ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

Zadatak A-1.1.

Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC nalaze se točke P_1, P_2 i P_3 tako da vrijedi

$$|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3B| = \frac{1}{4}|AB|.$$

Tim točkama povučene su paralele sa stranicom $\overline{BC}$, koje dijele trokut na četiri dijela. Površina dijela koji se nalazi između paralela kroz P_2 i P_3 iznosi 5.

Kolika je površina trokuta ABC?

Bodovanje: U prvom rješenju, 3 boda ukupno donosi dokaz da su trokuti AP_1Q_1, AP_2Q_2, AP_3Q_3 i ABC slični. Po 1 bod nose ispravno postavljeni omjeri površina za par trokuta (maksimalno 3 boda). 3 boda nosi korištenje dobivenih jednakosti s uvjetom zadatka kako bi se dobila površina trokuta AP_1Q_1 (tj. rješavanje sustava da se dobije ekvivalentna informacija iz koje slijedi konačno rješenje). Konačno rješenje nosi 1 bod.

U drugom rješenju, ideja uvođenja točaka R_1, R_2 i R_3 (ili crtež kao u rješenju) nosi 1 bod. Obrazloženje da tri klase paralelnih pravaca prolaze odgovarajućim točkama nosi 2 boda. Argumentacija zašto su svi manji trokuti slični nosi 2 boda, a da su sukladni još 2 boda. Uočavanje da se dio između paralela kroz P_2 i P_3 sastoji od pet takvih manjih trokuta nosi 2 boda, a konačno rješenje vrijedi 1 bod.

Samo točno rješenje $P(ABC) = 16$ bez obrazloženja vrijedi 1 bod.

Zadatak A-1.2.

Dokaži da ne postoje pozitivni realni brojevi x i y za koje vrijedi

$$(x^3 + y^3)(x^2 + y^2) = 2(x + y) = 2.$$

Bodovanje: Izražavanje izraza x^2+y^2 i x^3+y^3 pomoću $x+y$ i xy vrijedi 1 bod, odnosno 2 boda redom. Sljedeća 3 boda nosi faktorizacija $(6xy + 1)(xy - 1) = 0$. Obrazloženje za odbacivanje slučaja $6xy + 1 = 0$ vrijedi 1 bod, a drugi slučaj vrijedi 3 boda. Ako učenik bez obrazloženja napiše da drugi slučaj nema rješenje, dobiva 0 bodova (od ta 3 boda).

Zadatak A-1.3.

Odredi sve prirodne brojeve $n > 2$ za koje postoji djelitelj d broja n takav da je

$$n = a^3 + d^3,$$

pri čemu je a najmanji djelitelj broja n veći od 1.

Bodovanje: Rješenje se sastoji od dva ključna zaključka. Prvi je da je $a = 2$, a drugi da je $d \in \{a, a^2, a^3\}$. Svaki nosi 5 bodova.

U prvom rješenju se prvo zaključi da je $a = 2$, te 3 boda nosi dokaz da je n paran, a 2 boda zaključak da najmanji djelitelj mora biti 2. U drugom rješenju je tih 5 bodova raspoređeno na tri slučaja koji se svi rješavaju na gotovo isti način. U svakom slučaju je potrebno zaključiti da je n paran, odakle slijedi $a = 2$. Broj bodova u tom dijelu ovisi o tome je li učenik izveo zaključak samo u nekim slučajevima ili općenito.

U oba rješenja 5 bodova za zaključak da d mora biti jednak a, a^2 ili a^3 se dijeli na sljedeći način: 2 boda nosi zaključak da d dijeli a^3, 1 bod nosi eliminacija slučaja $d = 1$ (tj. ekvivalentno zaključak da a dijeli d), te 2 boda nosi korištenje činjenice da je a prost (tj. u prvom rješenju da je štoviše $a = 2$) kako bi se iz $d \mid a^3$ zaključilo da d mora biti potencija broja a.

Učenik koji konačna rješenja samo napiše bez obrazloženja, može dobiti najviše 1 bod.

Zadatak A-1.4.

