DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 28. – 30. ožujka 2019.
5. razred - rješenja

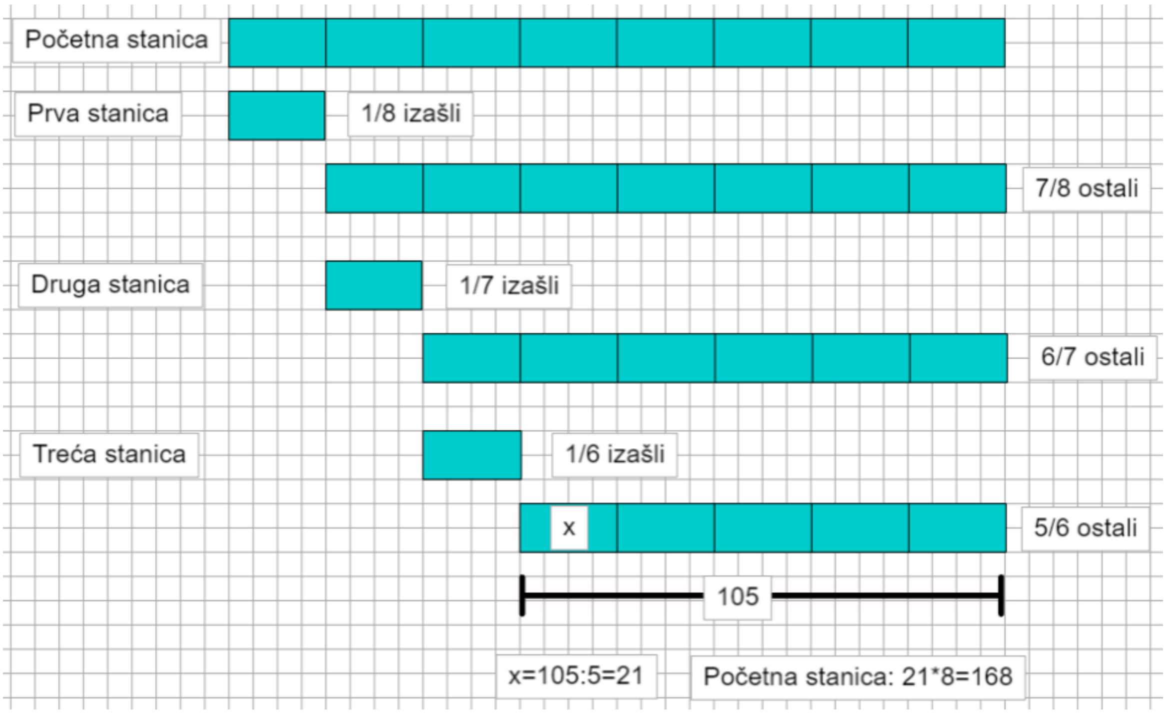
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U školu je upisano 372 učenika.
Rastavimo broj 372 na proste faktore:
$372 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 31$
U školu je upisano 180 dječaka.
Rastavimo broj 180 na proste faktore:
$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
Kako u svakom odjeljenju ima najviše 40 učenika, a broj odjeljenja mora biti djelitelj od 180, slijedi da su učenici podijeljeni u 12 odjeljenja po 31 učenik.
Dijeljenjem ukupnog broja dječaka s brojem odjeljenja, dobivamo da broj dječaka po odjeljenju iznosi 15.
Djevojčica u svakom odjeljenju ima 16.

2. 5 mačaka za 6 dana uhvati 5 miševa.
Pet puta manje mačaka za isto vrijeme uhvati pet puta manje miševa:
1 mačka za 6 dana uhvati 1 miša.
Dvostruko više mačaka za isto vrijeme uhvati dva puta više miševa:
2 mačke za 6 dana uhvate 2 miša.
Isti broj mačaka za dvostruko kraće vrijeme uhvati dvostruko manje miševa:
2 mačke za 3 dana uhvate 1 miša.
Isti broj mačaka za trostruko dulje vrijeme uhvati trostruko više miševa:
2 mačke za 9 dana uhvate 3 miša.

3. Prvi način:
Rješavanje unatrag.
U vlaku je ostalo 105 putnika nakon što se iskrcala $\frac{1}{6}$ preostalih putnika na trećoj stanici.
To znači da 105 putnika čine $\frac{5}{6}$ putnika koji su ostali u vlaku nakon druge stanice.
$105 \cdot 6 : 5 = 126$
Nakon druge stanice u vlaku je ostalo 126 putnika.
To znači da 126 putnika čine $\frac{6}{7}$ putnika koji su ostali u vlaku nakon prve stanice.
$126 \cdot 7 : 6 = 147$
Nakon prve stanice u vlaku je ostalo 147 putnika.
To znači da 147 putnika čine $\frac{7}{8}$ putnika koji su se ukrcali na početnoj stanici.
$147 \cdot 8 : 7 = 168$
S početne stanice krenulo je 168 putnika.

Drugi način:
Zadatak možemo riješiti grafičkim prikazom kao na slici.



4. Neka je godina rođenja $\overline{abcd}$.
Osoba ima $a + b + c + d$ godina.
Vrijedi $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2\ 019$
$1\ 000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 2\ 019$
$1\ 001a + 101b + 11c + 2d = 2\ 019$

Broj a može biti samo 1 ili 2.
Neka je $a = 1$.
Tada je:
$1001 + 101b + 11c + 2d = 2\ 019$
$101b + 11c + 2d = 1\ 018$

Broj b može biti samo 9.
Iz $b = 9$ slijedi:
$909 + 11c + 2d = 1\ 018$
$11c + 2d = 109$

Broj c može biti samo 9.
Tada je:
$99 + 2d = 109$
$2d = 10$
$d = 5$.
Osoba je rođena 1995. godine.

Drugi slučaj dobijemo za $a = 2$.
Tada je:

$2\,002 + 101b + 11c + 2d = 2\,019$
$101b + 11c + 2d = 17$
Broj b mora biti 0.
Iz $b = 0$ slijedi:
$11c + 2d = 17$

Broj c može biti 0 ili 1.
Za $c = 0$, vrijedi $2d = 17$, što kao rješenje ne daje prirodni broj.
Za $c = 1$ slijedi:
$11 + 2d = 17$
$2d = 6$
$d = 3$.
Osoba je rođena 2013. godine.

Ove, 2019. godine, stariji brat ima 24, a mlađi 6 godina.

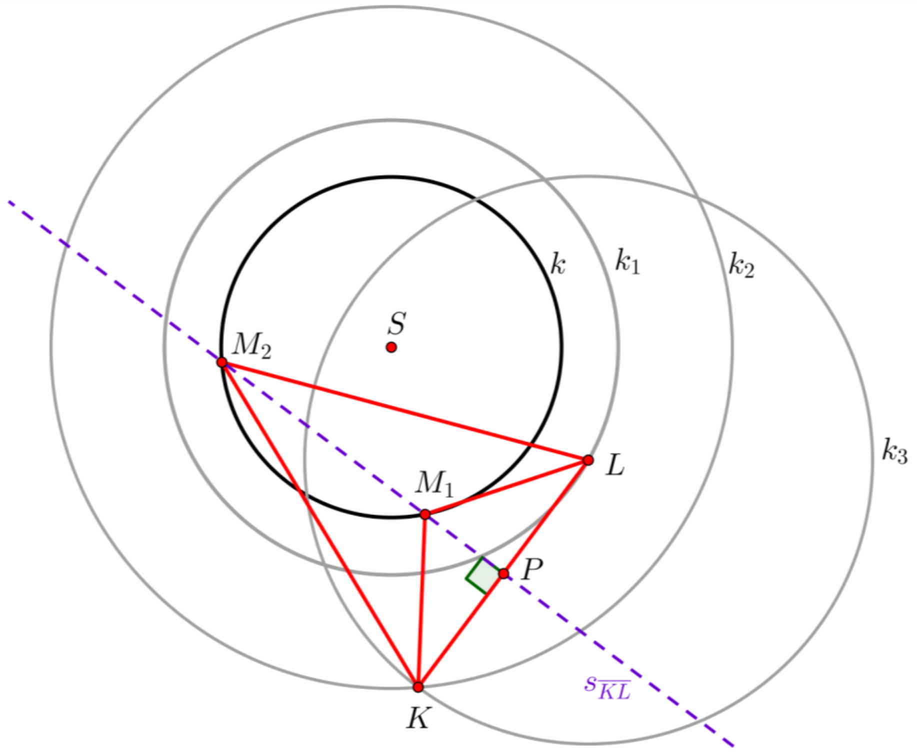
5. Najprije nacrtamo kružnicu k sa središtem u točki S polumjera 3 cm.
Zatim nacrtamo točke K i L tako da je $|SK| = 6$ cm, $|SL| = 4$ cm, $|KL| = 5$ cm:

- Nacrtamo kružnicu k_1 sa središtem u točki S polumjera 4 cm.
- Nacrtamo kružnicu k_2 sa središtem u točki S polumjera 6 cm.
- Na kružnici k_1 odaberemo točku L.
- Nacrtamo kružnicu k_3 sa središtem u točki L polumjera 5 cm.
- Točka K je (jedno) sjecište kružnica k_2 i k_3.

