ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Riješite u skupu realnih brojeva nejednadžbu

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}} \leqslant 2019.$$

Rješenje.

Uvjet na rješenje dane nejednadžbe je $x-1 \neq 0$ i $1+\frac{1}{x-1} \neq 0, 1$, odnosno $x \neq 0$ i $x \neq 1$. 2 boda

Sređivanjem lijeve strane nejednadžbe redom dobivamo

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x}{x-1}}} \leqslant 2019. \quad \text{1 bod}$$

$$\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} \leqslant 2019. \quad \text{1 bod}$$

$$\frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} \leqslant 2019.$$

Dakle, $x \leqslant 2019$. 1 bod

Konačno, rješenje dane nejednadžbe je $x \in \langle -\infty, 2019] \setminus \{0, 1\}$. 1 bod

Zadatak B-1.2.

Ako je $\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+a^2}=\frac{4}{5}$ i $ab=-1$, koliko je a^9+b^9 ?

Rješenje.

Sređivanjem jednakosti $\dfrac{a}{a+b^2}+\dfrac{b}{b+a^2}=\dfrac{4}{5}$ redom dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{ab+a^3+ab+b^3}{(a+b^2)(b+a^2)} &= \frac{4}{5} \\
5(a^3+2ab+b^3) &= 4(ab+a^3+b^3+a^2b^2) && \text{1 bod} \\
a^3+b^3 &= 4a^2b^2-6ab. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Prema uvjetu zadatka $ab=-1$, pa je $a^3+b^3=10$. 1 bod

Kubiranjem te jednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
\left(a^3+b^3\right)^3 &= 1000 \\
a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9 &= 1000 && \text{1 bod} \\
a^9+b^9 &= 1000-3a^3b^3(a^3+b^3). && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Kako je $ab=-1$ i $a^3+b^3=10$, slijedi $a^9+b^9=1000-3(-1)^3\cdot 10=1030$. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Odredite zadnje dvije znamenke broja $\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}}}_{2019}$.

Prvo rješenje.

Promotrimo potencije 6^n, $n \geqslant 2$.

$$6^2=36,\ 6^3=216,\ 6^4=1296,\ 6^5=\ldots 76,\ 6^6=\ldots 56,\ 6^7=\ldots 36,\ 6^8=\ldots 16,\ \ldots \qquad \text{1 bod}$$

Očito je dvoznamenkasti završetak potencije 6^n, $n \geqslant 2$ jedan od pet brojeva 36, 16, 96, 76, 56 koji se tim redom izmjenjuju. Odnosno, svaka peta potencija ima isti dvoznamenkasti završetak. 2 boda

Potencija 6^n, $n \geqslant 2$ ima određeni dvoznamenkasti završetak ovisno o ostatku pri dijeljenju broja $n-1$ brojem 5.

Ako je taj ostatak 0, završetak je 56;
ako je ostatak 1, završetak je 36;
ako je ostatak 2, završetak je 16;
ako je ostatak 3, završetak je 96;
ako je ostatak 4, završetak je 76. 1 bod

Broj $6^{6^6}=6^{46656}$ ima dvoznamenkasti završetak 56 jer je broj 46655 djeljiv s 5.

Nadalje broj $6^{6^{6^6}}=6^{6^{46656}}$ također ima dvoznamenkasti završetak 56 jer je eksponent umanjen za jedan djeljiv s 5.

Iz istog će razloga i dodavanjem "nove šestice" svaki sljedeći eksponent imati završetak 56, pa tako i broj $\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}}}_{2019}$ ima zadnje dvije znamenke 56. 2 boda

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju promatramo prvih nekoliko potencija broja 6, odnosno njihove dvoznamenkaste završetke:

$$6^2 = 36,\ 6^3 = 216,\ 6^4 = 1296,\ 6^5 = \ldots 76,\ 6^6 = \ldots 56,\ 6^7 = \ldots 36,\ 6^8 = \ldots 16,\ \ldots$$ 1 bod

Očito je dvoznamenkasti završetak potencije 6^n, $n \geqslant 2$ jedan od pet brojeva 36, 16, 96, 76, 56 koji se tim redom izmjenjuju. Odnosno, svaka peta potencija ima isti dvoznamenkasti završetak. 2 boda

Za potencije 6^n, $n \geqslant 2$, učenik može promatrati i ostatak pri dijeljenju eksponenta n brojem 5 (umjesto $n-1$ kao u prvom rješenju). Tada, ako je

ostatak 2 - završetak je 36,
ostatak 3 - završetak je 16,
ostatak 4 - završetak je 96,
ostatak 0 - završetak je 76,
ostatak 1 – završetak je 56. 1 bod

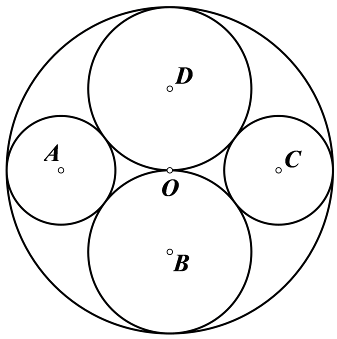
Kako je u zadanoj potenciji broja 6, eksponent n također potencija broja 6, a svaka potencija broja 6 ima zadnju znamenku 6, njezin je ostatak pri dijeljenju sa 6 uvijek jednak 1. To znači da sve potencije 6^n gdje je n potencija broja 6 imaju dvoznamenkasti završetak 56, pa tako i zadana potencija $\underbrace{6^{6^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{6}}}}}}}_{2019}$. 2 boda

Napomena: Ako je učenik samo napisao da je zadnja znamenka jednaka 6, a nije odredio predzadnju znamenku, te nema ništa od postupka koji se boduje kao gore, dobiva samo 1 bod.

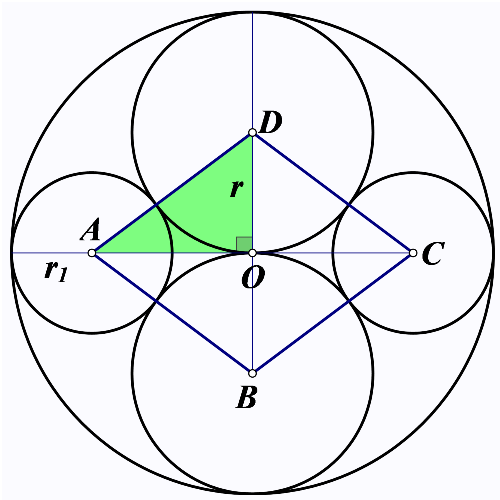
Ako učenik ima drugačije od ponuđenih rješenja, zaključak da ima pet različitih dvoznamenkastih rješenja (i njihovo ispisivanje) nosi 3 boda. Zaključak da njihovo ponavljanje ovisi o ostatku pri dijeljenju s 5, uz točno obrazloženje, nosi 1 bod, a zaključak i obrazloženje, da zadana potencija ima dvoznamenkasti završetak 56 još 2 boda.

Zadatak B-1.4.

U kružnicu k sa središtem u točki O i polumjera 6 cm, upisane su dvije veće kružnice sa središtima B i D, te dvije manje kružnice sa središtima A i C, kao na slici. Ove 4 kružnice dodiruju kružnicu k. Veće se kružnice međusobno dodiruju u točki O, a dvije manje kružnice dodiruju veće kružnice. Odredite površinu četverokuta $ABCD$.



Rješenje.



Dvije veće kružnice imaju jednake polumjere $r = 3\,\text{cm}$, a zbog simetrije u odnosu na pravac BD, dvije manje kružnice imaju jednake polumjere r_1.

Četverokut $ABCD$ je romb jer je $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = r + r_1$. 1 bod

Kako se dijagonale romba raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom, trokut AOD je pravokutan i vrijedi:

$$3^2 + (6 - r_1)^2 = (3 + r_1)^2$$ 2 boda

Odavde je $r_1 = 2\,\text{cm}$. 1 bod

Površina romba iznosi $P = \dfrac{4 \cdot r \cdot (6 - r_1)}{2} = \dfrac{48}{2} = 24\,\text{cm}^2$. 2 boda

Zadatak B-1.5.

Odredite najmanju vrijednost izraza $2x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ ako je $y + 2x = 2$.

Rješenje.

Iz druge jednakosti izrazimo $y = 2 - 2x$ i uvrstimo u prvu. Tada je

$$\begin{aligned}
2x^2 + \frac{1}{2}(2 - 2x)^2 &= 2x^2 + \frac{1}{2}(4 - 8x + 4x^2) && \text{1 bod}\\
&= 4x^2 - 4x + 2 && \text{1 bod}\\
&= 4x^2 - 4x + 1 + 1\\
&= (2x - 1)^2 + 1. && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Kako je $(2x - 1)^2 \geqslant 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$, izraz $(2x - 1)^2 + 1$ je veći od ili jednak 1 za sve realne brojeve x, pa je njegova najmanja vrijednost jednaka 1. 2 boda

Zadatak B-1.6.

Bazen se može napuniti s dvije slavine. Ako su obje slavine otvorene 2 sata, 4200 litara vode će nedostajati da bazen bude pun do vrha, a ako se obje drže otvorene 5 sati, bazen će biti pun do vrha i još će 3000 litara vode iscuriti izvan bazena. Prva slavina u bazen ispusti u dva sata onoliko vode koliko druga slavine ispusti u tri sata. Koliko litara vode stane u bazen i koliko je vremena potrebno da svaka slavina sama napuni bazen?
(Brzine kojom slavine pune bazen su konstantne.)

