DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-1.1.

Za međusobno različite realne brojeve a i b vrijedi

$$a + 9 = (b - 3)^2 \quad \text{i} \quad b + 9 = (a - 3)^2.$$

Koliko iznosi $a^2 + b^2$?

Rješenje.

Kvadrirat ćemo binome i pojednostavniti dane jednakosti, a zatim ih zbrojiti i oduzeti. Dobivamo

$$\begin{aligned} a + 9 &= b^2 - 6b + 9 \\ b + 9 &= a^2 - 6a + 9, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a &= b^2 - 6b \\ b &= a^2 - 6a. \end{aligned}$$

Nakon zbrajanja dobivamo

$$a + b = a^2 + b^2 - 6(a + b),$$

odnosno

$$a^2 + b^2 = 7(a + b). \tag{1}$$

Nakon oduzimanja redom dobivamo

$$\begin{aligned} a - b &= b^2 - a^2 - 6(b - a) \\ &= -(a - b)(a + b) + 6(a - b), \end{aligned}$$

iz čega dijeljenjem s $a - b \neq 0$ slijedi

$$1 = -(a + b) + 6, \qquad \text{tj.} \qquad a + b = 5.$$

Konačno, iz (1) slijedi $a^2 + b^2 = 7(a + b) = 7 \cdot 5 = 35$.

Zadatak B-1.2.

Odredite skup svih cijelih brojeva n za koje vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2019^2 - 1}\right) < \frac{2019}{n^2}.$$

Rješenje.

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdots\frac{2019^2}{(2019-1)(2019+1)}<\frac{2019}{n^2}.$$

Svaki faktor na lijevoj strani jednakosti možemo zapisati u obliku:

$$\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{x\cdot x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}.$$

Slijedi redom

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdots\frac{2019\cdot 2019}{2018\cdot 2020}<\frac{2019}{n^2}$$
$$\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{2018}{2019}\cdot\frac{2019}{2018}\right)\cdot\frac{2019}{2020}<\frac{2019}{n^2}.$$

Uočimo da su svaka dva susjedna faktora počevši od drugog po redu do pretposljednjeg, međusobno recipročni pa je njihov umnožak jednak 1. Nakon toga dobivamo

$$\frac{2\cdot 2019}{2020}<\frac{2019}{n^2},$$

što vrijedi ako i samo ako je $n^2<1010$ i $n\neq 0$. To znači da je

$$0<|n|<1010, \qquad \text{odnosno} \qquad -\sqrt{1010}<n<\sqrt{1010}, n\neq 0.$$

Konačno, traženi cijeli brojevi n pripadaju skupu $\{-31,-30,\ldots,-1,1,2,\ldots,30,31\}$.

Zadatak B-1.3.

Na koliko se načina broj 455 može zapisati kao zbroj rastućeg niza od dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva?

Rješenje.

Neka je n prvi broj u nizu od $k+1$ uzastopnih brojeva, $k\geqslant 1$. Tada je

$$\begin{aligned}455&=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k)=(k+1)n+(1+2+3+\cdots+k)\\&=(k+1)n+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(2n+k)}{2},\end{aligned}$$

pa slijedi $910=(2n+k)(k+1)$.
Rastav broja 910 na proste faktore je $910=2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$.

Uočimo da su brojevi $(2n+k)$ i $(k+1)$ različite parnosti, što znači da jedna od zagrada mora biti jednaka parnom djelitelju od 910, a to su brojevi 2, 10, 14, 26, 70, 130, 182.

Uz činjenicu da je $2n+k>k+1$ dobivamo 7 linearnih sustava čijim rješavanjem dolazimo do brojeva n i k:

$$\begin{array}{ccccccc}k+1=2 & k+1=10 & k+1=14 & k+1=26 & k+1=13 & k+1=7 & k+1=5\\ 2n+k=455 & 2n+k=91 & 2n+k=65 & 2n+k=35 & 2n+k=70 & 2n+k=130 & 2n+k=182.\end{array}$$

Svaki od tih sustava ima jedinstveno rješenje, pa je ukupno 7 načina da se broj 455 prikaže kao traženi zbroj.

Zadatak B-1.4.

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji imaju točno tri jednake znamenke?