Dalje, konstruiramo simetralu $s_{\overline{KL}}$ dužine $\overline{KL}$.

Vrh M traženog jednakokračnog trokuta je sjecište simetrale $s_{\overline{KL}}$ dužine $\overline{KL}$ i zadane kružnice k.

Postoje dva rješenja. To su trokuti ΔKLM_1 i ΔKLM_2.

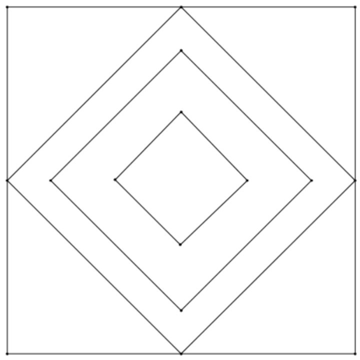


DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 28. - 30. travnja 2019.

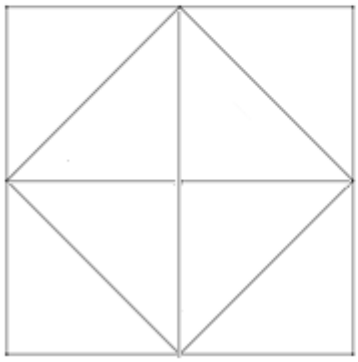
6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.



Iz površine četvrtog kvadrata, za koju vrijedi da je $P_4 = 9$ cm², slijedi da je $a_4 = 3$ cm.
Stranice trećeg kvadrata udaljene su od stranica četvrtog kvadrata po 3 cm pa je duljina stranice trećeg kvadrata $a_3 = a_4 + 3 + 3 = 3 + 3 + 3 = 9$ cm.
Stranice drugog kvadrata udaljene su od stranica trećeg kvadrata po 2 cm pa je duljina stranice drugog kvadrata $a_2 = a_3 + 2 + 2 = 9 + 2 + 2 = 13$ cm.
Površina drugog kvadrata je $P_2 = a_2 \cdot a_2 = 13 \cdot 13 = 169$ cm².



Drugi kvadrat se sastoji od četiri međusobno sukladna trokuta, a prvi kvadrat sastoji se od osam takvih trokuta pa je površina prvog kvadrata dva puta veća od površine drugog kvadrata, tj. $P_1 = 2 \cdot P_2 = 2 \cdot 169 = 338$ cm².

2. Neka prvom printeru treba p minuta da sam isprinta cijeli model, drugom printeru d minuta, a trećem printeru t minuta.
Tada bi u jednoj minuti:

- prvi i drugi printer isprintali: $\frac{1}{p} + \frac{1}{d} = \frac{1}{30}$ modela;

- prvi i treći printer isprintali: $\frac{1}{p}+\frac{1}{t}=\frac{1}{40}$ modela;
- drugi i treći printer isprintali: $\frac{1}{d}+\frac{1}{t}=\frac{1}{24}$ modela.

Zbrojimo li sve tri jednadžbe dobivamo:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{d}+\frac{1}{p}+\frac{1}{t}+\frac{1}{d}+\frac{1}{t}=\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{24}=\frac{4+3+5}{120}=\frac{12}{120}=\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{d}+\frac{1}{t}=\frac{1}{20}$$

Oduzmemo li od dobivenog zbroja svaku pojedinu početnu jednadžbu, dobivamo:

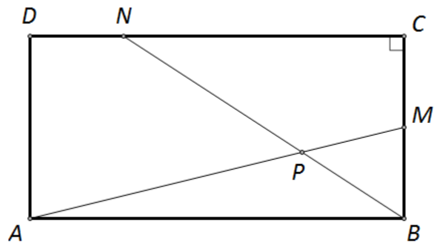
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{d}+\frac{1}{t}-\frac{1}{p}-\frac{1}{d}=\frac{1}{20}-\frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{t}=\frac{1}{60} \Rightarrow t=60 \text{ minuta};$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{d}+\frac{1}{t}-\frac{1}{p}-\frac{1}{t}=\frac{1}{20}-\frac{1}{40} \Rightarrow \frac{1}{d}=\frac{1}{40} \Rightarrow d=40 \text{ minuta};$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{d}+\frac{1}{t}-\frac{1}{d}-\frac{1}{t}=\frac{1}{20}-\frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{p}=\frac{1}{120} \Rightarrow p=120 \text{ minuta}.$$

Kako bi zasebno isprintao cijeli zadani model, prvom printeru je potrebno 120 minuta, drugom 40 minuta, a trećem 60 minuta.

3.



Neka je $a=|AB|=|CD|$ i $b=|BC|=|AD|$. Tada je $a = b + 4$.

Opseg pravokutnika je 16 dm = 160 cm pa vrijedi:

$160 = 2 \cdot a + 2 \cdot b$,

$160 = 2 \cdot (b + 4) + 2 \cdot b$,

$160 = 2 \cdot b + 8 + 2 \cdot b$,

$160 = 4 \cdot b + 8$,

$4 \cdot b = 152$,

$b = 38$ cm.

Tada je $a = 38 + 4 = 42$ cm.

Kako je $|NC|=3|DN|$, tada je $|NC|=\frac{3}{4}|DC|=\frac{3}{4}\cdot 42=31.5$ cm.

Točka M je polovište stranice $\overline{BC}$ pa je $|BM|=|MC|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{1}{2}\cdot 38=19$ cm.

$$P_{\Delta ABP}=P_{\Delta ABM}-P_{\Delta BMP}=\frac{42\cdot 19}{2}-P_{\Delta BMP}=399-P_{\Delta BMP},$$

$$P_{PMCN}=P_{\Delta BCN}-P_{\Delta BMP}=\frac{38\cdot 31.5}{2}-P_{\Delta BMP}=598.5-P_{\Delta BMP},$$

$$P_{PMCN}-P_{\Delta ABP}=598.5-P_{\Delta BMP}-(399-P_{\Delta BMP})=598.5-P_{\Delta BMP}-399+P_{\Delta BMP}=199.5 \text{ cm}^2.$$

Površina četverokuta $PMCN$ veća je od površine trokuta ABP za 199.5 cm².

4. Prvi način:

Kako bismo prebrojali koliko ima prirodnih brojeva koji su manji ili jednaki 2 019, a koji nisu djeljivi zadanim brojevima, prebrojimo sve one brojeve koji su tim brojevima djeljivi.

Brojeva koji su djeljivi brojem 6 ima 336, jer je 2 019 : 6 = 336 i ostatak 3.
Brojeva koji su djeljivi brojem 9 ima 224, jer je 2 019 : 9 = 224 i ostatak 3.
Brojeva koji su djeljivi brojem 15 ima 134, jer je 2 019 : 15 = 134 i ostatak 9.

Ukoliko zbrojimo koliko ima pojedinih višekratnika, neke od njih smo brojali više puta.
Brojeve koji su djeljivi i brojem 6 i brojem 9, tj. brojem V(6, 9) = 18, brojali smo dva puta.
Na isti način smo brojeve djeljive brojevima V(6, 15) = 30 i V(9, 15) = 45 brojali dva puta.
Brojeve djeljive brojem V(6, 9, 15) = 90 brojali smo tri puta.