Prvo rješenje.

Neka je B količina vode koja stane u bazen, x broj sati potrebnih da prva slavina sama napuni bazen, a y broj sati potrebnih da druga slavina sama napuni bazen.

Omjer vremena punjenja (kad su obje slavine otvorene) jednak je omjeru količine vode u bazenu, odnosno vrijedi

$$\frac{B-4200}{B+3000}=\frac{2}{5}.$$ 2 boda

Slijedi da je količina vode koja stane u bazen jednaka $B=9000$ litara. 1 bod

Tada za jedan sat slavine zajedno ispuste

$$\frac{9000-4200}{2}=\frac{4800}{2}=2400 \text{ litara.}$$ 1 bod

Prema uvjetu iz zadatka, omjer vremena potrebnih da svaka slavina posebno napuni bazen je $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, pa je $y=\frac{3}{2}x$. (*) 1 bod

Prva slavina za jedan sat napuni $\frac{1}{x}$ punog bazena, odnosno $\frac{B}{x}$ litara.

Druga slavina za jedan sat napuni $\frac{1}{y}$ punog bazena, odnosno $\frac{B}{y}$ litara.

Kako obje slavine zajedno za jedan sat ispuste 2400 litara vode u bazen, vrijedi $B\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2400$, 2 boda

pa je zbog (*) $B\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}\right)=2400$. 1 bod

Dobivamo $\frac{5}{3x}\cdot 9000=2400$.

Dakle, vrijeme potrebno da prva slavina sam napuni bazen je $x=\frac{25}{4}=6.25$ sati, a druga slavina će napuniti bazen za $y=\frac{3}{2}x=\frac{75}{8}=9.375$ sati. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je B količina vode koja stane u bazen, x broj sati potrebnih da prva slavina sama napuni bazen, a y broj sati potrebnih da druga slavina sama napuni bazen.

Prema uvjetu iz zadatka, omjer vremena potrebnih da svaka slavina posebno napuni bazen je $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, pa je $y=\frac{3}{2}x$. (*) 1 bod

Prva slavina za jedan sat napuni $\frac{1}{x}$ punog bazena, a druga slavina za jedan sat napuni $\frac{1}{y}$ punog bazena.

Obje slavine zajedno za jedan sat napune $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ punog bazena. 1 bod

Tada je u slučaju, kada su slavine otvorene 2 sata

$$2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1-\frac{4200}{B},$$ 1 bod

a kada su otvorene 5 sati

$$5\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{3000}{B}.$$ 1 bod

Ovaj sustav jednadžbi možemo riješiti tako da prvo podijelimo jednadžbe, a tada dobivamo

$$\frac{B-4200}{B+3000}=\frac{2}{5},$$ 2 boda

odnosno $B=9000$ litara.

Ako sada u prvu jednadžbu sustava uvrstimo dobiveni rezultat, slijedi

$$2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{4800}{9000}=\frac{8}{15},$$ 2 boda

odakle uz primjenu (*) dobivamo $2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}\right)=\frac{8}{15}$. Slijedi $\frac{5}{3x}=\frac{4}{15}$.

Stoga je $x=\frac{25}{4}=6.25$ sati,

a druga slavina će napuniti bazen za $y=\frac{3}{2}x=\frac{75}{8}=9.375$ sati. 2 boda

Zadatak B-1.7.

Na svakom kuponu proljetne lutrije uz natpis proljetni broj piše jedan niz od sedam znamenaka, od 0000000 do 9999999. Ako se kupon zarotira za 180°, znamenke 0 i 8 se ne mijenjaju, znamenke 6 i 9 prelaze jedna u drugu, a sve ostale znamenke gube smisao. Tako će proljetni broj 9980896 rotacijom prijeći u 9680866. Takve kupone, čiji proljetni brojevi rotacijom za 180° mijenjaju svoju dekadsku vrijednost, smatramo nevažećima. Koliko je nevažećih kupona?
(Napomena: Kupon s proljetnim brojem 8680898 ili 0808080 je važeći kupon.)

Rješenje.

Nevažeći su kuponi čiji brojevi sadrže znamenke 0, 6, 8, 9, a ne sadrže niti jednu od znamenki 1, 2, 3, 4, 5 ili 7. 1 bod

Sedmeroznamenkastih brojeva koji sadrže znamenke 0, 6, 8, 9 (vodeće nule su dozvoljene) ima ukupno $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^7$. 2 boda

Od toga broja treba oduzeti sve one brojeve koji rotacijom ne mijenjaju svoju dekadsku vrijednost.

Kod takvih brojeva znamenka u sredini (četvrta znamenka) mora biti 0 ili 8. 2 boda

Prva, druga i treća znamenka mogu biti bilo koje od znamenki 0, 6, 8, 9. No tada je za svaki odabir tih triju znamenki moguć samo jedan odabir pete, šeste i sedme znamenke. 2 boda

Dakle, prvu drugu i treću znamenku možemo odabrati na 4^3 načina, četvrtu znamenku na 2 načina, a petu šestu i sedmu na jedan način.

Brojeva koji rotacijom ne mijenjaju svoju vrijednost ukupno ima $4^3 \cdot 2 = 128$. 2 boda

Broj nevažećih kupona je $4^7 - 4^3 \cdot 2 = 4^3(4^4 - 2) = 64 \cdot 254 = 26256$. 1 bod

Napomena: Konačni rezultat koji je točan ali je zapisan pomoću potencija broja 4 (ili 2) treba priznati, bez obzira što nije do kraja izračunata vrijednost.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite sve realne brojeve k za koje je jedno rješenje jednadžbe

$$(x-2k)^2 = k(x+2)$$

za 1 veće od drugoga.

Rješenje.

Dana se jednadžba, nakon kvadriranja i sređivanja, može zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} x^2 - 4xk + 4k^2 - kx - 2k &= 0 \\ x^2 - 5kx + 4k^2 - 2k &= 0 \end{aligned}$$

1 bod

Primjenom Vieteovih formula dobivamo

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5k, \ \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4k^2 - 2k.$$

1 bod

Prema uvjetu iz zadatka vrijedi $x_1 = x_2 + 1$ pa, nakon uvrštavanja u Vieteovu formulu za zbroj rješenja, slijedi

1 bod

$$x_2 + 1 + x_2 = 5k,$$

odnosno

$$x_2 = \frac{5k-1}{2}, \ \ x_1 = \frac{5k+1}{2}.$$

1 bod

Dobivene vrijednosti uvrstimo u Vieteovu formulu za umnožak rješenja. Tada je

$$\frac{5k-1}{2} \cdot \frac{5k+1}{2} = 4k^2 - 2k,$$

odnosno

$$\begin{aligned} 25k^2 - 1 &= 16k^2 - 8k, \\ 9k^2 + 8k - 1 &= 0. \end{aligned}$$

1 bod

Rješenja ove jednadžbe, brojevi $k_1 = -1$ i $k_2 = \frac{1}{9}$, su traženi realni brojevi.

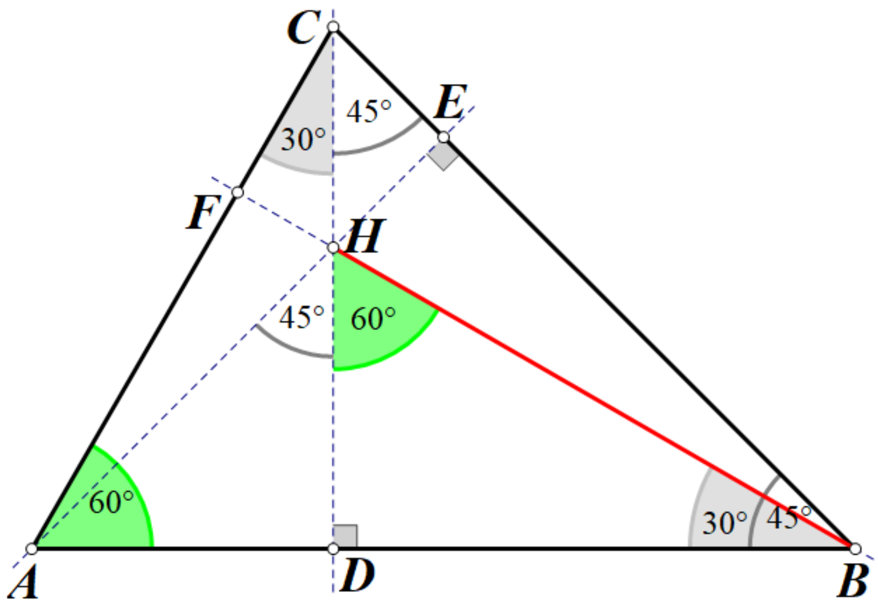
1 bod

Zadatak B-2.2.

U trokutu ABC mjere kutova pri vrhu A i pri vrhu C redom iznose $\alpha = 60^\circ$ i $\gamma = 75^\circ$. Izračunajte udaljenost ortocentra trokuta ABC od vrha B ako je $|BC| = 8\sqrt{6}$.