Osnovica $\overline{BC}$ je najdulja stranica jednakokračnog trokuta ABC. Neka je M točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BM| = |AB|$. Nožište okomice iz točke M na $\overline{AB}$ je točka N.

Dokaži da trokut BMN i četverokut $ACMN$ imaju jednake površine i jednake opsege.

Bodovanje: Uočavanje i označavanje točke P vrijedi 1 bod. Pronalaženje sukladnih trokuta nosi sljedećih 5 bodova. Po 1 bod nosi korištenje odgovarajuće jednakosti te izjednačavanje opsega, odnosno površine.

Zadatak A-1.5.

Na stolu su 42 kamenčića. Dva igrača naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić.

Koji igrač sigurno može pobijediti?

Bodovanje: U prvom rješenju, učenik mora napisati pobjedničku strategiju. Gore navedena strategija je jedina koja je uspješna neovisno o potezima drugog igrača. Samo ispisivanje strategije vrijedi 6 bodova. Obrazloženje strategije vrijedi preostala 4 boda.

U drugom rješenju, učenik koji uoči da su 3 kamenčića gubitnička kao i 1 kamenčić, dobiva 2 boda. Slično, po 2 boda vrijedi uočavanje da su potezi sa 7, 15 i 31 kamenčićem jednako gubitnički. Naposljetku, uočavanje da prvi igrač može dovesti drugog igrača na gubitnički potez vrijedi 2 boda.

Ako učenik samo napiše da prvi igrač može pobijediti, bez obrazloženja, dobiva 0 bodova.

Navedena strategija je jedina pobjednička. Ako učenik ponudi strategiju koja odstupa od gore navedene, može dobiti onaj broj bodova koji odgovara dijelu strategije koja se poklapa s pobjedničkom.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

Zadatak A-2.1.

Odredi vrijednost realnog parametra p tako da rješenja jednadžbe

$$(p-3)x^2+(p^2+1)x-11p+18=0$$

budu duljine kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $\sqrt{17}$.

Bodovanje: Ideja korištenja Vièteovih formula nosi 1 bod.

Uvjet zadatka može se izraziti kao jednadžba četvrtog stupnja u varijabli p. Postoje i drugi načini da se dođe do ove jednadžbe, npr. izračunavanjem nultočaka x_1 i x_2. Neovisno o načinu na koji je dobivena, jednadžba u varijabli p kojom je izražen početni uvjet vrijedi 4 boda. Sređivanje takve jednadžbe do oblika $p^4+7p^2-44=0$ nosi dodatna 2 boda. Konačno, rješavanje ove jednadžbe nosi 2 boda. Po 1 bod nosi provjera da za $p=-2$ jedno rješenje nije pozitivno, a za $p=2$ oba rješenja jesu pozitivna.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve parove (a,n) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$3a^2+2^n=a^4.$$

Bodovanje: U prvom rješenju ideja faktorizacije nosi 3 boda. U drugom rješenju korištenje diskriminante vodi do rješenja, no uz više tehničkih poteškoća. Zbog toga ideja promatranja kvadratne jednadžbe uz ispravan zaključak da vrijedi $9+4\cdot 2^n=k^2$ nosi samo 2 boda. Ispravno rješenje u kojem nije eliminirana opcija $a=-2$ nosi svih 10 bodova.

Zadatak A-2.3.

Dokaži da za nenegativne realne brojeve a i b takve da je $a+b\leqslant 2$ vrijedi

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leqslant\frac{2}{1+ab}.$$

Kada se postiže jednakost?

Bodovanje: Množenje s nazivnicima i jednadžba

$$1+ab+b^2+ab^3+1+ab+a^2+a^3b-2-2a^2b^2-2a^2-2b^2\leqslant 0$$

u prvom rješenju nose 0 bodova ako nakon nje ne postoji pokušaj faktorizacije. Dokaz da je početna nejednakost ekvivalentna s $(b-a)^2(ab-1)\leqslant 0$ nosi 5 bodova. Dokaz da ova nejednakost vrijedi nosi 3 boda, od kojih 2 boda vrijedi dokaz da je $ab\leqslant 1$.