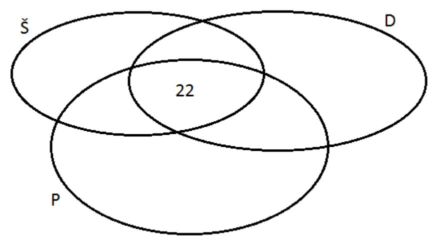
Brojeva koji su djeljivi brojem 18 ima 112, jer je 2 019 : 18 = 112 i ostatak 3.
Brojeva koji su djeljivi brojem 30 ima 67, jer je 2 019 : 30 = 67 i ostatak 9.
Brojeva koji su djeljivi brojem 45 ima 44, jer je 2 019 : 45 = 44 i ostatak 39.
Brojeva koji su djeljivi brojem 90 ima 22, jer je 2 019 : 90 = 22 i ostatak 39.

336 + 224 + 134 – (112 + 67 + 44) + 22 = 694 – 223 + 22 = 493
Prirodnih brojeva koji su manji ili jednaki 2 019, a koji su djeljivi brojevima 6, 9 ili 15 ima 493.
Traženih brojeva tada ima 2 019 – 493 = 1 526.

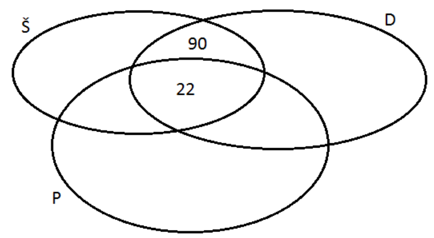
Prirodnih brojeva koji su manji ili jednaki 2 019, a koji nisu djeljivi s niti jednim od brojeva 6, 9 i 15 ima 1 526.

Drugi način:

Neka je *Š* skup brojeva koji su djeljivi brojem 6, *D* skup brojeva koji su djeljivi brojem 9, a *P* skup brojeva koji su djeljivi brojem 15.

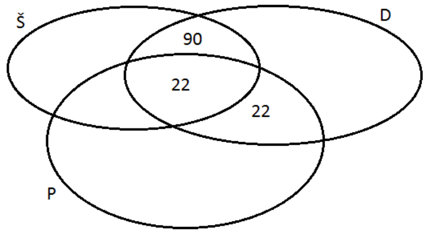


Brojeva koji su djeljivi brojevima 6, 9 i 15, odnosno koji su djeljivi s V(6, 9, 15) = 90 ima 22, jer je 2 019 : 90 = 22 i ostatak 39.



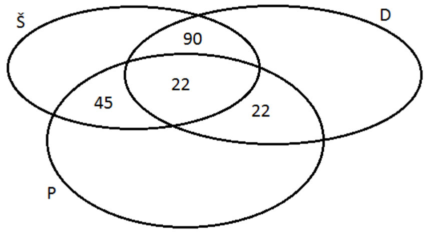
Brojeva koji su djeljivi brojevima 6 i 9, odnosno koji su djeljivi s V(6, 9) = 18 ima 112, jer je 2 019 : 18 = 112 i ostatak 3.

112 = 22 + **90**



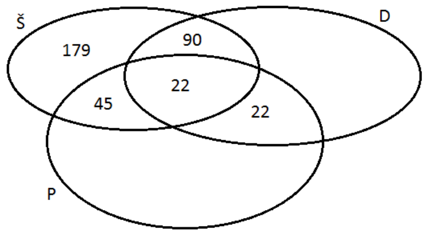
Brojeva koji su djeljivi brojevima 9 i 15, odnosno koji su djeljivi s V(9, 15) = 45 ima 44, jer je 2 019 : 45 = 44 i ostatak 39.

44 = 22 + **22**



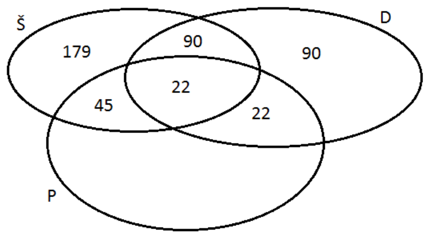
Brojeva koji su djeljivi brojevima 6 i 15, odnosno koji su djeljivi s V(6, 15) = 30 ima 67, jer je 2 019 : 30 = 67 i ostatak 9.

67 = 22 + **45**



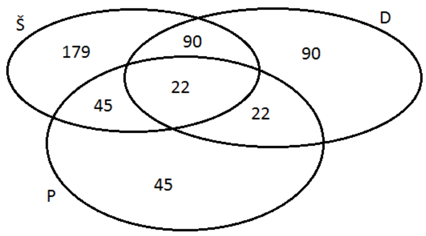
Brojeva koji su djeljivi brojem 6 ima 336, jer je 2 019 : 6 = 336 i ostatak 3.

336 = 22 + 45 + 90 + **179**



Brojeva koji su djeljivi brojem 9 ima 224, jer je 2 019 : 9 = 224 i ostatak 3.

224 = 22 + 90 + 22 + **90**



Brojeva koji su djeljivi brojem 15 ima 134, jer je 2 019 : 15 = 134 i ostatak 9.

134 = 22 + 45 + 22 + **45**

Brojeva koji nisu djeljivi s niti jednim od brojeva 6, 9 i 15 ima
2 019 – (22 + 90 + 22 + 45 + 179 + 90 + 45) = 2 019 – 493 = 1 526.

5. Posljednji brojevi u svakom retku čine niz: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,… u kojem je drugi član za 2 veći od prvoga, treći član za 3 veći od drugoga, četvrti član za 4 veći od trećega, peti član za 5 veći od četvrtoga i tako dalje, pa vrijedi:

- prvi redak tablice završava brojem 1,
- drugi redak tablice završava brojem 1 + 2 = 3,
- treći redak tablice završava brojem 1 + 2 + 3 = 6,
- četvrti redak tablice završava brojem 1 + 2 + 3 + 4 = 10,
- peti redak tablice završava brojem 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, …

Općenito, n-ti redak tablice završava brojem $1+2+3+4+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Za $n = 44$ dobivamo $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}=\dfrac{44\cdot 45}{2}=22\cdot 45=990$.

Za $n = 45$ dobivamo $\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{45\cdot 46}{2}=45\cdot 23=1\,035$.

Prema tome, broj 1000 se nalazi u 45. retku tablice koji započinje brojem 991, a završava brojem 1 035, pa treba izračunati zbroj $991+992+993+...+1\,035$.

Slijedi:

$$991+992+993+...+1\,035=1+2+3+...+1\,035-(1+2+3+...+990)$$
$$=\frac{1\,035\cdot 1\,036}{2}-\frac{990\cdot 991}{2}=1\,035\cdot 518-495\cdot 991$$
$$=536\,130-490\,545=45\,585.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. – 30.ožujka 2019.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Označimo redom s *x, y, z* svotu novca koju je uštedio prvi, drugi i treći od prijatelja.
Ukupnu ušteđenu svotu trojice prijatelja označimo s *k*.
Tada iz uvjeta zadatka možemo odnose zapisati kao jednadžbe:

$$x+y+z=k$$

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2.5}=160$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=240$$

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2.5}=160 \quad / \cdot 10$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=240 \quad / \cdot 12$$

$$2x+5y+4z=1\,600$$

$$6x+3y+4z=2\,880$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobije se:

$$8x+8y+8z=4\,480$$

$$\Rightarrow 8(x+y+z)=4\,480$$

$$\Rightarrow x+y+z=560$$

Iznos ušteđevine trojice prijatelja iznosi 560 kuna.

2. Prvi način:
Pogledajmo koliko ima uređenih parova **prirodnih brojeva** (a, b), tako da zadovoljavaju uvjete zadatka.
Ako je $a = 1$, tada b može poprimiti vrijednosti 1, 2, 3, . . ., 2 017.
Ako je $a = 2$, tada b može poprimiti vrijednosti 1, 2, 3, . . ., 2 016.
$\vdots$
Ako je $a = 2017$, tada b može poprimiti samo vrijednost 1.
Dakle uređenih parova (a, b), pri čemu su a i b prirodni brojevi ima:

$$1+2+\cdots+2\,017=\frac{2\,018\cdot 2\,017}{2}=2\,035\,153$$

Pogledajmo koliko ima uređenih parova (a, b) koji zadovoljavaju uvjete zadatka, gdje su ***a* i *b* cijeli brojevi različiti od nule**.
Iz uvjeta $|a|+|b|<2\,019$ slijedi da svakom uređenom paru prirodnih brojeva (a, b), koji zadovoljava uvjet zadatka možemo pridružiti i uređene parove cijelih brojeva oblika $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a,-b)$

koji zadovoljavaju uvjete zadatka.
Uređenih parova cijelih brojeva (a, b), gdje su a i b cijeli brojevi različiti od nule ima $4 \cdot 2\,035\,153 = 8\,140\,612$.