Prvo rješenje.

Neka je H ortocentar trokuta ABC, a točke D, E i F redom nožišta visina iz vrhova C, A i B.



Tada mjera kuta $\sphericalangle ABC$ iznosi $180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$.

(bodovanje gornje skice s označenim kutovima, visinama i ortocentrom) 2 boda

Iz trokuta BCD slijedi

$$\sin 45^\circ = \frac{|CD|}{8\sqrt{6}},$$

odnosno

$$|CD| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{6} = 8\sqrt{3}.$$ 1 bod

Iz trokuta ACD dobivamo $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|CD|}{|AD|}$, odnosno

$$|AD| = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8.$$ 1 bod

te je $|HD| = |AD| = 8$. 1 bod

Iz trokuta BHD dobivamo $\sin 30^\circ = \frac{|HD|}{|BH|}$, odnosno $|BH| = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$. 1 bod

Drugo rješenje.

(bodovanje skice, kao i u prvom rješenju, s označenim kutovima, visinama i ortocentrom) 2 boda

Trokut BCD je jednakokračan pravokutni trokut, odnosno polovica kvadrata kojemu je $|BC| = 8\sqrt{6}$ duljina dijagonale.

Tada je duljina stranice kvadrata jednaka $|CD| = |BD| = \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{3}$. 1 bod

Trokut BHD je polovica jednakostraničnog trokuta kojemu je jedna stranica $\overline{BH}$, a visina $\overline{BD}$.

Za njihove duljine vrijedi $|BD| = \dfrac{|BH|\sqrt{3}}{2}$, 2 boda

pa je tražena udaljenost

$$|BH| = \frac{2|BD|}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 16.$$ 1 bod

Zadatak B-2.3.

Iz kocke duljine brida $a > 1$, izrezana je u jednom njezinom vrhu kocka duljine brida $\dfrac{1}{a}$. Odredite a tako da obujam novonastalog tijela iznosi $V = 4\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$.

Prvo rješenje.

Prema uvjetima zadatka postavljamo jednadžbu $a^3 - \dfrac{1}{a^3} = 4\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$. 1 bod

Nakon sređivanja dobivamo $a^6 - 4a^4 + 4a^2 - 1 = 0$.

Rastavljamo lijevu stranu na faktore, grupiramo prvi i zadnji član te drugi i treći član. Tada je

$$\begin{aligned} a^6 - 1 - 4a^2(a^2 - 1) &= 0, \\ (a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) - 4a^2(a^2 - 1) &= 0, \\ (a^2 - 1)(a^4 - 3a^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$ 2 boda

Kako je $a > 1$ to je $a^2 - 1 \neq 0$ pa je 1 bod

$a^4 - 3a^2 + 1 = 0$, 1 bod

odakle je $a^2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ odnosno $a = \sqrt{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}}$. 1 bod

Napomena: Vrijedi $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} = \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$ pa je $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, ali učenik može ostaviti zapis $a = \sqrt{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}}$.

Drugo rješenje.

Obujam novonastalog tijela je $V = a^3 - \frac{1}{a^3}$.

Neka je $x = a - \frac{1}{a}$. Iz $a > 1$ slijedi $x > 0$. 1 bod

Tada je

$$x^3 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} = a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right),$$

a odavde je $a^3 - \frac{1}{a^3} = x^3 + 3x$, 1 bod

odnosno

$$V = x^3 + 3x.$$

Prema uvjetu zadatka je $V = 4\left(a - \frac{1}{a}\right) = 4x$. Tada je

$$x^3 + 3x = 4x$$

$$x^3 - x = 0 \qquad \text{1 bod}$$

$$x(x-1)(x+1) = 0. \qquad \text{1 bod}$$

S obzirom da je $x > 0$ slijedi $x = 1$. Sada imamo

$$a - \frac{1}{a} = 1$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Zbog $a > 1$ zaključujemo da je rješenje $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. 1 bod

Zadatak B-2.4.

Matko je na papiru zapisao pet različitih brojeva, a kada ga je Ana upitala koji su to brojevi rekao je: "Odabereš li bilo koja četiri od pet zapisanih brojeva, njihov će umnožak biti jedan od brojeva 9, 12, 18, 24, 36". Koje je brojeve Matko zapisao?

Rješenje.

Označimo zapisane brojeve a, b, c, d, e. Tada je

$$\begin{aligned} abcd &= 9, \\ abce &= 12, \\ abde &= 18, \\ acde &= 24, \\ bcde &= 36. \end{aligned} \qquad (*) \qquad \text{1 bod}$$

Pomnožimo li ove četiri jednadžbe, dobivamo

$$a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot e^4 = 9 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 36 \qquad \text{1 bod}$$

$$(abcde)^4 = 3^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^8 \cdot 3^8 \qquad \text{1 bod}$$

$$abcde = 4 \cdot 9 = 36 \qquad (**) \qquad \text{1 bod}$$

Uspoređivanjem (*) i (**) dobivamo

$$abcde = 9e = 36 \quad \Longrightarrow \quad e = 4, \qquad \text{1 bod}$$

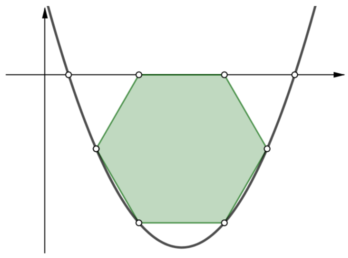
a analogno se dobije i

$$d = \frac{36}{12} = 3, \;\; c = \frac{36}{18} = 2, \;\; b = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}, \;\; a = \frac{36}{36} = 1. \qquad \text{1 bod}$$

Traženi brojevi su 1, $\frac{3}{2}$, 2, 3 i 4.

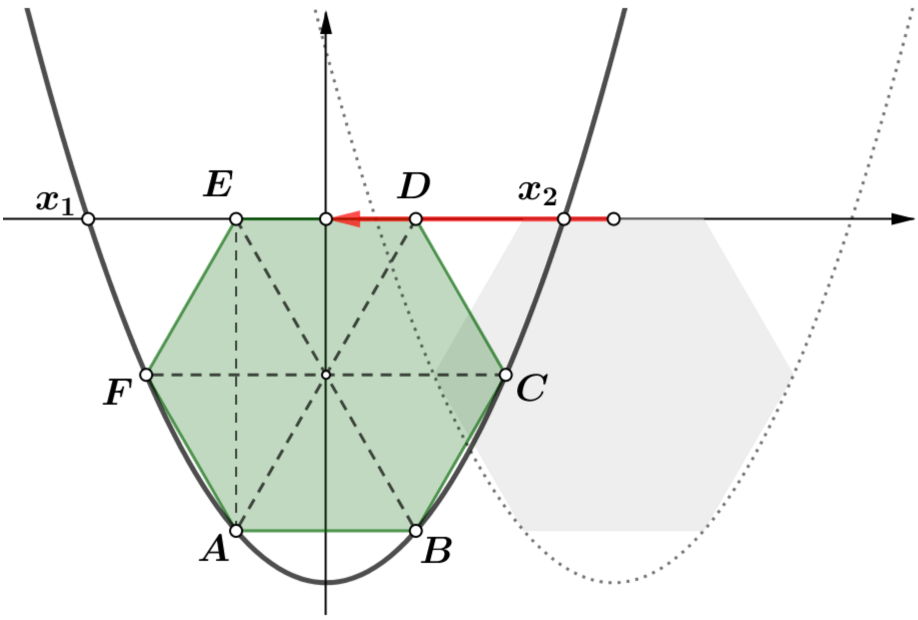
Zadatak B-2.5.

Pravilni šesterokut upisan je u parabolu tako da su mu dva vrha na osi x, a preostala četiri vrha na paraboli, kao na slici. Koliko su međusobno udaljena sjecišta parabole s osi x, ako je duljina stranice pravilnog šesterokuta jednaka 2?



Prvo rješenje.

Udaljenost između točaka x_1 i x_2, odnosno razlika $x_2 - x_1$, neće se promijeniti pomicanjem parabole u horizontalnom smjeru. Stoga, bez smanjenja općenitosti, možemo parabolu pomaknuti u smjeru osi x tako da polovište stranice šesterokuta koja se nalazi na osi x bude u ishodištu koordinatnog sustava.



Nova parabola ima jednadžbu oblika $y = ax^2 + c$. 1 bod

Odredimo koordinate dviju točaka na paraboli.

Apscisa točke A jednaka je negativnoj polovini duljine stranice pravilnog šesterokuta, odnosno $x_A = -1$. Ordinata točke A jednaka je negativnoj duljini dijagonale $\overline{AE}$, odnosno

$$y_A = -|\overline{AE}| = -2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}, \quad \text{tj.} \;\; A(-1, -2\sqrt{3}).$$ 1 bod

Analogno dobijemo i koordinate točke F.

$$x_F = -2,\, y_F = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}, \quad \text{tj.} \quad F(-2, -\sqrt{3}).$$ 1 bod

Uvrstimo li koordinate točaka A i F u jednadžbu parabole, dobit ćemo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} -2\sqrt{3} &= a + c, \\ -\sqrt{3} &= 4a + c. \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $c = -\frac{7\sqrt{3}}{3}$, odnosno jednadžba parabole je

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$ 1 bod

Tada, iz $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{7\sqrt{3}}{3} = 0$, slijedi $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{7}$ 1 bod

pa je $x_2 - x_1 = 2\sqrt{7}$ tražena udaljenost. 1 bod

Drugo rješenje.