Dokaz da vrijedi $(1+ab)^2 \leqslant (1+a^2)(1+b^2)$ nosi 2 boda. Dokaz da početna nejednakost slijedi iz te nejednakosti nosi 6 bodova, od kojih 2 boda vrijedi dokaz da je $ab \leqslant 1$.

Uvjet jednakosti u oba rješenja nosi 2 boda. Od toga 1 bod nosi zaključak da treba biti $a = b$, te 1 bod uočavanje na kojem mjestu u dokazu je korištena nejednakost koja treba biti jednakost.

Zadatak A-2.4.

Točka P je polovište dužine $\overline{AB}$ duljine 2. Neka je T diralište tangente iz točke A na kružnicu promjera $\overline{PB}$. Odredi duljinu $|PT|$.

Bodovanje: Bodovi iz različitih rješenja se ne zbrajaju! U oba rješenja računanje $|AT|$ donosi 2 boda.

U prvom rješenju, primjena Pitagorina poučka na trokut PTB 1 bod, te dobivanje konačnog rješenja još 1 bod. Preostalih 6 bodova se može dodijeliti za postupak naveden u rješenju ili korištenje formule za duljinu težišnice.

U prvom rješenju, uočavanje jednakosti $\sphericalangle ATP = \sphericalangle PBT$ donosi 2 boda. Pritom je dovoljno napomenuti da tražena jednakost vrijedi jer je AT tangenta (odnosno, pozvati se na poučak o kutu između tetive i tangente). Ako je taj zaključak izveden bez ikakvog valjanog opravdanja, umjesto 2 boda treba dodijeliti 1 bod.

U drugom rješenju 8 bodova se može dodijeliti za postupak naveden u rješenju ili primjenu Stewartovog poučka. Korištenje Euklidovog poučka u trokutu PTB da bi se izrazilo $|NT|$ preko $|PN|$ i $|NB|$ donosi 2 boda. Alternativno, Euklidov se poučak može dokazati/izbjeći korištenjem Pitagorinog poučka na trokute PTB, PNT i BNT ili uočavajući sličnost trokuta PNT i BNT, no ako se učenik jasno pozove na Euklidov poučak, taj izvod nije potreban.

Učenici se smiju pozvati na formulu za duljinu težišnice ili Stewartov poučak bez dokaza.

Ako je postupak točan, a zbog računske greške konačni rezultat nije, učenik gubi 1 bod ako se krivi broj javlja samo u konačnom rješenju, a 2 boda ako je još barem jedna duljina krivo izračunata.

Moguća su i rješenja ovog zadatka koja koriste trigonometriju pravokutnog trokuta. Primjerice, nakon što izračunamo $|AT| = \sqrt{2}$, iz trokuta ATO dobivamo $\sin(\sphericalangle AOT) = \sin(2\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, pri čemu je $\alpha = \sphericalangle ABT = \sphericalangle PBT$ (jednakost $\sphericalangle AOT = 2\alpha$ dobivamo primjenom teorema o središnjem i obodnom kutu). S druge strane, promatrajući trokut PTB možemo izraziti $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ preko $|PT|$, pa iz formule za sinus dvostrukog kuta $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ dolazimo do jednadžbe

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = 2|PT|\sqrt{1-|PT|^2}$$

iz koje možemo izračunati $|PT|$.

U trigonometrijskom rješenju korištenje teorema o obodnom i središnjem kutu za kutove $\sphericalangle AOT$ i $\sphericalangle PBT$ donosi 1 bod. Točno izračunata duljina $|AT|$ donosi 2 boda. Izražavanje sinusa, odnosno kosinusa kuta $\sphericalangle PBT$ preko $|PT|$ donosi po 1 bod. Napisana formula dvostrukog kuta sama za sebe ne donosi bodove, no ako je iz nje dobivena kvadratna jednadžba po $|PT|^2$, treba dodijeliti 2 boda. Rješavanje te jednadžbe i dobivanje kandidata za $|PT|$ donosi 1 bod. Točan argument kojim eliminiramo pogrešnu opciju i dobivamo točnu duljinu donosi još 2 boda.

