Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Ana i Vanja stoje zajedno kraj željezničke pruge i čekaju da prođe vlak koji vozi stalnom brzinom. U trenutku kad prednji kraj vlaka dođe do njih, Ana krene stalnom brzinom u smjeru kretanja vlaka, a Vanja istom brzinom u suprotnom smjeru. Svaka od njih se zaustavlja u trenutku kad stražnji kraj vlaka prođe kraj nje. Ana je ukupno prošla 45 metara, a Vanja 30 metara. Koliko je dugačak vlak?

2. U pravokutnom trokutu duljine svih stranica su prirodni brojevi, a polumjer upisane kružnice iznosi 4. Odredi sve moguće vrijednosti duljina kateta tog trokuta.

3. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1+9a^2}{1+2a+2b^2+2c^2} + \frac{1+9b^2}{1+2b+2c^2+2a^2} + \frac{1+9c^2}{1+2c+2a^2+2b^2} < 4.$$

4. Neka je $k > 1$ prirodan broj. Dano je $k+2$ međusobno različitih prirodnih brojeva manjih od $3k+1$. Dokaži da među njima postoje dva čija je razlika veća od k i manja od $2k$.

5. U jednakokračnom trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$ i $\sphericalangle BAC < 60°$. Neka je točka D na dužini $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BAC$, neka je E sjecište simetrale dužine $\overline{BD}$ i paralele s BC kroz točku A te neka je F točka na pravcu AC takva da se A nalazi između C i F i vrijedi $|AF| = 2|AC|$.

(a) Dokaži da su pravci BE i AC paralelni.

(b) Dokaži da se okomica iz F na AB i okomica iz E na AC sijeku na pravcu BD.

U (b) dijelu zadatka dozvoljeno je korištenje tvrdnje iz (a) čak i ako nije dokazana.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x) = (x-a)(x-a^2)(x-a^3)$$

realni.

2. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\left\lfloor \frac{x^2+1}{x+2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = \frac{x(3x+1)}{2(x+2)}.$$

Za realni broj t, $\lfloor t \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od t.
Na primjer, ako je $t = 3.14$, onda je $\lfloor t \rfloor = 3$.

3. Neka je ABC trokut takav da je $3|BC| = |AB| + |CA|$. Neka je T točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $4|AT| = |AC|$ i neka su K i L točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ redom, takve da je $KL \parallel BC$ i da je pravac KL tangenta upisane kružnice trokuta ABC.

U kojem omjeru dužina $\overline{BT}$ dijeli dužinu $\overline{KL}$?

4. Odredi sve parove (m,n) cijelih brojeva za koje vrijedi $m^2 = n^5 + n^4 + 1$, a broj $m - 7n$ dijeli $m - 4n$.

5. Ukrug je napisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

- svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja;
- odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukrug budu napisane

(a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula?

(b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Dan je trokut ABC takav da je $|AB| = 4, |BC| = 7, |AC| = 5$. Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$.

Izračunaj
$$\sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cos^6 \frac{\alpha}{2}.$$

2. Četvorku prirodnih brojeva (a, b, c, d) zovemo *zelenom* ako vrijedi
$$b = a^2 + 1, \quad c = b^2 + 1, \quad d = c^2 + 1$$
i $D(a) + D(b) + D(c) + D(d)$ je neparan, pri čemu je $D(k)$ broj pozitivnih djelitelja prirodnog broja k.

Koliko ima zelenih četvorki čiji su svi članovi manji od $1\,000\,000$?

3. Na ploču dimenzija 20×19 postavljene su pločice dimenzija 3×1 tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima.

Odredi najveći mogući broj pločica 3×1 na toj ploči.

4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokaži da vrijedi
$$\frac{a^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2a-1} + \frac{b^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2b-1} + \frac{c^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2c-1} \leqslant 3.$$

5. Dan je šiljastokutan trokut ABC takav da je $|BC| < |CA| < |AB|$. Neka su D, E i F redom nožišta njegovih visina iz vrhova A, B i C. Pravac točkom F paralelan s DE siječe pravac BC u točki M, a simetrala kuta $\sphericalangle MFE$ siječe pravac DE u točki N.

Dokaži da je točka F središte kružnice opisane trokutu DMN ako i samo ako je točka B središte kružnice opisane trokutu FMN.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Odredi sve kompleksne brojeve a za koje su svi koeficijenti polinoma

$$P(x) = (x-a)(x-a^2)(x-a^3)(x-a^4)$$

realni.

2. Rudi i Miljen igraju igru na školskoj ploči naizmjence odigravajući poteze. Igrač koji je na potezu bira dva relativno prosta broja napisana na ploči, briše ih te zapisuje na ploču njihov zbroj. Gubi igrač koji to ne može napraviti. Igru započinje Rudi. Dokaži da Miljen ima pobjedničku strategiju ako je na početku na ploči bilo napisano

(a) 2019 jedinica;

(b) 2020 jedinica.

3. Neka je C realni broj, (a_n) niz realnih brojeva i neka je, za svaki prirodni broj n,

$$M_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Ako za svaka tri međusobno različita prirodna broja i, j, k vrijedi

$$(i-j)M_k + (j-k)M_i + (k-i)M_j = C,$$

dokaži da je niz (a_n) aritmetički.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| > |AC|$. Neka su D, E i F nožišta visina trokuta ABC iz vrhova A, B i C, redom. Pravci EF i BC sijeku se u točki P. Paralela s EF kroz točku D siječe pravac AC u točki Q i pravac AB u točki R. Ako je N točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle NQP + \sphericalangle NRP < 180°$, dokaži da je $|BN| > |CN|$.

5. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta.

- Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(a,b) + a + b = f(a,1) + f(1,b) + ab.$$

- Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a+b$ i $a+b-1$ djeljiv prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a,b)$ djeljiv s p.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.