Koristimo oznake kao u prvom rješenju.

Ako učenik ne koristi translatiranu parabolu, već zadanu parabolu s jednadžbom $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, 1 bod

tada će točke A i F imati koordinate

$$A(x_0 - 1, -2\sqrt{3}),\;\; F(x_0 - 2, -\sqrt{3}).$$ 2 boda

Uvrstimo li koordinate točaka A i F u jednadžbu parabole, dobit ćemo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} -2\sqrt{3} &= a + y_0, \\ -\sqrt{3} &= 4a + y_0. \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y_0 = -\frac{7\sqrt{3}}{3}$. 1 bod

Uočimo da je tražena udaljenost jednaka $2(x_1 - x_0)$.

Tada, ako u jednadžbu parabole uvrstimo koordinate nultočke $(x_1, 0)$, dobivamo

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x_1 - x_0)^2 - \frac{7\sqrt{3}}{3},$$

odnosno

$$(x_1 - x_0)^2 = 7, \qquad \text{1 bod}$$
$$x_1 - x_0 = \sqrt{7},$$
$$x_2 - x_1 = 2(x_1 - x_0) = 2\sqrt{7}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-2.6.

Riješite jednadžbu $iz^2 + 2\bar{z} = 0$ u skupu kompleksnih brojeva. Izračunajte kvocijent zbroja kubova i umnoška svih rješenja koja su različita od nule.

Rješenje.

Neka je $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$. Tada je

$$i \cdot (x + iy)^2 + 2(x - iy) = 0, \qquad \text{1 bod}$$
$$i(x^2 + 2xyi - y^2) + 2x - 2yi = 0,$$
$$ix^2 - 2xy - iy^2 + 2x - 2yi = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Izjednačimo li realne i imaginarne dijelove dobit ćemo sustav jednadžbi

$$-2xy + 2x = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 2y = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Lijevu stranu prve jednadžbe možemo rastaviti na faktore: $-2x(y - 1) = 0$.

Ako je $x = 0$, iz druge jednadžbe slijedi $y = 0$ ili $y = -2$.

Kako je $z \neq 0$, mora biti $y = -2$ što znači da je jedno rješenje danog sustava broj $z_1 = -2i$. 1 bod

Ako je $x \neq 0$, slijedi $y = 1$, a tada, iz druge jednadžbe, slijedi

$$x = \pm\sqrt{3}. \qquad \text{1 bod}$$

Konačno, tražena rješenja jednadžbe su $z_1 = -2i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$. 1 bod

Izračunajmo zbroj kubova i umnožak tih rješenja.

$$z_1^3 = (-2i)^3 = 8i,$$
$$z_2^3 = 3\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3}i^2 + i^3 = 8i, \qquad \text{1 bod}$$
$$z_3^3 = -3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3}i^2 + i^3 = 8i. \qquad \text{1 bod}$$

Tada je

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3 \cdot 8i = 24i,$$
$$z_1 z_2 z_3 = -2i(\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} + i) = -2i(-3 - 1) = 8i. \qquad \text{1 bod}$$

Traženi kvocijent je $\dfrac{24i}{8i} = 3$. 1 bod

Zadatak B-2.7.

Odredite prirodni broj k tako da točno 2019 cijelih brojeva zadovoljava sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} |x-2|<k \\ (3-x)^2>3x+1. \end{cases}$$

Prvo rješenje.

Riješimo jednadžbu $|x-2|<k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$-k<x-2<k \Longleftrightarrow$$

$$2-k<x<2+k \Longleftrightarrow$$

$$x \in \langle 2-k, 2+k\rangle.(1)$$ 2 boda

Kvadratna nejednadžba $(3-x)^2>3x+1$, odnosno nejednadžba $x^2-9x+8>0$, ima rješenje $\langle-\infty, 1\rangle \cup\langle 8,+\infty\rangle$. (2) 2 boda

Presjek skupova rješenja (1) i (2) mora imati 2019 cjelobrojnih rješenja što znači da interval $[1,8]$ mora biti sadržan u intervalu (1). 1 bod

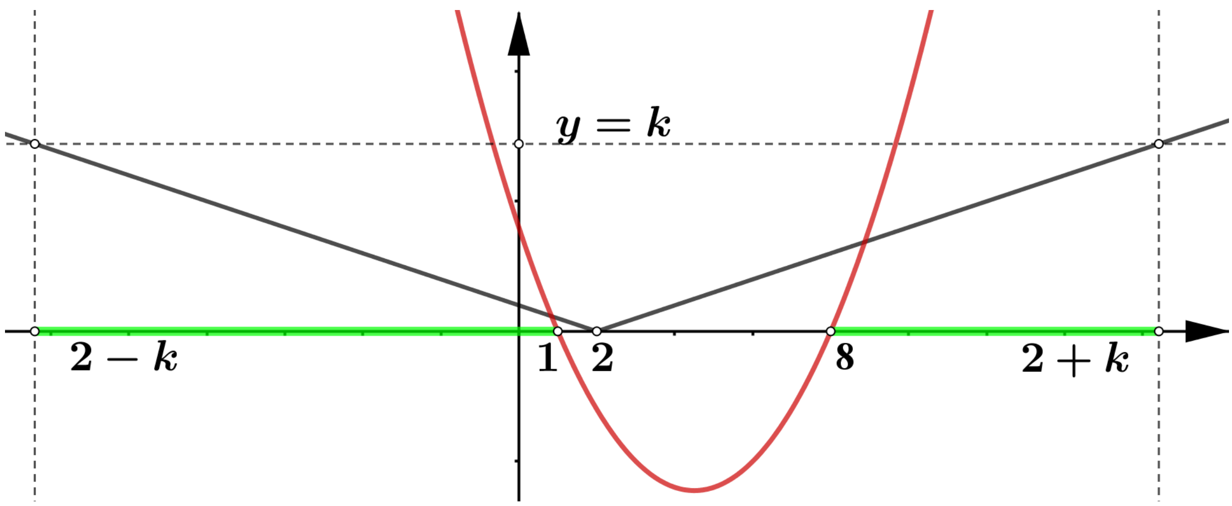
Tada je presjek skupova (1) i (2) jednak skupu $\langle 2-k, 1\rangle \cup\langle 8,2+k\rangle$. 1 bod

U intervalu $\langle 2-k, 1\rangle$ ima $0-(2-k)=k-2$ cijelih brojeva, a u intervalu $\langle 8,2+k\rangle$ ima $(2+k-1)-8=k-7$ cijelih brojeva. 2 boda

Dakle, rješenje danog sustava nejednadžbi sadrži ukupno $k-2+k-7=2k-9$ cijelih brojeva. 1 bod

Tada, iz $2k-9=2019$, slijedi $k=1014$. 1 bod

Drugo rješenje.



Bodovanje skice:
označeno rješenje nejednadžbe $|x-2|<k$, $k \in \mathbb{N}$, odnosno skica grafa $y=|x-2|$ i pravca $y=k$ i/ili na osi apscisa označeni brojevi $2-k$ i $2+k$. 2 boda
skica parabole $y=x^2-9x+8$ i označen skup $\langle-\infty, 1\rangle \cup\langle 8,+\infty\rangle$. 1 bod

Nejednadžba $|x-2|<k$ ima $k-1$ cjelobrojno rješenje veće od 2 i isto toliko rješenja manjih od 2.

Uključujući broj 2, imamo ukupno $2(k-1)+1=2k-1$ rješenja. 2 boda

Skup rješenja kvadratne nejednadžbe $(3-x)^2>3x+1$, odnosno (nakon sređivanja) nejednadžbe $x^2-9x+8>0$, je skup $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 8, +\infty\rangle$. 1 bod

Tada je skup svih cjelobrojnih rješenja te jednadžbe skup $\mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 3, ..., 8\}$. 1 bod

Ako sustav nejednadžbi ima 2019 rješenja, brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ se nalaze među $2k-1$ rješenja prve jednadžbe. 1 bod

Kako ti brojevi nisu rješenja sustava, slijedi da je ukupan broj rješenja sustava nejednadžbi jednak

$$2k-1-8=2k-9.$$ 1 bod

Tada, iz $2k-9=2019$, dobivamo $k=1014$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

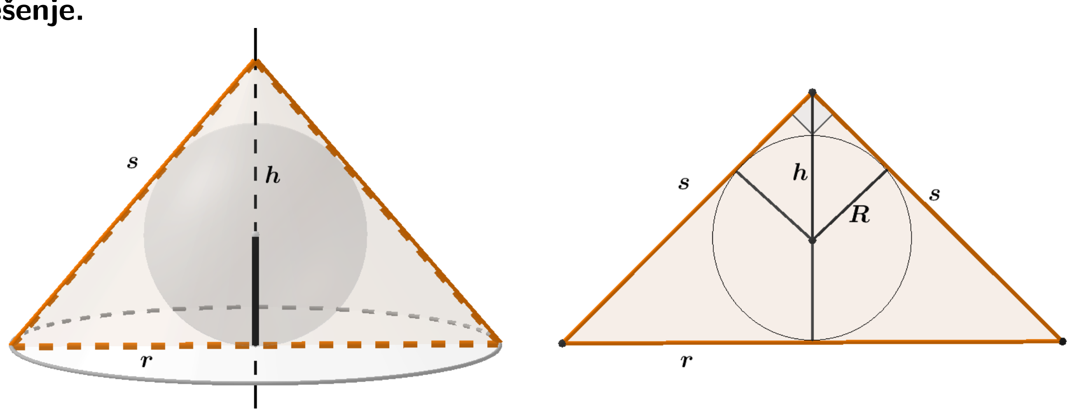
28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Presjek uspravnog stošca ravninom koja sadrži njegovu os simetrije pravokutan je trokut. Izračunajte oplošje kugle upisane u stožac ako je visina stošca 2 cm.