Ostalo je još prebrojati uređene parove (a, b), u kojima je **barem jedan od članova jednak nuli**.

Ako je $a = 0$, tada prema uvjetu zadatka slijedi $|b| < 2\,019$.

Cijelih brojeva b koji zadovoljavaju taj uvjet ima $2 \cdot 2\,018 + 1 = 4\,037$.

Analogno ako je $b = 0$.
Uređenih parova cijelih brojeva (a, b), u kojima je barem jedan od članova jednak nuli ima $4\,037 + 4\,037 - 1 = 8\,073$ (uređen par (0, 0) smo brojali 2 puta).

Ukupno ima $8\,140\,612 + 8\,073 = 8\,148\,685$ uređenih parova cijelih brojeva (a, b) s traženim svojstvom.

Napomena: Drugi način prebrojavanja uređenih parova cijelih brojeva (a, b) u kojima je **barem jedan od članova jednak nuli**:
Ako je $a = 0$, cijelih brojeva $b \neq 0$, a koji zadovoljavaju zadanu nejednakost, ima $2 \cdot 2\,018 = 4\,036$.
Analogno ako je $b = 0$, cijelih brojeva $a \neq 0$, a koji zadovoljavaju zadanu nejednakost, ima $2 \cdot 2\,018 = 4\,036$.
Postoji i jedan uređeni par (a, b) u kojem su oba člana jednaka nuli.
Uređenih parova cijelih brojeva (a, b), u kojima je barem jedan od članova jednak nuli ima: $4\,036 + 4\,036 + 1 = 8\,073$.

Drugi način:

Ako je $a = 0$, tada b može poprimiti vrijednosti $-2\,018, -2\,017, \ldots, 2\,017, 2\,018$, tj.
za $a = 0$ uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima $2 \cdot 2\,018 + 1$.

Ako je $a = 1$, tada b može poprimiti vrijednosti $-2\,017, -2\,016, \ldots, 2\,016, 2\,017$, tj.
za $a = 1$ uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima $2 \cdot 2\,017 + 1$.

Ako je $a = -1$, tada b može poprimiti vrijednosti $-2\,017, -2\,016, \ldots, 2\,016, 2\,017$, tj. za $a = -1$ uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima $2 \cdot 2\,017 + 1$.

Ako je $a = 2$, tada b može poprimiti vrijednosti $-2\,016, -2\,015, \ldots, 2\,015, 2\,016$, tj. za $a = 2$ uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima $2 \cdot 2\,016 + 1$.

Ako je $a = -2$, tada b može poprimiti vrijednosti $-2\,016, -2\,015, \ldots, 2\,015, 2\,016$, tj. za $a = -2$ uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima $2 \cdot 2\,016 + 1$.

$\vdots$

Ako je $a = 2\,017$, tada b može poprimiti vrijednosti $-1, 0, 1$, tj.
za $a = 2\,017$ uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima $2 \cdot 1 + 1$.

Ako je $a = -2\,017$, tada b može poprimiti vrijednosti $-1, 0, 1$, tj.
za $a = -2\,017$ uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima $2 \cdot 1 + 1$.

Ako je $a = 2\,018$, tada b može poprimiti samo vrijednost 0, tj.

za a = 2 018 uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima 2 · 0 + 1.

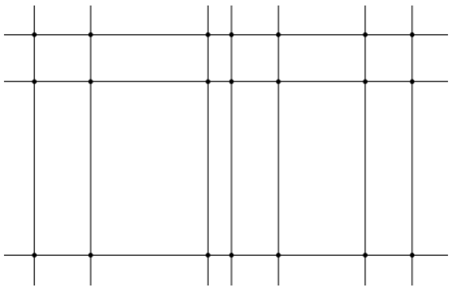
Ako je a = –2 018, tada b može poprimiti samo vrijednost 0, tj.

za a = –2 018 uređenih parova koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima 2 · 0 + 1.

Ukupno, takvih uređenih parova cijelih brojeva ima:

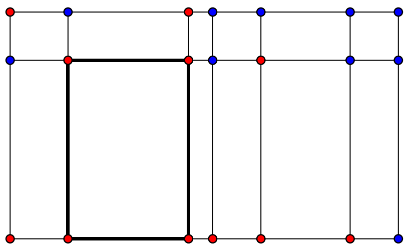
$$\begin{aligned}
&(2\cdot 2\,018+1)+2\cdot\big((2\cdot 2\,017+1)+(2\cdot 2\,016+1)+\ldots+(2\cdot 1+1)+(2\cdot 0+1)\big)\\
&=2\cdot 2\,018+1+2\cdot\big(2\cdot(2\,017+2\,016+\ldots+1)+2\,018\cdot 1\big)\\
&=2\cdot 2\,018+1+2\cdot\left(2\cdot\frac{2\,017\cdot 2\,018}{2}+2\,018\right)\\
&=2\cdot 2\,018+1+2\cdot(2\,017\cdot 2\,018+2\,018)\\
&=2\cdot 2\,018+1+2\cdot 2\,018\cdot(2\,017+1)\\
&=2\cdot 2\,018+1+2\cdot 2\,018\cdot 2\,018\\
&=2\cdot 2\,018\cdot(1+2\,018)+1\\
&=2\cdot 2\,018\cdot 2\,019+1\\
&=8\ 148\ 685
\end{aligned}$$

3. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je više crvenih točaka.
Dakle, među 21 točkom, barem ih je 11 crvenih.
Razlikujemo dva slučaja:



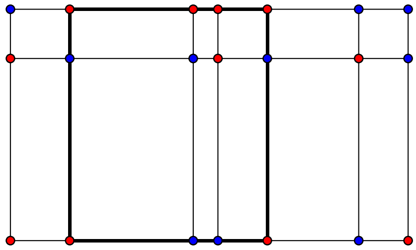
1) Postoji stupac s 3 crvene točke.
Kako preostalih 8 crvenih točaka treba rasporediti u 6 stupaca, postoji barem jedan stupac u kojemu su dvije crvene točke. Te su dvije crvene točke, zajedno s crvenim točkama na odgovarajućim pozicijama iz stupca s 3 crvene točke, vrhovi pravokutnika.

Na primjer:

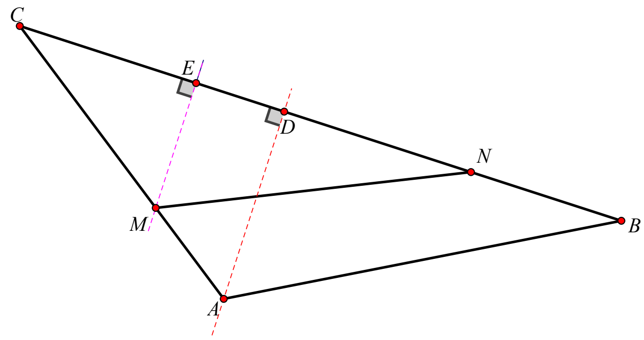


2) Ne postoji stupac s 3 crvene točke.
To znači da 11 crvenih točaka treba rasporediti u 7 stupaca s maksimalno dvije crvene točke pa zaključujemo da postoje barem 4 stupca s po dvije crvene točke. U svakom od ta 4 stupca dvije crvene točke mogu zauzeti 3 različite pozicije (prvi i drugi redak, prvi i treći redak ili drugi i treći redak), stoga postoji barem jedan raspored s odgovarajućim pozicijama crvenih točaka koje su vrhovi pravokutnika.

Na primjer:



4. Označimo na slici visinu $\overline{AD}$ trokuta ΔABC na stranicu $\overline{BC}$ i visinu $\overline{ME}$ trokuta ΔMNC na stranicu $\overline{NC}$.



Dobiveni pravokutni trokuti ΔADC i ΔMEC imaju zajednički kut pri vrhu C pa su prema poučku K–K slični i vrijedi $|AC|:|MC|=|AD|:|ME|$.