Zadatak A-2.5.

Na ploču dimenzija 8×8 postavljeni su kraljevi i topovi, tako da nijedna figura nije napadnuta. Kralj napada susjedna polja (njih osam, osim kada je na rubu ploče), a top napada sva polja u retku i stupcu u kojem se nalazi. Koliko je najviše figura na ploči ako je broj topova jednak broju kraljeva?

Bodovanje: Zadatak se sastoji od dva dijela. Učenik treba pokazati da je nemoguće postaviti po šest kraljeva i topova, te da je moguće postaviti po pet kraljeva i topova na valjan način. Dokaz da je nemoguće postaviti 12 (ili više) figura nosi 5 bodova, a da je moguće 10 figura nosi 5 bodova. Tvrdnja da je odgovor 10 sama za sebe ne nosi bodove.

Učenik koji izbroji broj napadnutih polja za samo jednog topa treba dobiti 1 bod. Ako učenik izbroji koliko polja napada drugi top, nakon što je jedan već postavljen, treba dobiti još 1 bod. Ako učenik računskom greškom dobije broj različit od 60 za broj pokrivenih ili napadnutih polja, a sve ostalo je točno, dobiva 4 boda na tom dijelu zadatka. Ako učenik na bilo koji valjan način pokaže da šest topova ukupno pokriva ili napada 60 polja i zbog toga ne možemo staviti šest kraljeva, treba dobiti svih 5 bodova za taj dio zadatka.

Učenik koji prikaže jedan valjan raspored pet kraljeva i pet topova treba dobiti 5 bodova za taj dio zadatka, čak i ako nije dokazao da je nemoguće postaviti veći broj figura.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

Zadatak A-3.1.

Riješi jednadžbu

$$\cos(2x) + \cos(2y) + 2\sin x \sin y + 2\cos x \cos y = 4.$$

Bodovanje: Zapis jednadžbe u pogodnijem obliku (npr. $\cos(2x) + \cos(2y) + 2\cos(x - y) = 4$ ili $(\cos x + \cos y)^2 - (\sin x - \sin y)^2 = 4$) nosi 2 boda. Sljedeća 4 boda nosi zaključak o točnoj vrijednosti pojedinih izraza koji se pojavljuju. Učeniku koji zapiše da su vrijednosti sinusa i kosinusa manje ili jednake 1, ali to ne uspije primijeniti, može se dodijeliti 1 bod od ta 4 boda. Posljednja 4 boda nosi točan zaključak o rješenjima.

Zadatak A-3.2.

Četiri sfere polumjera R leže na bazi stošca tako da svaka dodiruje dvije od preostalih sfera te plašt stošca. Peta sfera istog polumjera dodiruje prve četiri sfere i plašt stošca. Odredi volumen tog stošca.

Bodovanje: 3 boda nosi zaključak da je $\sphericalangle AEC = 90°$, od kojih 1 bod nosi promatranje kvadrata $ABCD$. Promatranje presjeka stošca ravninom ACE nosi 1 bod. Dokaz da je polumjer baze stošca jednak visini nosi 2 boda. Računanje duljine visine stošca nosi 3 boda (po 1 bod za $|PE|$, $|EO|$ i $|ON|$). Konačan rezultat nosi 1 bod, u bilo kojem od oblika napisanih u posljednja dva retka rješenja.

Zadatak A-3.3.

Odredi sve uređene parove (m, n) prirodnih brojeva za koje postoji prost broj p takav da vrijedi

$$9^m + 3^m - 2 = 2p^n.$$

Bodovanje: Faktorizacija $(3^m - 1)(3^m + 2) = 2p^n$ nosi 2 boda. Određivanje mjere faktora nosi 3 boda. Korištenje mjere za zaključak da je manji faktor jednak 2 (ili 1) nosi 3 boda. 1 bod nosi eliminacija slučaja $3^m - 1 = 1$. Točno rješenje nosi 1 bod, čak i bez obrazloženja.