Rješenje.



Osni presjek stošca i njemu upisane kugle je jednakokračni pravokutni trokut s upisanom kružnicom polumjera R. Izvodnice stošca su katete, a promjer baze stošca je hipotenuza tog pravokutnog trokuta. (skica) 1 bod

Polumjer R pravokutnom trokutu upisane kružnice računamo po formuli

$R = \frac{1}{2}(a + b - c)$, pri čemu su a i b katete, a c hipotenuza 1 bod

(ili preko površine: $P = R \cdot \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}ch$).

Budući da je $h = 2\,\text{cm}$, slijedi $a = b = s = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$ i $c = 2r = 4\,\text{cm}$, pa je 1 bod

$$R = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4) = 2(\sqrt{2} - 1)\,\text{cm}.$$ 2 boda

Uvrstimo li R u formulu za oplošje kugle, $O = 4r^2\pi$, dobivamo

$$O = 16\pi(3 - 2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$$ 1 bod

Napomena: Učenik može do polumjera kugle doći i koristeći jednakost $h = R + R\sqrt{2}$ (2 boda), odakle je $R = \frac{h}{1+\sqrt{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{2}}$ (1 bod).

Zadatak B-3.2.

U skupu pozitivnih realnih brojeva riješite sustav jednadžbi

$$\sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3}$$
$$(x+y) \cdot 2^{y-x} = 3.$$

Prvo rješenje.

Uvodimo supstituciju $x-y=a$ i $x+y=b$.

Tada sustav prelazi u

$$\sqrt[a]{b} = 2\sqrt{3}, \qquad b \cdot 2^{-a} = 3$$ 1 bod

Ako prvu jednadžbu potenciramo s eksponentom a, dobivamo da je $b=(2\sqrt{3})^a$. Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$(2\sqrt{3})^a \, 2^{-a} = 3$$
$$2^a \, (\sqrt{3})^a \, 2^{-a} = 3$$ 2 boda
$$3^{\frac{1}{2}a} = 3.$$

Odatle je $a=2$, pa je $b=(2\sqrt{3})^a$ odnosno $b=12$. 2 boda

Preostaje još odrediti x i y iz sustava

$$x-y=2, \qquad x+y=12.$$

Konačno, rješenje polaznog sustava je $x=7$, $y=5$. 1 bod

Drugo rješenje.

Logaritmiranjem obiju jednadžbi po bazi 2 dobivamo

$$\frac{1}{x-y} \cdot \log_2(x+y) = \log_2 2\sqrt{3}$$
$$\log_2(x+y) + (y-x) = \log_2 3.$$ 1 bod

Uvedimo supstituciju $a=x-y$, $c=\log_2(x+y)$. Tada imamo

$$\frac{c}{a} = 1 + \frac{1}{2}\log_2 3$$
$$c-a = \log_2 3$$ 1 bod

Pomnožimo li prvu jednadžbu s a dobivamo $c = a + \frac{a}{2}\log_2 3$, odnosno

$$c-a = \frac{a}{2}\log_2 3.$$ 1 bod

Slijedi $\frac{a}{2}\log_2 3 = \log_2 3$, pa je $a=2$.

Sada je $c = a + \log_2 3 = 2 + \log_2 3 = \log_2 12$. 2 boda

Vratimo se na supstituciju kako bismo odredili x i y.

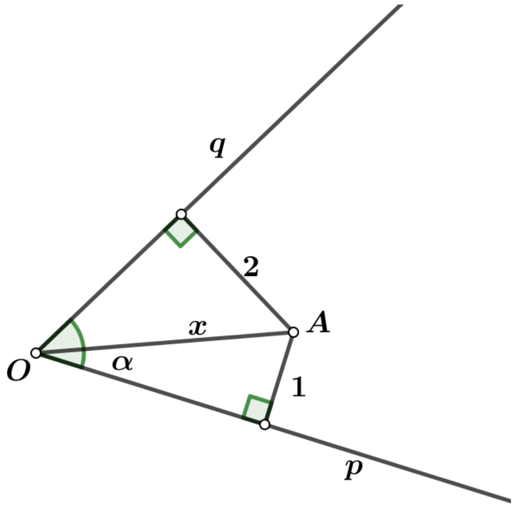
$$x-y=2$$
$$\log_2(x+y) = \log 12.$$

Dakle, $x+y=12$ te je $x=7$, $y=5$. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Unutar kuta $\sphericalangle pOq$ mjere 60° odabrana je točka A tako da je od jednog kraka udaljena za $1\,\mathrm{cm}$ a od drugog kraka $2\,\mathrm{cm}$. Izračunajte duljinu dužine $\overline{OA}$.

Rješenje.



1 bod

Uz oznake kao na slici vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{1}{x} \quad \text{i} \quad \sin(60^\circ - \alpha) = \frac{2}{x}.$$ 1 bod

Dijeljenjem ovih jednakosti dobivamo :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ \cos\alpha - \cos 60^\circ \sin\alpha} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha} = \frac{1}{2}$$
$$2\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$$
$$5\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$ 2 boda

Dalje, zbog $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, vrijedi $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{25}{3} = \frac{28}{3}$. 1 bod

Budući da je α šiljasti kut, onda je $\sin\alpha = +\sqrt{\frac{3}{28}}$.

Konačno, iz $\sin\alpha = \frac{1}{x}$ slijedi $x = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Četiri su prijateljice odlučile provesti vikend u malom obiteljskom hotelu koji ima pet soba, stilski uređenih različitim bojama. One su jedine gošće u hotelu. Prepustile su vlasniku hotela da ih rasporedi u sobe, ali tako da ne budu više od dvije prijateljice u jednoj sobi. Na koliko ih načina vlasnik može rasporediti u sobe?

Rješenje.

Promotrimo sljedeće slučajeve:

1° Ako je svaka prijateljica u svojoj sobi. Tada je ukupno mogućih rasporeda $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. 1 bod

2° Ako su samo dvije prijateljice zajedno u jednoj sobi, a preostale dvije svaka posebno.

Dvije prijateljice koje će biti zajedno u sobi možemo izabrati na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ načina (dijelimo s 2 jer je primjerice par AB i BA isti raspored). Za svaki od tih odabira možemo 3 sobe odabrati na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina (prvu sobu na 5 načina, drugu na 4 i treću na 3 načina).

Dakle, ukupan broj rasporeda u ovom je slučaju jednak $6 \cdot 60 = 360$. 2 boda

3° Ako su po dvije prijateljice zajedno u sobi.

Dovoljno je odrediti broj načina da jedna od prijateljica odabere s kim će biti u sobi jer je time i preostali par određen, a nije bitno koji je par prvi, a koji drugi. Dakle, jedna prijateljica može odabrati na 3 načina s kim će biti u sobi, pa postoje 3 načina za odabir dva para prijateljica.

(Ili: Prvi par prijateljica koje će biti zajedno možemo odabrati na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ načina. Preostali je par ovime određen. Time smo odabrali dva para, ali kako nije bitno koji je par prvi, a koji drugi, broj 6 dijelimo s dva, pa je ukupno 3 načina odabira dva para.)

Za svaki od tih odabira možemo dvije sobe odabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina.

Dakle, ukupan broj rasporeda u ovom je slučaju $3 \cdot 20 = 60$. 2 boda

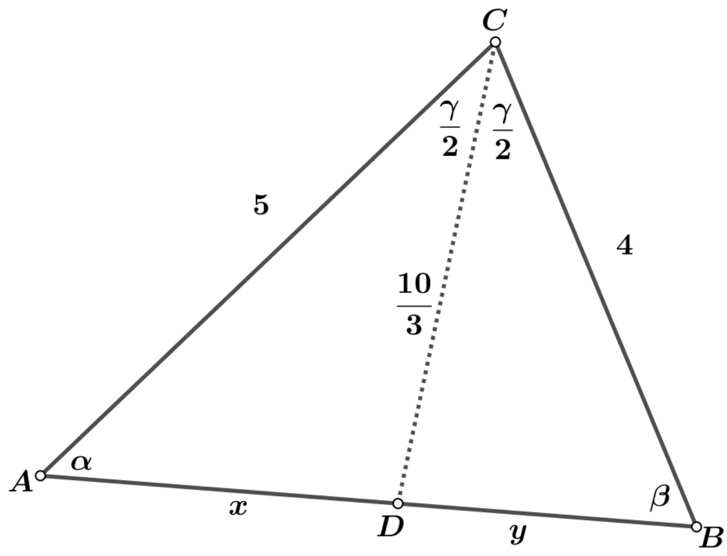
Konačan broj svih mogućih rasporeda dobivamo zbrajanjem prethodnih rezultata po slučajevima i iznosi $120 + 360 + 60 = 540$. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Duljine stranica trokuta ABC iznose $|BC| = 4\,\text{cm}$ i $|AC| = 5\,\text{cm}$, a duljina dijela simetrale kuta $\sphericalangle ACB$ koji se nalazi unutar trokuta je $s = \frac{10}{3}\,\text{cm}$. Izračunajte duljinu stranice $\overline{AB}$.