Kako je $|AM|:|MC|=1:m$, vrijedi $|AC|:|MC|=(1+m):m$ pa je omjer duljina visina trokuta ΔADC i ΔMEC jednak $|AD|:|ME|=(1+m):m$, odnosno $\frac{|AD|}{|ME|}=\frac{(1+m)}{m}$.

Nadalje, kako je $|BN|:|NC|=1:n$, omjer duljina stranica $\overline{BC}$ i $\overline{NC}$ trokuta ΔABC i ΔMNC jednak je $|BC|:|NC|=(1+n):n$, odnosno

$\frac{|BC|}{|NC|}=\frac{(1+n)}{n}$.

Kako je $P_{\Delta ABC}=\frac{|BC|\cdot|AD|}{2}$, $P_{\Delta MNC}=\frac{|NC|\cdot|ME|}{2}$ i vrijedi $P_{\Delta ABC}:P_{\Delta MNC}=2:1$, onda je

$$\left(|BC|\cdot|AD|\right):\left(|NC|\cdot|ME|\right)=2:1$$

ili

$$\frac{|BC|\cdot|AD|}{|NC|\cdot|ME|}=\frac{|BC|}{|NC|}\cdot\frac{|AD|}{|ME|}=2.$$

Stoga vrijedi:

$$\frac{1+n}{n}\cdot\frac{1+m}{m}=2$$
$$(1+n)\cdot(1+m)=2nm$$
$$1+m+n+nm=2nm$$
$$nm-n-m=1$$
$$nm-n-m+1=1+1$$
$$n(m-1)-(m-1)=2$$
$$(m-1)(n-1)=2$$

Budući da su m i n prirodni brojevi, imamo dvije mogućnosti:
$m-1=1$ i $n-1=2$ ili $m-1=2$ i $n-1=1$.
Konačno, traženi brojevi su $m=2$ i $n=3$ ili $m=3$ i $n=2$.

Napomena 1: Jednadžba $nm-n-m=1$ može se riješiti i na ovaj način:

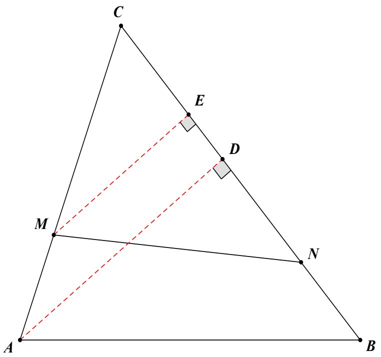
$$nm-m=1+n$$

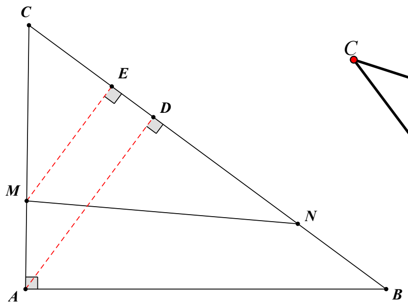
$$m(n-1)=1+n$$

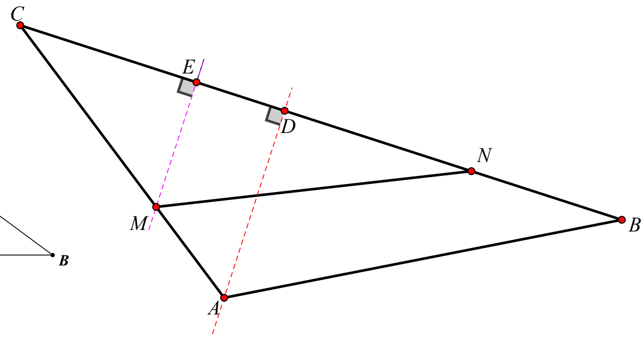
$$m=\frac{1+n}{n-1}=\frac{n-1+2}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}$$

Da bi m bio prirodni broj, $n-1$ mora biti prirodni broj i djelitelj broja 2.
Prema tome, $n-1$ može biti 1 ili 2 odnosno n može biti 2 ili 3.
Broj m može biti, redom u ovisnosti o n, 3 ili 2.
Konačno, traženi brojevi su $m=2$ i $n=3$ ili $m=3$ i $n=2$.

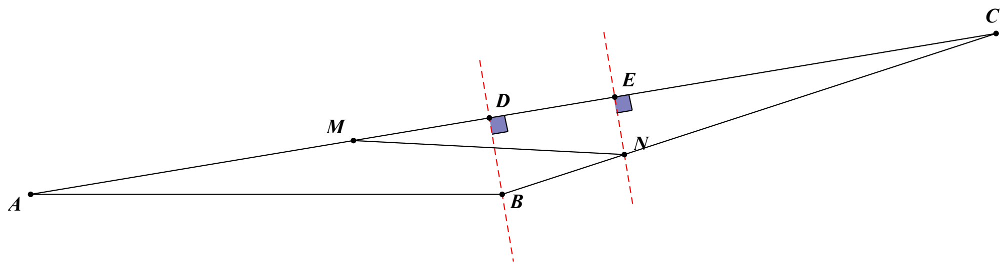
Napomena 2: Rješenje ne ovisi o vrsti trokuta tj. o vrsti unutarnjeg kuta s vrhom A.







No, ukoliko je zadatak rješavan na način da se promatraju visina $\overline{BD}$ trokuta ΔABC na stranicu $\overline{AC}$ i visina $\overline{NE}$ trokuta ΔMNC na stranicu $\overline{MC}$, rješenje se dobije analogno uz odgovarajuće oznake.



Označimo na slici visinu $\overline{BD}$ trokuta ΔABC na stranicu $\overline{AC}$ i visinu $\overline{NE}$ trokuta ΔMNC na stranicu $\overline{MC}$.
Dobiveni pravokutni trokuti ΔBCD i ΔNCE imaju zajednički kut pri vrhu C pa su prema poučku K–K slični i vrijedi $|BC|:|NC|=|BD|:|NE|$.
Kako je $|BN|:|NC|=1:n$, vrijedi $|BC|:|NC|=(1+n):n$, pa je omjer duljina visina trokuta ΔBDC i ΔNEC jednak $|BD|:|NE|=(1+n):n$, odnosno $\frac{|BD|}{|NE|}=\frac{(1+n)}{n}$.
Nadalje, kako je $|AM|:|MC|=1:m$, omjer duljina stranica $\overline{AC}$ i $\overline{MC}$ trokuta ΔABC i ΔMNC jednak je $|AC|:|MC|=(1+m):m$, odnosno
$\frac{|AC|}{|MC|}=\frac{(1+m)}{m}$.

Kako je $P_{\Delta ABC}=\frac{|AC|\cdot|BD|}{2}$, $P_{\Delta MNC}=\frac{|MC|\cdot|NE|}{2}$ i vrijedi $P_{\Delta ABC}:P_{\Delta MNC}=2:1$, onda je

$$\left(|AC|\cdot|BD|\right):\left(|MC|\cdot|NE|\right)=2:1$$

ili

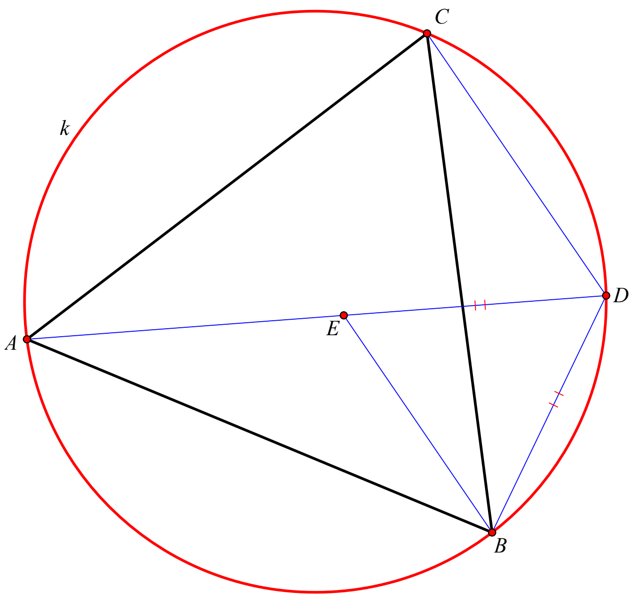
$$\frac{|AC|\cdot|BD|}{|MC|\cdot|NE|}=\frac{|AC|}{|MC|}\cdot\frac{|BD|}{|NE|}=2\,.$$

Stoga vrijedi:

$$\frac{1+m}{m}\cdot\frac{1+n}{n}=2$$
$$(1+m)\cdot(1+n)=2mn$$
$$1+n+m+mn=2mn$$
$$mn-n-m=1$$
$$mn-n-m+1=1+1$$
$$n(m-1)-(m-1)=2$$
$$(m-1)(n-1)=2$$

Budući da su m i n prirodni brojevi, imamo dvije mogućnosti:
$m-1=1$ i $n-1=2$ ili $m-1=2$ i $n-1=1$.
Konačno, traženi brojevi su $m=2$ i $n=3$ ili $m=3$ i $n=2$.