Parcijalni zaključci koji se mogu dobiti gledanjem malih vrijednosti m i n ili npr. zaključak da p nije 3, ne nose bodove. Isto vrijedi i za promatranje ostataka pri dijeljenju s $4, 9$ i sl.

Zadatak A-3.4.

Unutar trokuta ABC nalazi se točka T takva da vrijedi $|AT| = 56$, $|BT| = 40$, $|CT| = 35$. Nožišta okomica iz točke T na stranice trokuta ABC vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Odredi kut $\sphericalangle ABC$.

Bodovanje: Dokaz da je $a : b : c = 8 : 7 : 5$ nosi ukupno 7 bodova, od kojih 1 bod nosi uočavanje tetivnog četverokuta, 4 boda nosi izražavanje veza između kutova trokuta ABC i duljine d (od kojih 2 boda za samo jedan kut), te 2 boda dobivanje omjera duljina stranica trokuta ABC (od kojih 1 bod za samo jedan omjer). Zaključak da je $\cos\beta = \frac{1}{2}$ nosi 2 boda. Konačni odgovor da je $\beta = 60°$ nosi 1 bod, i u slučaju da nije opravdan.

Zadatak A-3.5.

Za par brojeva $\{a, b\}$ kažemo da ima težinu $|a - b|$. Na koliko se načina skup $\{1, 2, \ldots, 12\}$ može razdijeliti na šest parova tako da ukupan zbroj težina tih parova bude 30?

Bodovanje: Zaključak da je zbroj većih brojeva u svim parovima 54 (ili ekvivalentan zaključak da je zbroj manjih brojeva 24) nosi 3 boda. Razlikovanje tri glavna slučaja može se formulirati na različite načine, npr. preko skupa manjih brojeva u svim parovima. Točno prebrojavanje u svakom od tri slučaja nosi po 2 boda, a konačan rezultat nosi 1 bod. Ako učenik pogriješi na više mjesta u prebrojavanju, ali ima ispravno napisane slučajeve, onda 3 boda treba dodijeliti za određivanje slučajeva i po 1 bod za svako točno prebrojavanje, te također 1 bod ako je konačni rezultat dobiven kao zbroj rezultata u svakom slučaju. Ako učenik navodi više od tri slučaja, treba oduzeti 2 boda (jedan od tri boda za ispisivanje slučajeva i jedan bod za konačni rezultat).

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

Dodatne napomene za ispravljače

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2019.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) takve da je $b \geqslant 0$ i

$$a^2 + 2ab + b! = 131.$$

Bodovanje: Zapis jednadžbe u pogodnijem obliku z kojega možemo zaključiti navedenu (ili ekvivalentnu nejednakost) nosi 2 boda. Uočavanje (i isticanje) ključne nejednakosti nosi dodatna 2 boda. Dokaz nejednakosti $131 + b^2 \geqslant b!$ (npr. matematičkom indukcijom) nosi 3 boda (1 bod za bazu indukcije, 2 boda za pretpostavku i korak). Konačno, isključivanje mogućnosti $b = 0, 1, 2, 3, 4$ nosi 2 boda i pronalaženje konačnih rješenja vrijedi 1 bod. Učenik koji pronađe samo jedno rješenje može dobiti najviše 9 bodova. Učenik koji dobije neka netočna rješenja može dobiti najviše 9 bodova.

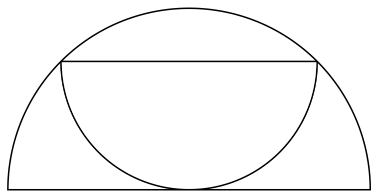
Zadatak se može riješiti i nekom drugom nejednakosti (primjerice $b! \geqslant b^2$ za $b \geqslant 4$) i provjerom konačno mnogo preostalih slučajeva. Nadalje, dokaz nejednakosti $131 + b^2 \geqslant b!$ matematičkom indukcijom može se provesti i s većom brojem kao bazom. U oba slučaja učenik treba provjeriti više rješenja. U svakom slučaju jednaka je podjela bodova: 2 boda za drugačiji zapis jednadžbe iz zadatka, 2 boda za uočavanje nejedakosti koja nam daje provjeru konačno mnogo slučajeva za provjeriti, 3 boda za njezin dokaz te 3 boda za provjeru slučajeva i nalazak konačnog rješenja).