Rješenje.

Simetrala kuta u trokutu siječe njemu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica (Poučak o simetrali kuta u trokutu), odnosno vrijedi $\frac{x}{y}=\frac{5}{4}$, gdje je $x=|AD|$, $y=|DB|$, a točka D je sjecište zadane simetrale i stranice $\overline{AB}$. Tada je $x=5k$, $y=4k$. 2 boda



Primijenimo poučak o kosinusu na trokute ADC i CDB.

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{5^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2-25k^2}{2\cdot 5\cdot \frac{10}{3}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2+4^2-16k^2}{2\cdot 4\cdot \frac{10}{3}}.$$ 2 boda

Izjednačavanjem desnih strana tih jednakosti dobivamo

$$\frac{5^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2-25k^2}{2\cdot 5\cdot \frac{10}{3}}=\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2+4^2-16k^2}{2\cdot 4\cdot \frac{10}{3}}$$

odnosno nakon sređivanja $k^2=\frac{4}{9}$, 1 bod

pa je $k=\frac{2}{3}$.

Tada je $|AB|=x+y=9k=6\,\mathrm{cm}$. 1 bod

Napomena: Slično se dođe do rješenja ako se primijeni poučak o kosinusu na trokute ADC i ABC za određivanje $\cos\alpha$.

Ako učenik ne koristi poučak o simetrali kuta u trokutu, do omjera $\frac{x}{y}=\frac{5}{4}$ može doći i primjenom poučka o sinusu na trokute ADC i DBC i to nosi 2 boda:

$$\frac{x}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{5}{\sin\varphi}, \qquad \frac{y}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{4}{\sin(180^\circ-\varphi)}, \qquad \text{gdje je } \varphi=\sphericalangle ADC.$$

Kako je $\sin(180^\circ-\varphi)=\sin\varphi$, slijedi da je $\frac{x}{y}=\frac{5}{4}$, a dalje postupamo kao u prvom rješenju.

Zadatak B-3.6.

Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba $a \sin x - \operatorname{tg} x = 1$ ima rješenje u intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$?

Rješenje.

Danu jednadžbu zapišimo u obliku $a \sin x = \operatorname{tg} x + 1$.

Uočimo da broj a mora biti pozitivan i različit od 0 jer je x u intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ gdje su i $\sin x$ i $\operatorname{tg} x$ pozitivni. 1 bod

$$\begin{aligned} a \sin x &= \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} \\ a \sin x \cos x &= \sin x + \cos x \\ a^2 \sin^2 x \cos^2 x &= (\sin x + \cos x)^2 && \text{1 bod} \\ \frac{1}{4} a^2 \sin^2 2x &= 1 + 2 \sin x \cos x \\ a^2 \sin^2 2x &= 4 + 4 \sin 2x. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Uz supstituciju $y = \sin 2x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $a^2 y^2 - 4y - 4 = 0$ čija su rješenja

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16a^2}}{2a^2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + a^2}}{a^2}. \qquad \text{1 bod}$$

Vrijedi $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ pa je $2x \in \langle 0, \pi \rangle$ te $\sin 2x > 0$.

Zato je $y = \frac{2 + 2\sqrt{1 + a^2}}{a^2}$, uz uvjet $y \leqslant 1$, a to je zbog $a \neq 0$ ekvivalentno s 1 bod

$$2\sqrt{1 + a^2} \leqslant a^2 - 2.$$

Lijeva strana ove nejednakosti je pozitivna, pa mora biti $a^2 - 2 > 0$, tj. $|a| > \sqrt{2}$, odnosno zbog $a > 0$ vrijedi $a > \sqrt{2}$. (*) 1 bod

Uz taj uvjet nakon kvadriranja dobivamo

$$\begin{aligned} 4 + 4a^2 &\leqslant a^4 - 4a^2 + 4 && \text{1 bod} \\ a^4 - 8a^2 &\geqslant 0 && \text{1 bod} \\ a^2 \geqslant 8 &\qquad |a| \geqslant 2\sqrt{2} && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Iz (*) je $a > \sqrt{2}$, pa slijedi $a \geqslant 2\sqrt{2}$ tj. $a \in \left[2\sqrt{2}, \infty\right\rangle$. 1 bod

Napomena: Ako učenik nije pri rješavanju nejednakosti naveo početni uvjet $a > 0$ i uvjet (*) da je $a^2 > 2$, odnosno $|a| > \sqrt{2}$, treba oduzeti 2 boda, bez obzira na točno rješenje.

Zadatak B-3.7.

Odredite najveći prirodni broj a za koje jednadžba

$$\left|\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\right| = \frac{1}{a}x$$

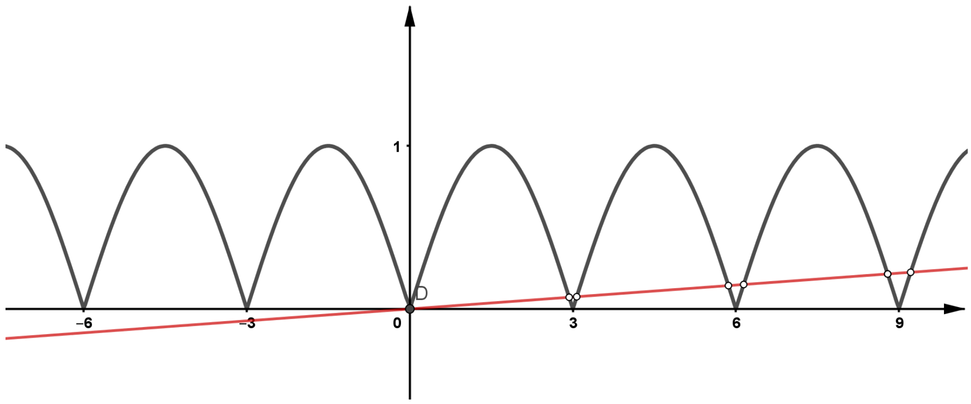
ima točno 600 različitih rješenja.

Rješenje.

Promotrimo grafove funkcija $f(x) = \left|\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\right|$ i $g(x) = \frac{1}{a}x$.

Period funkcije $\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$ je $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$, pa je period funkcije f jednak $\frac{6}{2} = 3$. 1 bod

Uočimo da su sva rješenja jednadžbe nenegativna jer se grafovi ne sijeku lijevo od y osi.

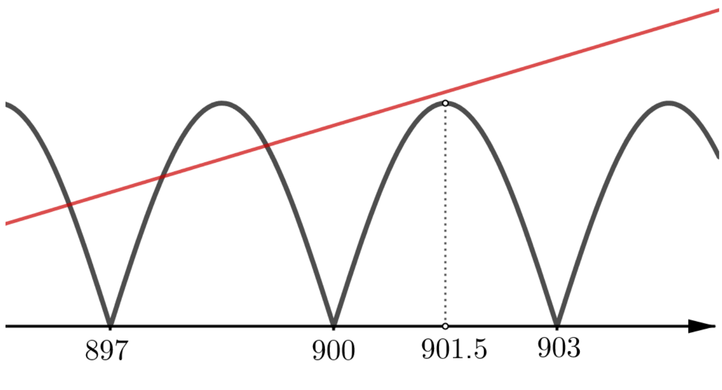


2 boda

Na svakom od intervala $[0,3\rangle$, $[3,6\rangle$, $[6,9\rangle$, $\ldots$, $[3(k-1),3k\rangle$, grafovi funkcija f i g sijeku se u dvije točke. To znači da je za 600 rješenja potrebno 300 takvih intervala u kojima su po dva rješenja. 2 boda

Zadnji interval u kojem se grafovi mogu sjeći je $[3\cdot 299, 3\cdot 300\rangle = [897, 900\rangle$, a za svaki $x > 900$ funkcija g mora imati vrijednost veću od funkcije f. (ili slika)

Promotrimo prikazane grafove funkcija f i g za $x \geqslant 900$.



1 bod

Uočimo da funkcija f na intervalu $[900, 903]$ ima najveću vrijednost 1 za $x = 901.5$ jer je $f(901.5) = \left|\sin \frac{901.5}{2}\pi\right| = \left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = 1.$ 1 bod

Funkcija $g(x) = \dfrac{1}{a}x$ ima vrijednost 1 za $x = a$.

Neka je $a = 902$, odnosno $g(x) = \dfrac{1}{902}x$. Tada je $g(901.5) = \dfrac{901.5}{902} < 1$, a kako je $f(901.5) = 1$, slijedi $f(901.5) < f(901.5)$.

To znači da se grafovi funkcija f i g na intervalu $[900, 903]$ sijeku, pa zadana jednadžba ima više od 600 rješenja. Kako bi isto vrijedilo i za $a \geqslant 903$, traženi broj a manji je od 902. 1 bod

Neka je $a = 901$, odnosno $g(x) = \dfrac{1}{901}x$.