5. Prvi način:



Vrijedi da je $|\angle ACB|=|\angle ADB|=60°$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AB}$ i $|\angle CDA|=|\angle CBA|=60°$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC}$.

Slijedi da je $|\angle CDB|=120°$.

Napomena: Veličina $\angle CDB$ može se odrediti i iz činjenice da je četverokut $ABDC$ tetivni pa je zbroj veličina nasuprotnih kutova jednak 180°. Iz čega slijedi da je $|\angle CDB|=120°$.

Neka je E točka dužine $\overline{AD}$ takva da je $|DE|=|DB|$.

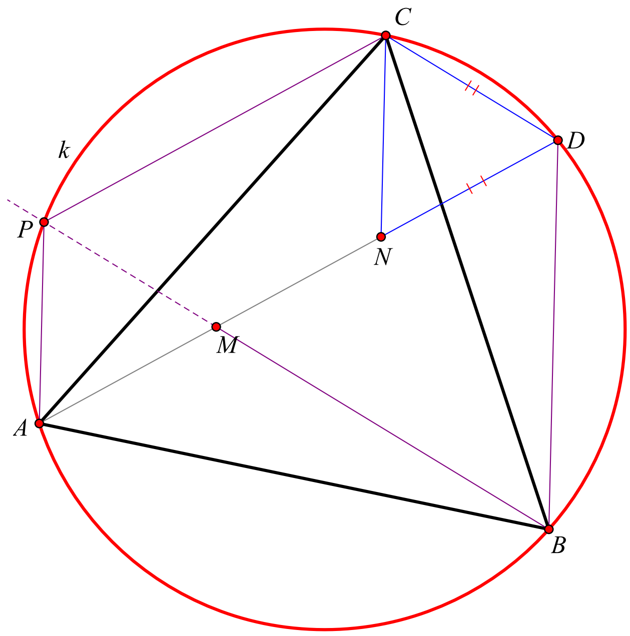
Trokut ΔDEB je jednakostraničan jer ima dvije sukladne stranice i kut veličine 60° između njih.
Trokuti ΔABE i ΔCBD su sukladni prema poučku S–S–K jer je $|BD|=|BE|$ (stranice jednakostraničnog trokuta ΔDEB), $|AB|=|BC|$ (stranice jednakostraničnog trokuta ΔABC) i

$|\angle CDB| = |\angle AEB| = 120^\circ$ ($\angle AEB$ je vanjski kut jednakostraničnog trokuta ΔDEB).

Posljedica te sukladnosti je zaključak da je $|AE| = |CD|$.

Dakle, $|AD| = |AE| + |ED| = |CD| + |BD|$.

Drugi način:



Nacrtajmo dužinu $\overline{AD}$ i na njoj označimo točku N tako da je $|DC| = |DN|$.

Kako su $\angle ADC$ i $\angle ABC$ obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AC}$, vrijedi $|\angle ADC| = 60^\circ$, pa je ΔNDC jednakostraničan.

Analogno, na $\overline{AD}$ označimo točku M tako da je $|DB| = |DM|$. Kako su $\angle ADB$ i $\angle ACB$ obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AB}$, vrijedi $|\angle ADB| = 60^\circ$ pa je i ΔMBD jednakostraničan.

Produljimo dužinu $\overline{MB}$ preko točke M do sjecišta s kružnicom k i označimo sjecište s P.

$|\angle BPC| = 60^\circ$ jer je to obodni kut nad tetivom $\overline{BC}$.

$|\angle DMP| = 120^\circ$ jer je to vanjski kut jednakostraničnog trokuta ΔMBD.

Veličine triju unutarnjih kutova četverokuta $MDCP$ su 60°, 120° i 60° pa je $|\angle DCP| = 120^\circ$.

Kako su nasuprotni kutovi tog četverokuta sukladni, zaključujemo da je $MDCP$ paralelogram iz čega slijedi $|DC| = |MP|$.

Kako je $\angle BPA$ obodni nad tetivom $\overline{AB}$ (kao i $\angle ACB$), vrijedi $|\angle BPA| = 60^\circ$.

Nadalje, $|\angle AMP| = 60^\circ$ jer je vršni kut kuta $\angle BMD$ pa je i ΔAMP jednakostraničan.

Slijedi $|MP| = |MA|$.

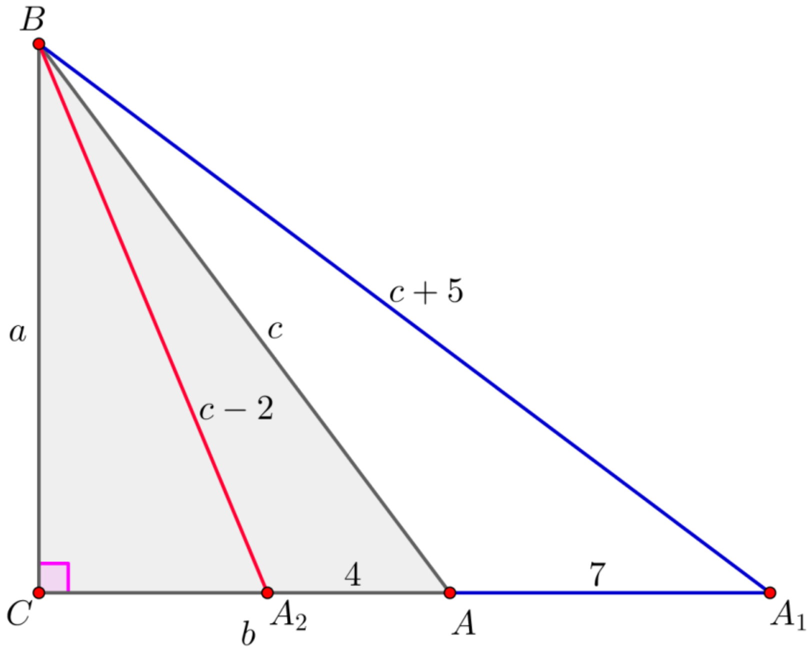
Konačno, $|DN| = |DC| = |MP| = |MA|$, pa je $|AD| = |AM| + |MD| = |CD| + |DB|$, što je trebalo pokazati.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 28. - 30. travnja 2019.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.



Neka su a, b i c standardne oznake za duljine stranica pravokutnog trokuta ABC.
Vrijedi Pitagorin poučak

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutan trokut A_1BC, sa duljinama stranica a, $b + 7$ i $c + 5$, dobivamo:

$$a^2 + (b + 7)^2 = (c + 5)^2. \tag{2}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutan trokut A_2BC, sa duljinama stranica a, $b - 4$ i $c - 2$, dobivamo:

$$a^2 + (b - 4)^2 = (c - 2)^2. \tag{3}$$

Nakon kvadriranja binoma dobivamo sustav jednadžbi:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1*}$$

$$a^2 + b^2 + 14b + 49 = c^2 + 10c + 25 \tag{2*}$$

$$a^2 + b^2 - 8b + 16 = c^2 - 4c + 4\,. \tag{3*}$$

Iz prvih dviju jednadžbi, oduzimanjem (1*) od (2*), ili supstitucijom $c^2 = a^2 + b^2$ dobije se

$$14b - 10c = -24 \,/ : 2$$

$$7b - 5c = -12\,. \tag{4}$$

Iz prve i treće jednadžbe, na sličan način dobije se

$$-8b + 4c = -12 \,/ : 4$$

$$-2b + c = -3\,. \tag{5}$$

Sada se iz sustava jednadžbi (4) i (5) izračunaju b i c:

$$\begin{aligned} 7b-5c&=-12 \\ -2b+c&=-3\ /\cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7b-5c&=-12 \\ -10b+5c&=-15 \end{aligned}$$

$$-3b=-27 \Rightarrow b=9\ \text{cm}.$$

Iz (5) slijedi: $c=2b-3=18-3=15\,\text{cm}$.