Učenik koji ne dokaže $131 + b^2 \geqslant b!$ ili sličnu nejednakost, nego ju samo konstatira, može dobiti najviše 8 bodova.

Učenik koji ne koristi nikakve načine ograničavanja skupa rješenja (nego primjerice gleda samo djeljivosti) može dobiti najviše 5 bodova: 2 boda za drugačiji zapis jednadžbe kao na početku službenog rješenja, te 3 boda za provjeru slučajeva $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zadatak A-4.2.

Za polukrug kažemo da je *pravilno smješten* u veći polukrug ako su im promjeri paralelni, krajevi promjera manjeg polukruga leže na polukružnici većeg polukruga i polukružnica manjeg polukruga dodiruje promjer većeg polukruga.



Dan je niz polukrugova $K_1, K_2, K_3, \ldots$, pri čemu je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, polukrug K_{n+1} pravilno smješten u polukrug K_n. Područje koje pripada polukrugu K_n i ne pripada polukrugu K_{n+1} obojeno je plavom ako je n neparan, a žutom bojom ako je n paran broj.

Polumjer polukruga K_1 iznosi 1. Odredi ukupnu površinu obojenu plavom bojom.

Bodovanje: U oba rješenja dokaz da manja polukružnica dodiruje promjer veće u središtu veće kružnice nosi 2 boda. Nepotpune dokaze ove tvrdnje treba bodovati u skladu s predloženim rješenjem. Iskazivanje polumjera manje polukružnice pomoću onog veće nosi 2 boda. U predloženim rješenjima to je napravljeno uočavanjem da je trokut EFC jednakokračan, te da je pravokutan. Uočavanje jednog, no ne i drugog svojstva trokuta EFC (ili njemu sličnog trokuta CDF) donosi 1 bod. Računanje polumjera svih polukružnica nosi po 1 bod, kao i računanje površine n-tog polukruga. Rješenja se kasnije razlikuju, no u oba se primjena formule za sumu geometrijskog reda boduje s 1 bod te način izračuna plave površine nosi 2 boda. Konačno rješenje nosi 1 bod.

Zadatak A-4.3.

Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

Bodovanje: Prvo rješenje se idejno razlikuje od drugog po tome što koristi formulu uključivanja i isključivanja i ideju promatranja standardne ploče (bez odlomljenih polja). Zajedničko im je da koriste činjenicu da na ploči dimenzija $k \times k$ se mogu postaviti k figura na $k!$ načina, što u svakom rješenju barem jednom na ispravan način iskorišteno nosi 2 boda.

U prvom rješenju, ideja promatranja standardne ploče nosi 1 bod, a korištenje formule uključivanja i isključivanja 3 boda.

U drugom rješenju, ideja rastavljanja na slučajeve ovisno o položaju figure u prvom retku nosi 2 boda, promatranje figure u zadnjem stupcu nosi 2 boda, te konačno rješenje nosi 2 boda.

Ako učenik ima točno zapisano rješenje u obliku od najviše tri sumanda, no pogriješi u pojednostavljivanju izraza, i dalje dobiva 2 boda za ovaj dio rješenja. Ako je rješenje netočno zbog računske greške, te nije zapisano po ovim pravilima, dobiva 1 bod manje nego što bi dobio bez računske greške.

Rješenja koja ne koriste formulu uključivanja i isključivanja u pravilu moraju odvojeno po slučajevima promatrati barem neke od figura u prvom i zadnjem retku, te prvom i zadnjem stupcu. Jedno moguće krivo rješenje je ignorirati takvu podjelu te pomisliti da se u prvom retku figura može postaviti na $n-1$ način (svugdje osim u odlomljeni kut), u drugom retku isto (svugdje osim u stupac u kojem se nalazi prva figura), u trećem retku na $n-2$ načina, pa sve do predzadnjeg retka gdje se može postaviti na 2 načina te u zadnjem retku na 1 način. Ta argumentacija je pogrešna jer u zadnjem retku nismo ubrojali da je jedno kutno polje odlomljeno. Takvo rješenje nosi 2 boda, budući da odgovara brojanju samo jednog od slučaja iz drugog rješenja.