Očito je $g(x) > 1$ za sve $x > 901$, a kako je $f(x) \leqslant 1$ funkcije f i g se ne sijeku za $x > 901$. Pokažimo da se ne sijeku ni za $x \in [900, 901]$.

Izračunajmo vrijednosti funkcija f i g za $x = 900$ i $x = 901$.

$$g(900) = \frac{900}{901} \approx 0.9, \qquad g(901) = 1,$$

$$f(900) = \left|\sin \frac{900\pi}{3}\right| = 0, \qquad f(901) = \left|\sin \frac{901\pi}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866.$$

Očito je $0.9 < g(x) \leqslant 1$ i $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ za sve $x \in [900, 901]$ pa je na tom intervalu $f(x) < g(x)$ i njihovi se grafovi ne sijeku. 2 boda

Zaključujemo da je najveći prirodni broj a s traženim svojstvom jednak $a = 901$.

Napomena: Ako učenik provede postupak do zaključka koji je zadnji interval u kojem se grafovi sijeku (uz obrazloženje), a zatim samo napiše da je $a = 901$ bez ikakvog obrazloženja i računanja dobiva najviše 5 bodova.

Ako je učenik uz sve prethodno i računao vrijednosti funkcija f i g za barem dvije vrijednosti od $x \in \{900, 901, 902, 903\}$ (vidljivo je da je provjeravao nejednakost $f(x) < g(x)$ za $x \geqslant 900$), ali još uvijek nema valjanog i potpunog obrazloženja dobiva najviše 8 bodova.

Ako je pokazao za $a = 901$ vrijedi $f(x) < g(x)$ za $x \leqslant 900$, ali nije pokazao da je to najveći takav, odnosno da $a = 902$ nije rješenje, gubi 1 bod.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

28. veljače 2019.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Odredite sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$\frac{(9!n!)^2-(8!(n+1)!)^2}{(9!n!)^2-18\cdot(8!)^2 n!(n+1)!+(8!(n+1)!)^2}>0$$

Rješenje.

Zapišimo lijevu stranu dane nejednadžbe u obliku

$$\frac{(9\cdot 8!)^2(n!)^2-(8!)^2((n+1)\cdot n!)^2}{(9\cdot 8!)^2(n!)^2-18\cdot(8!)^2 n!\cdot(n+1)\cdot n!+(8!)^2((n+1)\cdot n!)^2}$$ 2 boda

Ako brojnik i nazivnik podijelimo s $(8!n!)^2$ dobivamo

$$\frac{81-(n+1)^2}{81-18(n+1)+(n+1)^2}$$ 1 bod

Uočimo u brojniku razliku kvadrata, a u nazivniku kvadrat razlike.

$$\frac{(9-(n+1))(9+(n+1)}{(9-(n+1))^2}=\frac{(8-n)(10+n)}{(8-n)^2}$$ 1 bod

Nakon skraćivanja s $8-n$ (uz uvjet $n\neq 8$), slijedi

$$\frac{10+n}{8-n}>0,$$

odnosno $8-n>0$ (brojnik je uvijek pozitivan).

Dakle $n<8$, pa je konačno rješenje $n\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$. 2 boda

Zadatak B-4.2.

Dane su beskonačne sume

$$a=2020^{x+3}+2020^{x+2}+2020^{x+1}+2020^{x}+\ldots$$

$$b=2019^{x+2}+2019^{x+1}+2019^{x}+2019^{x-1}+\ldots$$

Odredite $x\in\mathbb{R}$ tako da vrijedi $\dfrac{a}{b}=2018$.

Rješenje.

Uočimo da su beskonačne sume a i b geometrijski redovi. Njihovi kvocijenti su redom $\frac{1}{2020}$ i $\frac{1}{2019}$. 1 bod

Kako su kvocijenti manji od 1 redovi su konvergentni, pa vrijedi

$$a = 2020^{x+3} + 2020^{x+2} + 2020^{x+1} + 2020^{x} + \cdots = \frac{2020^{x+3}}{1-\frac{1}{2020}} = \frac{2020^{x+4}}{2019}$$

$$b = 2019^{x+2} + 2019^{x+1} + 2019^{x} + 2019^{x-1} + \cdots = \frac{2019^{x+2}}{1-\frac{1}{2019}} = \frac{2019^{x+3}}{2018}$$ 2 boda

Još treba riješiti jednadžbu

$$\frac{\frac{2020^{x+4}}{2019}}{\frac{2019^{x+3}}{2018}} = 2018 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2020^{x+4}\cdot 2018}{2019^{x+3}\cdot 2019} = 2018.$$ 1 bod

Slijedi $\frac{2020^{x+4}}{2019^{x+4}} = 1$ odnosno $x+4=0$, $x=-4$. 2 boda

Zadatak B-4.3.

Brojevi $\sin x$ i $\sin 2x$ su prva dva člana geometrijskog niza kojemu su svi članovi različiti od 0. Odredite sve brojeve $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ za koje je treći član toga niza jednak $\sin 4x$.

Rješenje.

Kvocijent geometrijskog niza je $q = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = 2\cos x$, 1 bod

Iz uvjeta $q \neq 0$, odnosno $\sin x \neq 0$ i $\sin 2x \neq 0$, slijedi $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. (*)

Neka je $a_3 = \sin 4x$. Tada zbog $a_3 = a_2 \cdot q$ slijedi

$$\sin 4x = \sin 2x \cdot 2\cos x.$$ 1 bod

Rješavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} &2\sin 2x\cos 2x = 2\sin 2x\cos x \\ &2\sin 2x(\cos 2x - \cos x) = 0 \\ &\sin 2x = 0 \quad \text{ili} \quad \cos 2x - \cos x = 0 \end{aligned}$$ 1 bod

Kako je zbog (*) $\sin 2x \neq 0$, 1 bod

slijedi $\cos 2x = \cos x$, odakle je $2x = \pm x + 2k\pi$. 1 bod

Rješenja te jednadžbe su $x = 2k\pi$ (ne zadovoljava (*)) i $x = \frac{2k\pi}{3}$.

Kako je $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$, za $k=1$ i $k=2$ dobivamo tražena rješenja.

Treći član zadanoga niza je $\sin 4x$ za $x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Zadan je kompleksan broj $w = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Izračunajte $(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\ldots(1+w^{2019})$.

Rješenje.

Izračunajmo prvih nekoliko potencija broja w.

$$w^1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{1 bod}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \qquad \text{1 bod}$$

Uočimo da se bilo koje tri uzastopne potencije kompleksnog broja w ponavljaju. 1 bod

Stoga dobivamo:

$$(1+w)(1+w^2)(1+w^3)\ldots(1+w^{2019}) = \Big((1+w)(1+w^2)(1+w^3)\Big)^{673}. \qquad \text{1 bod}$$

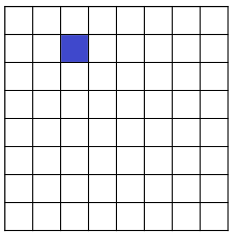
Kako je

$$1+w = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 1+w^2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 1+w^3 = 2$$

dobivamo

$$(1+w)(1+w^2)\ldots(1+w^{2019}) = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\right)^{673} = 2^{673}. \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak B-4.5.



Na kvadratnoj ploči dimenzija 8×8 obojeno je polje u drugom retku i trećem stupcu. Neka je A broj kvadrata $k \times k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ koji sadrže obojeno polje i B broj kvadrata koji ne sadrže obojeno polje. Odredite omjer $\frac{A}{B}$.

Prvo rješenje.

Izračunajmo ukupan broj kvadrata $k \times k, k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ na ploči 8×8.

Kvadrata 1×1 ima 64.

Kvadrata 2×2 ima 49, jer prvi redak tog kvadrata s dva polja možemo smjestiti u prvi redak dane mreže na 7 načina, u drugi redak na 7 načina i tako dalje do sedmog retka, što je ukupno $7 \cdot 7$ načina.

Analognim zaključivanjem dobivamo da Kvadrata 3×3 ima 36, kvadrata 4×4 ima 25, kvadrata 5×5 ima 16, kvadrata 6×6 ima 9, kvadrata 7×7 ima 4 i kvadrata 8×8 ima 1.

Dakle ukupan broj kvadrata je

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204.$$ 2 boda

Prebrojimo koliko je takvih kvadrata koji sadrže obojeno polje. Kvadrata 1×1 ima 1. Kvadrata 2×2 ima 4 jer njih možemo smjestiti tako da obojeno polje bude bilo koje od četiri polja tog kvadrata. 1 bod

Kvadrate 3×3 možemo smjestiti tako da obojeno polje bude u prva dva retka ili prva tri stupca takvog kvadrata, a to znači na 6 načina. 1 bod

Isto vrijedi i za kvadrate 4×4, 5×5 i 6×6.

Kvadrata 7×7 ima 4 (jer obojeno polje može biti samo u 1. i 2. retku i 1. i 2. stupcu).

Kvadrata 8×8 očito ima samo 1.

