k^2 - 41k + 168 > 0$, a to vrijedi ako i samo ako je $k \geqslant 37$. Dakle, vrijedi $a_{22} > a_{23} > \cdots > a_{37} < a_{38} < a_{39} < \cdots$. 2 boda

Budući da je je $a_{37} = \dfrac{259}{4} = 64.75$, zaključujemo da je $S \geqslant 65$. 1 bod

Kao u prvom rješenju konstruiramo primjer za $S = 65$. 4 boda

Napomena: Konstruirat ćemo primjer za $m = 26$ i $n = 39$. Podijelimo djevojčice na 13 skupina po 2 djevojčice ($A_1, \ldots, A_{13}$) te dječake na 13 skupina po 3 dječaka ($B_1, \ldots, B_{13}$). (1 bod)

Neka su svi dječaci iz skupine B_i, za $1 \leqslant i \leqslant 13$, pobijedili sve djevojčice iz skupina $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i+5}$ (koristimo notaciju $A_{i+13} = A_i$), a izgubili od ostalih djevojčica. (2 boda)

Svaki dječak pobijedio je točno $6 \cdot 2 = 12$ djevojčica, te je svaka djevojčica pobijedila točno $7 \cdot 3 = 21$ dječaka. (1 bod)

Napomena: Konstruirat ćemo primjer za $m = 28$ i $n = 37$.

Podijelimo 28 djevojčica u 7 skupina po 4 djevojčice. (1 bod)

Postoji ukupno $\binom{7}{3} = 35$ različitih odabira 3 od tih 7 skupina i pri tome svaka od tih skupina sudjeluje u točno $\binom{6}{2} = 15$ odabira. Svaki od tako dobivenih odabira pridružimo točno jednom dječaku. Neka je svaki od tih dječaka pobijedio sve djevojčice iz odabira koji mu je pridružen, a izgubio od svih ostalih. Time je svaki od tih 35 dječaka pobijedio točno 12 djevojčica, dok je svaka od tih djevojčica izgubila najviše 15 partija. (2 boda)

Za preostala 2 dječaka odaberimo dva disjunktna odabira po 3 skupine (što možemo jer postoji 7 skupina) i na isti način svakom od tih dječaka pridružimo po jedan odabir. Ovime su i preostala dva dječaka pobijedila točno 12 djevojčia, dok sve djevojčice imaju najviše 16 izgubljenih partija. Dakle, svaka djevojčica je pobijedila u barem $37 - 16 = 21$ partiji. (1 bod)