Zadatak A-4.4.

Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{aligned}(x^2+1)y &= z^2+1\\(y^2+1)z &= x^2+1\\(z^2+1)x &= y^2+1.\end{aligned}$$

Bodovanje: U oba rješenja, učenik koji izmnoži sve tri jednadžbe, tj. proučava tako dobivenu jednadžbu dobiva 2 boda. Ako izvede zaključak da je $xyz = 1$ (komentirajući da nijedna druga zagrada nije jednaka nuli) dobiva 1 bod. Učenik koji zaključi da je $x > 0$, $y > 0$ i $z > 0$ dobiva 1 bod. Uočavanje rješenja $x = y = z = 1$ i tvrdnja da je to jedino rješenje nosi 1 bod, a samo rješenje bez tvrdnje da je jedino, nosi 0 bodova. Dokaz da drugih rješenja nema nosi 5 bodova.

U prvom rješenju bez smanjenja općenitosti treba izabrati minimalan ili maksimalan broj, te dobiti nejednakosti koje vode u kontradikciju ili jedino rješenje jednadžbe. Teži slučaj donosi 4 boda (za dobivanje nejednakosti 3 boda i za zaključak 1 bod). Lakši slučaj nosi 1 bod.

U drugom rješenju, izražavanje jedne varijable pomoću druge dvije i uvrštavanje nosi 1 bod. Promatranje parametarske kvadratne jednadžbe i njezine diskriminante donosi 2 boda. Pojednostavljivanje diskriminante i zaključak da to povlači da je jedna od nepoznanica veća ili jednaka 1 donosi 1 bod. Zaključak da su tada sve varijable barem 1 nosi 1 bod.

Zadatak A-4.5.

Na šahovskom turniru sudjelovali su dječaci i djevojčice. Svaki je natjecatelj odigrao po jednu partiju sa svakim drugim natjecateljem, a nijedna partija nije završila neodlučenim rezultatom. Odredi najmanji mogući broj natjecatelja na turniru ako je poznato da je svaka djevojčica pobijedila barem 21 dječaka i da je svaki dječak pobijedio barem 12 djevojčica.

Bodovanje: U svakom rješenju ovog zadatka, dokaz da je broj učenika barem 65 nosi 6 bodova, a primjer u kojem je pokazano da je moguće da ih je točno 65 nosi 4 boda. Dakle, učenik koji ima samo dokaz da ih je barem 65, ali nema konkretan primjer da ih može biti 65 već to samo tvrdi, na ovom zadatku može dobiti najviše 6 bodova. U oba rješenja obrazloženje zašto vrijedi nejednakost $mn \geqslant 21m + 12n$ nosi 2 boda.

U prvom rješenju, zapis pogodnije nejednakosti, tj. $(m-12)(n-21) \geqslant 252$ nosi 2 boda, primjena nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine na nju i zaključak $m + n \geqslant 65$ nosi još 2 boda.

U drugom rješenju, zapis te nejednakosti na pogodniji način, tj. $m + n \geqslant \frac{n^2-9n}{n-21}$ nosi 1 bod. Analogno, učenik može ograničiti $m+n$ pomoću varijable m. Za ideju diskusije ponašanja niza $\frac{k^2-9k}{k-21}$ učenik dobiva 1 bod, a za ispravan zaključak o najmanjem elementu tog niza još 1 bod. Konačno, za izračun najmanjeg elementa i zaključak $m + n \geqslant 65$ učenik dobiva 1 bod.

Konstrukcije ovakvih turnira s minimalnim brojem natjecatelja moguća su za kombinacije

$$(m, n) \in \{(26, 39), (27, 38), (28, 37), (29, 36), (30, 35)\}.$$

U napomenama su ponuđene neke konstrukcije za tri od tih pet mogućnosti. Konstrukcija primjera za neki drugi par brojeva m i n nije moguća.