

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Za međusobno različite realne brojeve  $a$  i  $b$  vrijedi

$$a + 9 = (b - 3)^2 \quad \text{i} \quad b + 9 = (a - 3)^2.$$

Koliko iznosi  $a^2 + b^2$  ?

2. Odredite skup svih cijelih brojeva  $n$  za koje vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2019^2 - 1}\right) < \frac{2019}{n^2}.$$

3. Na koliko se načina broj 455 može zapisati kao zbroj rastućeg niza od dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva?
4. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji imaju točno tri jednake znamenke? Odredite zbroj svih takvih brojeva kojima je znamenka jedinica jednaka 1.
5. U pravokutnom trokutu  $ABC$ , s pravim kutom u vrhu  $C$ , duljina hipotenuze je 12. Nad stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  konstruirani su prema van kvadrati  $ABDE$  i  $ACGF$ . Ako točke  $D$ ,  $E$ ,  $F$  i  $G$  leže na istoj kružnici, izračunajte opseg trokuta  $ABC$ .

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Koliko je  $1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2 \cdot 2019}$ , ako je  $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  ?
2. U trokutu  $ABC$  je  $|AB| = 12$  cm,  $|BC| = 25$  cm,  $|CA| = 17$  cm. Trokutu je upisan pravokutnik  $KLMN$  tako da su vrhovi  $M$  i  $N$  na stranici  $\overline{BC}$ , vrh  $K$  na stranici  $\overline{AB}$ , a vrh  $L$  na stranici  $\overline{CA}$ .  
Odredite duljine stranica pravokutnika ako je njegova površina jednaka  $\frac{216}{5}$ .

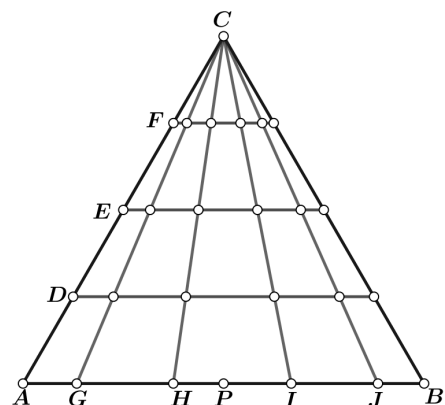
3. U trokutu  $ABC$  je  $|BC| = 2$  cm,  $|AC| = 3$  cm i  $\cos \alpha = \frac{7}{8}$ , gdje je  $\alpha = \sphericalangle CAB$ .  
Ako je kut između težišnice i visine povučene iz vrha  $C$  jednak  $\omega$ , koliko je  $\cos 2\omega$  ?

4. Neka je  $f(x) = |x - 4|(|x| - 2)$ .

Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije  $f$  na intervalu  $[-2, 5]$ . Za koje vrijednosti realnog parametra  $m$  jednačina  $f(x) = m$  ima točno dva realna rješenja?

5. U jednakokraničnom trokutu  $ABC$  polovište stranice  $\overline{AB}$  je točka  $P$ . Točke  $G$  i  $H$  su između točaka  $A$  i  $P$ , a točke  $I$  i  $J$  između točaka  $P$  i  $B$ . Točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  dijele dužinu  $\overline{AC}$  na četiri jednaka dijela. Tim točkama povučene su paralele sa stranicom  $\overline{AB}$ . Promatramo sve trokute kojima je jedan vrh u točki  $C$ , a preostala dva na jednoj od konstruiranih paralela sa stranicom  $\overline{AB}$ , uključujući  $\overline{AB}$  i to u točkama presjeka sa spojnicama  $AC$ ,  $GC$ ,  $HC$ ,  $IC$ ,  $JC$  ili  $BC$ .

Ako je ukupan broj takvih trokuta jednak  $x$ , a ukupan broj takvih trokuta koji ne sadrže težište  $T$  jednak  $y$ , odredite omjer  $x : y$ .



DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

1. Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{4^x + 1} \geq |4^{x-1} - 1| + 4^x \log_x \sqrt{x}$$

u skupu realnih brojeva.

2. Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  su jedinični vektori koji zatvaraju kut od  $60^\circ$ . Ako je  $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + 4\vec{b}$  i  $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$ , izračunajte kosinus kuta između visine i težišnice iz vrha  $A$  u trokutu  $ABC$ .

3. Dokažite da vrijednost funkcije  $f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$  nije u intervalu  $\left\langle \frac{1}{9}, \frac{3}{2} \right\rangle$  niti za jedan realni broj  $x$  za koji je funkcija definirana.

4. Klara je čekajući u redu za ulaznice kratila vrijeme zapisujući na papiru redom prirodne brojeve jedan pokraj drugog počevši od broja 1. Pri tome nije zapisivala brojeve koji sadrže znamenku 3. Zadnji broj koji je zapisala prije nego je došla na red je 9999.

Koliko ukupno znamenaka ima broj koji je Klara takvim zapisivanjem dobila? Koja je znamenka 2019. po redu?

5. Ako unutar trokuta  $ABC$  postoji točka  $P$  takva da je

$$\sphericalangle PAB = 10^\circ, \quad \sphericalangle PBA = 20^\circ, \quad \sphericalangle PCA = 30^\circ, \quad \sphericalangle PAC = 20^\circ,$$

dokažite da je trokut  $ABC$  jednakokratan.