Odredite zbroj svih takvih brojeva kojima je znamenka jedinica jednaka 1.

Rješenje.

Traženi brojevi mogu biti troznamenkasti ili četveroznamenkasti brojevi. To su brojevi oblika

1° $\overline{xxx}$, $x \neq 0$, $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Troznamenkastih brojeva kojima su tri znamenke jednake ima točno 9.

2° $\overline{xxx0}$, $\overline{xx0x}$, $\overline{x0xx}$, $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Četveroznamenkastih brojeva kojima su tri znamenke jednake, a četvrta je 0 ima $9 \cdot 3 = 27$. (Znamenku x možemo odabrati na 9 načina, za svaki od 3 moguća odabira mjesta za znamenku 0.)

3° $\overline{xxxy}$, $\overline{xxyx}$, $\overline{xyxx}$, $\overline{yxxx}$, $x \neq y$, $x, y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Četveroznamenkastih brojeva kojima su tri znamenke jednake, a četvrta je različita od 0, ukupno je $9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$.

4° $\overline{x000}$, $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ovakvih brojeva je 9.

Ukupno je $9 + 27 + 288 + 9 = 333$ brojeva s traženim svojstvom.

Treba još izračunati zbroj brojeva manjih od 10000 kojima su točno tri znamenke jednake, a znamenka jedinica im je jednaka 1.
Brojevi koje treba zbrojiti mogu imati točno tri jedinice ili točno jednu jedinicu.

Ako su točno tri jedinice računamo zbroj brojeva oblika

$$111, \quad 1101, \quad 1011, \quad \overline{11x1}, \quad \overline{1x11}, \quad \overline{x111},$$

gdje je $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Zbroj prva tri broja iznosi 2223. Preostale brojeve možemo zbrajati kao

$$1000 \cdot (1+1+x) + 100 \cdot (1+1+x) + 10 \cdot (1+1+x) + 3 \cdot 1 = 1110 \cdot (2+x) + 3,$$

za sve brojeve $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Kako je $2+3+4+5+6+7+8+9 = 44$, slijedi

$$[1110 \cdot (2+2)+3] + [1110 \cdot (2+3)+3] + \cdots + [1110 \cdot (2+9)+3] = 1110 \cdot (8 \cdot 2 + 44) + 8 \cdot 3 = 66624.$$

Ako je točno jedna jedinica, dakle samo ona koja je na mjestu jedinica, brojevi su oblika $\overline{xxx1}$, $x \neq 0, 1$. Njihov je zbroj

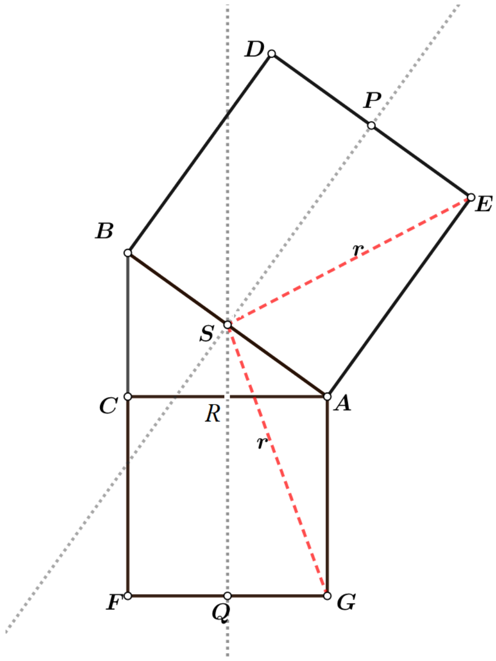
$$2221 + 3331 + \cdots + 9991 = 44 \cdot 1110 + 8 \cdot 1 = 48848.$$

Ukupan zbroj je $2223 + 66624 + 48848 = 117695$.

Zadatak B-1.5.

U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u vrhu C, duljina hipotenuze je 12. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $ACGF$. Ako točke D, E, F i G leže na istoj kružnici, izračunajte opseg trokuta ABC.

Rješenje.



Neka je $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ i $c = \overline{AB}$.