Tada je $a^2=15^2-9^2=225-81=144 \Rightarrow a=12\,\text{cm}$.

Površina trokuta ABC jednaka je: $P=\dfrac{a\cdot b}{2}=\dfrac{12\cdot 9}{2}=54\ \text{cm}^2$.

2. Prvi način:

Razmotrimo sve moguće varijante parnosti brojeva m, n, p.

1. mogućnost:
   Jedan od tih brojeva je neparan, a druga dva parna.
   Kvadrat neparnog broja je neparan, a parnog broja paran, pa je lijeva strana neparna.
   Na desnoj strani su svi pribrojnici parni jer je umnožak neparnog i parnog, kao i parnog i parnog, parni broj.
   Dakle, ovakva je mogućnost isključena.
2. mogućnost:
   Jedan od brojeva je paran, a druga dva neparna.
   Kvadrati neparnih brojeva su neparni, a njihov zbroj je paran, pa je lijeva strana parna.
   Na desnoj strani su tri pribrojnika parna, a samo jedan neparan (umnožak dvaju neparanih brojeva). Stoga je cijeli zbroj neparan.
   Time je i ta mogućnost isključena.
3. mogućnost:
   Sva su tri broja parna. Brojeve možemo zapisati u obliku m = 2a, n = 2b i p = 2c pa jednakost poprima oblik:
   $$(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2=4ab+4ac+4bc+50$$
   $$4\left(a^2+b^2+c^2\right)=4\left(ab+ac+bc+12\right)+2$$
   Lijeva strana je djeljiva s 4, a desna pri dijeljenju s 4 ima ostatak 2, što isključuje i ovu jednakost.
4. mogućnost:
   Sva su tri broja neparna. Brojeve možemo zapisati u obliku m = 2a + 1, n = 2b + 1, p = 2c + 1 i jednakost poprima oblik:
   $$(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2=(2a+1)(2b+1)+(2a+1)(2c+1)+(2b+1)(2c+1)+50$$
   $$4a^2+4a+1+4b^2+4b+1+4c^2+4c+1=4ab+2a+2b+1+4ac+2a+2c+1+4bc+2b+2c+1+50$$
   $$4\left(a^2+a+b^2+b+c^2+c\right)+3=4\left(ab+ac+bc+a+b+c+13\right)+1$$
   Lijeva strana pri dijeljenju s 4 ima ostatak 3, a desna 1, što konačno isključuje i ovu mogućnost.

Dakle, ne postoje prirodni brojevi m, n i p koji zadovoljavaju zadanu jednakost.

Drugi način:

Najprije pomnožimo zadanu jednakost s 2:

$$2m^2+2n^2+2p^2=2mn+2np+2pm+100\,.$$

Sada to možemo malo drugačije zapisati kao:

$$m^2-2mn+n^2+n^2-2np+p^2+p^2-2pm+m^2=100\,,$$

$$(m-n)^2+(n-p)^2+(p-m)^2=100\,. \qquad (1)$$

Uvedemo li oznake $x^2=(m-n)^2$, $y^2=(n-p)^2$, $z^2=(p-m)^2$, izraz (1) zapisujemo kao

$x^2+y^2+z^2=100$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x^2 \geq y^2 \geq z^2$.

Analizirajmo mogućnosti:

x^2	y^2+z^2	y^2	y^2	z^2
100	0	0	0	0 (ne može jer bi vrijedilo $n=p$ i $p=m$, pa bi bilo $m=n$, što je u suprotnosti s tim da je $x^2=100$)
81	19	≤ 16	16	3 (nije kvadrat prirodnog broja)
			≤ 9	ne može jer je $y^2 \geq z^2$
64	36	≤ 36	36	0 (ne može jer bi bilo $p=m$, pa bi prema tome vrijedilo $y^2=(n-m)^2$, a kako je $x^2=(m-n)^2$, značilo bi da je $y^2=x^2$, što ne vrijedi jer je $x^2=64$, a $y^2=36$)
			25	11 (nije kvadrat prirodnog broja)
			≤ 16	ne može jer je $y^2 \geq z^2$
49	51	≤ 49	49	2 (nije kvadrat prirodnog broja)
			36	15 (nije kvadrat prirodnog broja)
			≤ 25	ne može jer $y^2 \geq z^2$
36	64	≤ 36 jer $x^2 \geq y^2$	36	28 (nije kvadrat prirodnog broja)
			≤ 25	ne može jer je $y^2 \geq z^2$
25	≤ 25	≤ 25		ne može jer bi zbroj iznosio najviše 75

Time smo zaključili da ne postoje brojevi m, n i p koji zadovoljavaju zadanu jednakost.

3. Prvi način:

Vrijedi $50=2\cdot 5^2$.

Svaki broj u tablici napišimo kao 1 ili kao umnožak prostih faktora.

Najprije u svako polje tablice upišimo broj 1, a potom ćemo neke od tih brojeva pomnožiti djeliteljima broja 50 većim od 1. U takvom zapisu, faktor 2 mora biti upisan u točno jednom polju u svakom retku i u točno jednom polju u svakom stupcu i to možemo učiniti na $3\cdot 2\cdot 1=6$ načina.

Nadalje, u takvom zapisu, faktor 5 mora biti ukupno upisan točno dvaput u svakom retku i točno dvaput u svakom stupcu. Razlikujemo tri mogućnosti:

(i) u svakom retku i u svakom stupcu faktor $5^2=25$ će biti napisan u točno jednom polju; takvih je mogućnosti $3\cdot 2\cdot 1=6$.

(ii) u svakom retku i u svakom stupcu faktor 5 će biti napisan u točno dva polja; i takvih mogućnosti ima $3\cdot 2\cdot 1=6$.

(iii) u jedno polje je upisan broj 25, a u četiri polja koja se ne nalaze u onim retcima i stupcima u kojem je 25, upisan je broj 5. Takvih rasporeda ima 9.

Dakle, za upisivanje faktora 5 imamo $6+6+9=21$ mogućnost.

Ukupno, broj različitih načina za upisivanje brojeva u tablicu koji zadovoljavaju uvjete zadatka je

$$6\cdot 21=126\,.$$

Drugi način:

Iz rastava $50 = 2 \cdot 5^2$ se može zaključiti da u svakom retku i stupcu imamo jedan od sljedeća četiri rastava tri broja čiji je umnožak 50; to su

(i) $1 \cdot 1 \cdot 50$,
(ii) $1 \cdot 2 \cdot 25$,
(iii) $1 \cdot 5 \cdot 10$,
(iv) $2 \cdot 5 \cdot 5$.

Najprije, moguće je da u svakom stupcu i retku imamo uvijek isti rastav.
Zatim, uz rastav (i) u jednom retku i stupcu, moguće je imati samo dva rastava (ii) ili dva rastava (iii) u preostalim retcima i stupcima. Ako u niti jednom retku i stupcu nemamo rastav (i), onda preostaju samo mogućnosti da u retcima i stupcima imamo dva rastava (iii) i jedan rastav (iv) ili po jedan rastav (ii), (iii) i (iv).
Zato se tablica može ispuniti isključivo na sljedeće načine:

1) U svakom retku i stupcu je jedan broj 50 i dva broja 1. Broj takvih rasporeda je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
2) U svakom retku i stupcu je jedan broj 2 i dva broja 5. Broj takvih rasporeda je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
3) U svakom retku i stupcu su brojevi 25, 2 i 1. Broj takvih rasporeda je $6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.
4) U svakom retku i stupcu su brojevi 10, 5 i 1. Broj takvih rasporeda je $6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.
5) U jednom je polju broj 50, u dva polja u retku i dva polja u stupcu sa 50 je broj 1, a u preostala četiri polja su dva broja 10 i dva broja 5. Kako je 10 i 5 moguće upisati na dva načina, a 50 može biti na 9 mjesta, broj ovakvih rasporeda je $9 \cdot 2 = 18$.

50	1	1
1	10	5
1	5	10

50	1	1
1	5	10
1	10	5

6) U jednom je polju broj 50, u dva polja u retku i dva polja u stupcu sa 50 je broj 1, a u preostala četiri polja su dva broja 25 i dva broja 2. Kako je 25 i 2 moguće upisati na dva načina, a 50 može biti na 9 mjesta, broj ovakvih rasporeda je $9 \cdot 2 = 18$.