Ukupno je $1 + 4 + 6 + 6 + 6 + 6 + 4 + 1 = 34$ kvadrata koji sadrže obojeno polje. 1 bod

Tada onih koji ga ne sadrže ima ukupno $204 - 34 = 170$, pa je traženi omjer $\frac{34}{170} = \frac{1}{5}$.

1 bod

Drugo rješenje.

Ukupan broj kvadrata računamo kao i u prvom rješenju, ima ih 204. 2 boda

Na sličan način (po retcima) prebrojavamo kvadrate koji ne sadrže obojeno polje i dobivamo sljedeće rezultate:

dimenzije	broj kvadrata koji ne sadrže obojeno polje
1×1	63
2×2	$2 \cdot 5 + 5 \cdot 7 = 45$
3×3	$2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 30$
4×4	$2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 19$
5×5	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 10$
6×6	$2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3$
7×7	0
8×8	0
ukupno	170

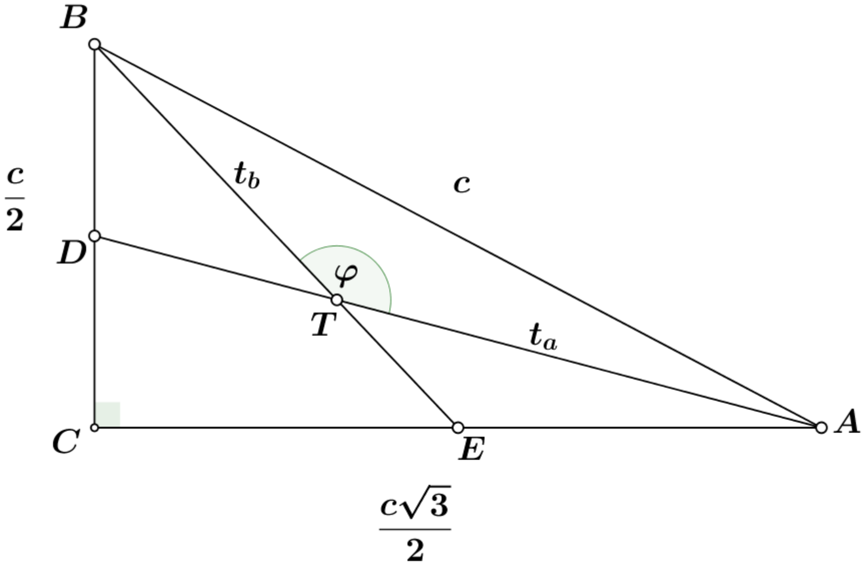
3 boda

Dakle ukupan broj kvadrata koji ne sadrže obojeno polje je $B = 170$, a onih koji sadrže je $A = 204 - 170 = 34$. Traženi omjer je $\dfrac{34}{170} = \dfrac{1}{5}$. 1 bod

Zadatak B-4.6.

Neka je ABC pravokutan trokut sa šiljastim kutovima $\sphericalangle CAB = 30°$ i $\sphericalangle ABC = 60°$, a točka T njegovo težište. Odredite kosinus kuta $\sphericalangle ATB$. U kojem su omjeru površina trokuta ABC i površina trokuta ATB?

Rješenje.



Neka je $|AB| = c$ i $\sphericalangle ATB = \varphi$. Tada je $|BC| = \frac{c}{2}$, $|AC| = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Iz pravokutnog trokuta ACD slijedi $t_a^2 = \left(\dfrac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{c^2}{16} = \dfrac{13c^2}{16}$, $t_a = \frac{c\sqrt{13}}{4}$. (*)

Iz pravokutnog trokuta BCE slijedi $t_b^2 = \left(\dfrac{c\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{7c^2}{16}$, $t_b = \frac{c\sqrt{7}}{4}$. (**) 2 boda

Primijenimo li poučak o kosinusu na trokut ATB dobivamo:

$$c^2 = \left(\frac{2}{3}\,t_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\,t_b\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}\,t_a \cdot \frac{2}{3}\,t_b \cos\varphi. \qquad ***$$ 1 bod

Uvrštavanjem (*) i (**) u (***) dobivamo redom

$$c^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{13c^2}{16} + \frac{4}{9} \cdot \frac{7c^2}{16} - 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{c\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{c\sqrt{7}}{4} \cos\varphi$$ 1 bod

$$c^2 = \frac{5}{9}c^2 - c^2 \cdot \frac{\sqrt{91}}{18} \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -\frac{8}{\sqrt{91}}$$ 2 boda

Tada je $P_{ABC} = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{8}$ i

$$P_{ATB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t_a \cdot \frac{2}{3} t_b \sin\varphi = \frac{2}{9} \cdot \frac{c\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{c\sqrt{13}}{4} \cdot \sqrt{1 - \left(-\frac{8}{\sqrt{91}}\right)^2}$$ 1 bod

$$P_{ATB} = \frac{c^2\sqrt{91}}{72} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}} = \frac{c^2\sqrt{3}}{24}.$$ 1 bod

Traženi omjer površina jednak je

$$\frac{P_{ABC}}{P_{ATB}} = \frac{\frac{c^2\sqrt{3}}{8}}{\frac{c^2\sqrt{3}}{24}} = \frac{3}{1}.$$ 1 bod

Napomena: Ako učenik koristi činjenicu da težišnice dijele trokut na 6 trokuta jednakih površina, pa je traženi omjer 6 : 2, odnosno 3 : 1, dodijeliti 3 boda.

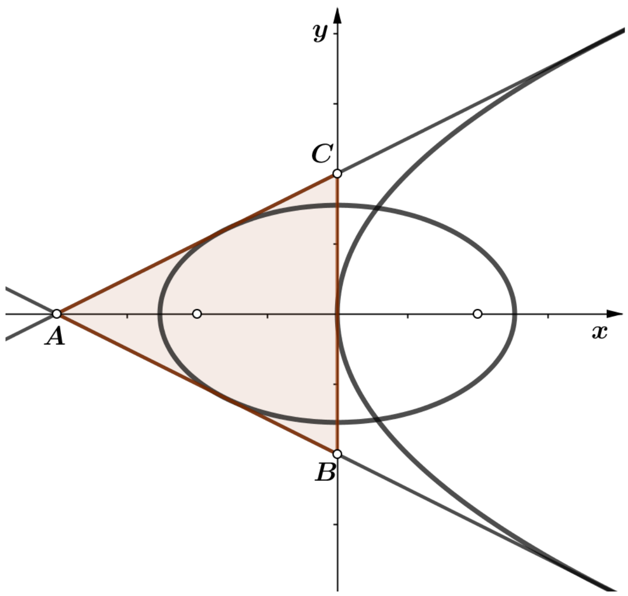
Zadatak B-4.7.

Neka je p pozitivan realan broj, a $y^2 = 2px$ i $x^2 + 4y^2 = 2p^2$ zadane krivulje. Odredite površinu trokuta koji njihove zajedničke tangente zatvaraju s y osi.

Rješenje.

Zadane krivulje su parabola $y^2 = 2px$ i elipsa $x^2 + 4y^2 = 2p^2$.

Da bismo odredili površinu traženog trokuta, treba odrediti jednadžbe zajedničkih tangenata parabole i elipse. Njihova sjecišta s koordinatnim osima određuju vrhove A, B i C traženog trokuta.



2 boda

(Skica krivulja s jasno označenim tangentama i vrhovima traženog trokuta ili osjenčani trokut vrijedi 2 boda, a ako nije označen trokut dodijeliti 1 bod, kao i ako je učenik samo prepoznao da se radi o paraboli i elipsi.)

Jednadžbu elipse možemo pisati u obliku $\frac{x^2}{2p^2} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{2}} = 1$, odakle je $a^2 = 2p^2$, $b^2 = \frac{p^2}{2}$. 1 bod

Koristimo uvjet da je pravac $y = kx + l$ tangenta parabole pa vrijedi $p = 2kl$, te da je tangenta elipse pa vrijedi $k^2a^2 + b^2 = l^2$. Dakle, rješavamo sljedeći sustav jednadžbi (s nepoznanicama k i l)

$$p = 2kl, \qquad k^2 \cdot 2p^2 + \frac{p^2}{2} = l^2.$$ 2 boda

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $l = \frac{p}{2k}$, tada slijedi $2p^2k^2 + \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{4k^2}$, što nakon dijeljenja s p^2 i sređivanja daje bikvadratnu jednadžbu $8k^4 + 2k^2 - 1 = 0$. S obzirom 1 bod
da je k realan broj, mora biti $k^2 \geqslant 0$, odnosno $k^2 = \frac{1}{4}$. Tada je $k = \pm\frac{1}{2}$, a iz $p = 2kl$ slijedi $l = \pm p$. 1 bod

(Kako je p je pozitivan realni broj, l i k imaju isti predznak.)

Tada su jednadžbe tangenata

$$t_1 \ \ldots \ y = \frac{1}{2}x + p \qquad t_2 \ \ldots \ y = -\frac{1}{2}x - p$$ 1 bod

Sjecišta tih tangenata s y osi su redom točke $C(0, p)$ i $B(0, -p)$, a sjecište tangenata (i osi x) je točka $A(-2p, 0)$. 1 bod

Ako s O označimo ishodište, tražena površina trokuta ABC je

$$P = \frac{|AO| \cdot |BC|}{2} = \frac{2p \cdot 2p}{2} = 2p^2.$$ 1 bod