Dužine $\overline{DE}$ i $\overline{FG}$ su tetive kružnice, pa se njihove simetrale sijeku u središtu dane kružnice. Simetrala dužine $\overline{DE}$ siječe hipotenuzu $\overline{AB}$ u točki S. Simetrala dužine $\overline{FG}$ paralelna je sa stranicom $\overline{BC}$ trokuta ABC te siječe katetu $\overline{AC}$ u polovištu R.

Tada zbog Talesovog poučka o proporcionalnim dužinama, (ili sličnosti trokuta ASR i ABC) hipotenuzu siječe u polovištu, odnosno točki S.
(Ovaj se zaključak može izvesti i iz činjenice da su simetrale stranica $\overline{DE}$ i $\overline{FG}$ ujedno i simetrale stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a simetrale stranica u pravokutnom trokutu sijeku se u polovištu hipotenuze.)

Zaključujemo da se središte kružnice nalazi u polovištu hipotenuze i da je $|RS| = \dfrac{a}{2}$. Tada je $|SE| = |SG| = r$. Pitagorin poučak primijenjen na trokut SAE nam daje

$$\begin{aligned}
&|SA|^2 + |AE|^2 = |SE|^2 \\
&\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2 = r^2 \\
&r^2 = 36 + 144 = 180.
\end{aligned}$$

U trokutu GQS vrijedi $|SQ|^2 + |QG|^2 = |GS|^2$ odnosno

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 = 180 \\
&\frac{a^2}{4} + ab + b^2 + \frac{b^2}{4} = 180 \\
&ab + b^2 = 144.
\end{aligned}$$

Kako je $a^2 + b^2 = 144$ (Pitagorin poučak u trokutu ABC), slijedi $ab - a^2 = 0$, tj. $a(b - a) = 0$.

Ovo je moguće samo ako je $a = b$. Tada je $2a^2 = 144$ te $a = 6\sqrt{2}$.

Opseg trokuta ABC iznosi $o = a + b + c = 2a + c = 12\sqrt{2} + 12$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-2.1.

Koliko je $1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019}$, ako je $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$?

Prvo rješenje.

Izračunajmo redom

$$\begin{aligned}
z^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}\,i-2}{4} = \frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}\\
z^3 &= \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2} = \frac{-3-1}{4} = -1\\
z^4 &= -z\\
z^6 &= z^4\cdot z^2 = -z^3 = 1\\
z^8 &= z^6\cdot z^2 = z^2, \quad z^{10} = z^6\cdot z^4 = z^4 = -z, \quad z^{12} = 1, \ \ldots
\end{aligned}$$

Svake tri uzastopne parne potencije broja z imaju iste vrijednosti kao

$$z^0 = 1, \quad z^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z^4 = -z,$$

pa je

$$\begin{aligned}
1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019} &= (1+z^2-z) + (1+z^2-z) + \cdots + (1+z^2-z) + z^{2\cdot 2019}\\
&= 673\cdot(1+z^2-z) + 1 = 673\cdot\left(1 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Potencije broja z računamo kao i u prvom rješenju.

Primijenimo formulu $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, odnosno formulu

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

na izraz $1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019}$ za $a = 1$, $b = z^2$, $n = 2020$.

Tada je

$$1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2\cdot 2019} = \frac{1^{2020} - (z^2)^{2020}}{1-z^2} = \frac{1-z^{4040}}{1-z^2} = \frac{1-z^2}{1-z^2} = 1,$$

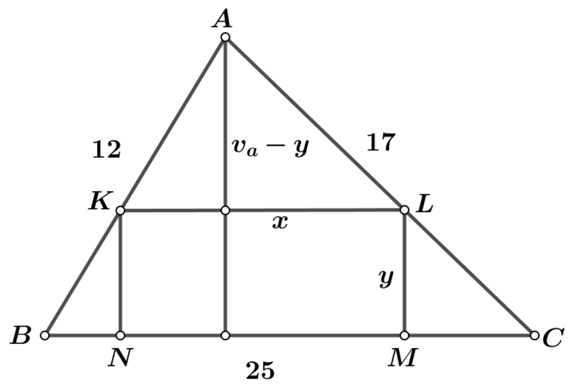
jer je $4040 = 3\cdot 1346 + 2$, pa je $z^{4040} = z^2$.