50	1	1
1	25	2
1	2	25

50	1	1
1	2	25
1	25	2

7) U jednom je polju broj 2, u dva polja u retku i dva polja u stupcu sa 2 je broj 5, a u preostala četiri polja su dva broja 10 i dva broja 1. Kako je 10 i 1 moguće napisati na dva načina, a 2 može biti na 9 mjesta, broj ovakvih rasporeda je $9 \cdot 2 = 18$.

2	5	5
5	10	1
5	1	10

2	5	5
5	1	10
5	10	1

8) U jednom je polju broj 25, a u retku i stupcu s njim 1 i 2, koji se mogu rasporediti na četiri načina. Ostala četiri polja su jednoznačno određena: u polju gdje se sijeku 1 i 1 je broj 10, a u ostala tri broj 5:

25	1	2
1	10	5
2	5	5

25	1	2
2	5	5
1	10	5

25	2	1
1	5	10
2	5	5

25	2	1
2	5	5
1	5	10

Budući se broj 25 može staviti na 9 mjesta, broj ovakvih rasporeda je $9 \cdot 4 = 36$.

To su sve mogućnosti.
Ukupan broj rasporeda jednak je $6 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 36 = 126$.

4. Prvi način:

Neka je

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = n .$$

S obzirom da su i s lijeve i s desne strane jednadžbe nenegativni brojevi, kvadriranjem se dobiva ekvivalentna jednadžba:

$$x-4\sqrt{x-4} + 2\sqrt{\left(x-4\sqrt{x-4}\right)\left(x+4\sqrt{x-4}\right)} + x + 4\sqrt{x-4} = n^2$$

$$2x + 2\sqrt{\left(x-4\sqrt{x-4}\right)\left(x+4\sqrt{x-4}\right)} = n^2$$

$$2\sqrt{x^2-16(x-4)} = n^2 - 2x$$

$$\sqrt{x^2-16x+64} = \frac{n^2}{2} - x$$

$$\sqrt{\left(x-8\right)^2} = \frac{n^2}{2} - x$$

Za $4 \le x \le 8$ je $\sqrt{(x-8)^2} = -(x-8)$, a za $x > 8$ je $\sqrt{(x-8)^2} = x-8$, što možemo zapisati kao

$$|x-8| = \frac{n^2}{2} - x .$$

Za $4 \le x \le 8$ zato vrijedi:

$$8 - x = \frac{n^2}{2} - x$$

$$8 = \frac{n^2}{2}$$

$$n^2 = 16$$

$$n = 4$$

Dakle, za prirodne brojeve $x = 4, 5, 6, 7, 8$ vrijednost zadanog izraza je prirodan broj 4.
Za $x > 8$ je:

$$x - 8 = \frac{n^2}{2} - x$$

$$\frac{n^2}{2} = 2x - 8$$

$$n^2 = 4x - 16$$
$$n^2 = 4(x-4)$$

Prirodni broj $x-4$ mora biti potpuni kvadrat pa pišemo $x-4=t^2$, pri čemu je $x-4 \geq 9-4=5$, te je zato $t \geq 3$.

Dakle, za prirodne brojeve $x > 8$, rješenje je parametarsko $x = t^2 + 4$, pri čemu je $t \geq 3$ prirodan broj.

Drugi način:

Neka je

$$n = \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}}\,.$$

Tada je

$$n = \sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4} + \sqrt{x-4+4\sqrt{x-4}+4}$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2} = \left|\sqrt{x-4}-2\right| + \left|\sqrt{x-4}+2\right|.$$

Vrijedi $\sqrt{x-4}-2>0$ za $x>8$ i $\sqrt{x-4}-2 \leq 0$ za $4 \leq x \leq 8$, dok je $\sqrt{x-4}+2>0$ za svaki $x \geq 4$.

Zato je, za $4 \leq x \leq 8$,

$$n = -\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}+2 = 4\,,$$

a za $x > 8$ je

$$n = \sqrt{x-4}-2+\sqrt{x-4}+2 = 2\sqrt{x-4}\,.$$

S obzirom da je za $4 \leq x \leq 8$ broj n uvijek prirodan broj 4, traženi brojevi u tom intervalu su $x = 4, 5, 6, 7, 8$.

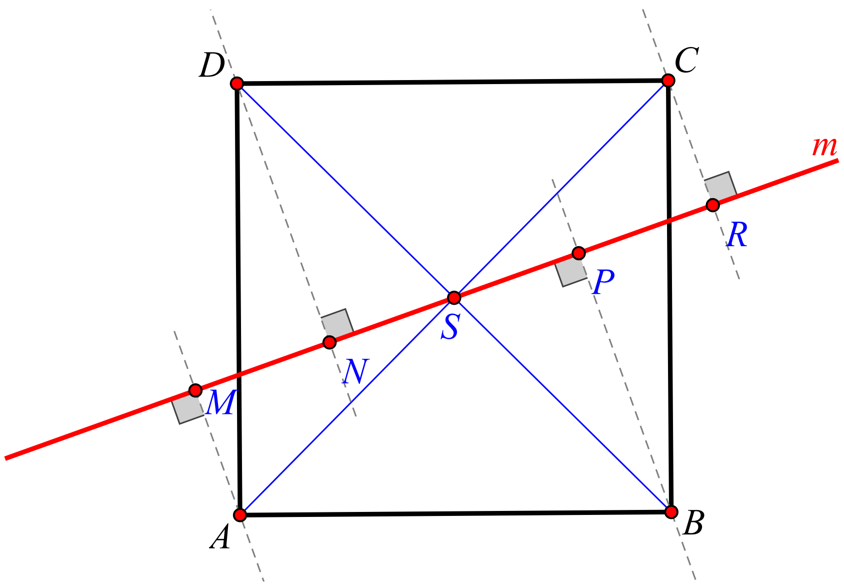
Potrebno je još naći sve prirodne brojeve $x > 8$ za koje je $n = 2\sqrt{x-4}$ također prirodan broj.

Slijedi $n^2 = 4(x-4)$.

Prirodni broj $x-4$ mora biti potpuni kvadrat pa pišemo $x-4=t^2$, pri čemu je $x-4 \geq 9-4=5$, te je zato $t \geq 3$.

Dakle, za prirodne brojeve $x > 8$, rješenje je parametarsko $x = t^2 + 4$, pri čemu je $t \geq 3$ prirodan broj.

5.



Neka je točka S sjecište dijagonala kvadrata $ABCD$. Točkom S nacrtan je bilo koji pravac m. Označimo redom točkama M, N, P i R nožišta okomica nacrtanih vrhovima A, B, C, D kvadrata na pravac m.

Pogledajmo pravokutne trokute ΔDNS i ΔBPS. Budući da vrijedi $|DS|=|BS|$ i $|\angle DSN|=|\angle BSP|$ (vršni kutovi) i $|\angle DNS|=|\angle BPS|=90°$ to su prema poučku K–S–K ta dva trokuta sukladna te slijedi da je $|DN|=|BP|=y$.

Pogledajmo pravokutne trokute ΔASM i ΔCSR. Budući da vrijedi $|AS|=|CS|$ i $|\angle ASM|=|\angle CSR|$ (vršni kutovi) i $|\angle AMS|=|\angle CRS|=90°$ to su prema poučku K–S–K ta dva trokuta sukladna te slijedi da je $|AM|=|CR|=x$.

Pogledajmo pravokutne trokute ΔASM i ΔBPS. Budući da vrijedi $|AS|=|BS|$ i $|\angle ASM|=|\angle SBP|$ (kutovi sa okomitim kracima) i $|\angle AMS|=|\angle BPS|=90°$ to su prema poučku K–S–K ta dva trokuta sukladna te slijedi da je $|AM|=|SP|=x$.

Neka je dijagonala $|BD|=|AC|=d=\sqrt{2}$. Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔBPS dobijemo

$$|SP|^2+|BP|^2=|SB|^2 \Rightarrow x^2+y^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

tj.

$$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Tada je

$$|AM|^2+|CR|^2+|DN|^2+|BP|^2=x^2+x^2+y^2+y^2=2\left(x^2+y^2\right)=1.$$