Zadatak B-2.2.

U trokutu ABC je $|AB| = 12\,\text{cm}$, $|BC| = 25\,\text{cm}$, $|CA| = 17\,\text{cm}$. Trokutu je upisan pravokutnik $KLMN$ tako da su vrhovi M i N na stranici $\overline{BC}$, vrh K na stranici $\overline{AB}$, a vrh L na stranici $\overline{CA}$.

Odredite duljine stranica pravokutnika ako je njegova površina jednaka $\dfrac{216}{5}$.

Rješenje.



Pomoću Heronove formule možemo odrediti površinu trokuta ABC, a zatim i visinu na stranicu $\overline{BC}$

$$s = \frac{12+25+17}{2} = 27 \implies P = \sqrt{27 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 2} = 90$$
$$v_a = \frac{2P}{|BC|} = \frac{36}{5}.$$

Koristeći sličnost trokuta AKL i ABC (KK) dobivamo

$$v_a : (v_a - y) = |BC| : x$$
$$\frac{36}{5} : \left(\frac{36}{5} - y\right) = 25 : x$$
$$y = \frac{900 - 36x}{125}.$$

Kako je površina pravokutnika $P = xy$ slijedi

$$x \cdot \frac{900 - 36x}{125} = \frac{216}{5}$$

što nakon sređivanja daje kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 25x + 150 = 0.$$

Njezina su rješenja $x = 10$ i $x = 15$. Tada je $y = \frac{108}{25} = 4.32$ odnosno $y = \frac{72}{25} = 2.88$.

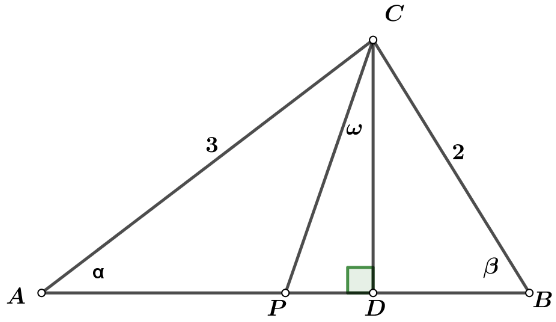
Dakle, zadane uvjete zadovoljavaju dva pravokutnika, jedan sa stranicama duljine 10 i 4.32, a drugi sa stranicama duljine 15 i 2.88.

Zadatak B-2.3.

U trokutu ABC je $|BC| = 2\,\text{cm}$, $|AC| = 3\,\text{cm}$ i $\cos\alpha = \dfrac{7}{8}$, gdje je $\alpha = \sphericalangle CAB$.

Ako je kut između težišnice i visine povučene iz vrha C jednak ω, koliko je $\cos 2\omega$?

Rješenje.



Neka je D nožište visine povučene iz vrha C. Iz trokuta ADC računamo

$$|AD| = b \cdot \cos\alpha = 3 \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{8}\,\text{cm}.$$

Visinu možemo izračunati pomoću Pitagorinog poučka

$$v = \sqrt{9 - \left(\frac{21}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{8}\,\text{cm},$$

a tako računamo i $|DB|$

$$|DB| = \sqrt{4 - \left(\frac{3\sqrt{15}}{8}\right)^2} = \frac{11}{8}\,\text{cm}.$$

Tada je

$$|AB| = |AD| + |DB| = \frac{21}{8} + \frac{11}{8} = 4\,\text{cmcm}.$$

Trokut CPB ima dvije stranice jednake pa je kut $\sphericalangle PCB = \sphericalangle CPB = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta)$.

Sada je $\sphericalangle PCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) - (90^\circ - \beta) = \frac{\beta}{2}$.

Stoga je $\cos 2\omega = \cos\beta$, a iz trokuta CDB slijedi

$$\cos\beta = \frac{\frac{11}{8}}{2} = \frac{11}{16}.$$

Zadatak B-2.4.

Neka je $f(x) = |x - 4|\,(|x| - 2)$.

Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije f na intervalu $[-2, 5]$. Za koje vrijednosti realnog parametra m jednadžba $f(x) = m$ ima točno dva realna rješenja?

Rješenje.

Zadatak ćemo riješiti razmatrajući graf zadane funkcije.

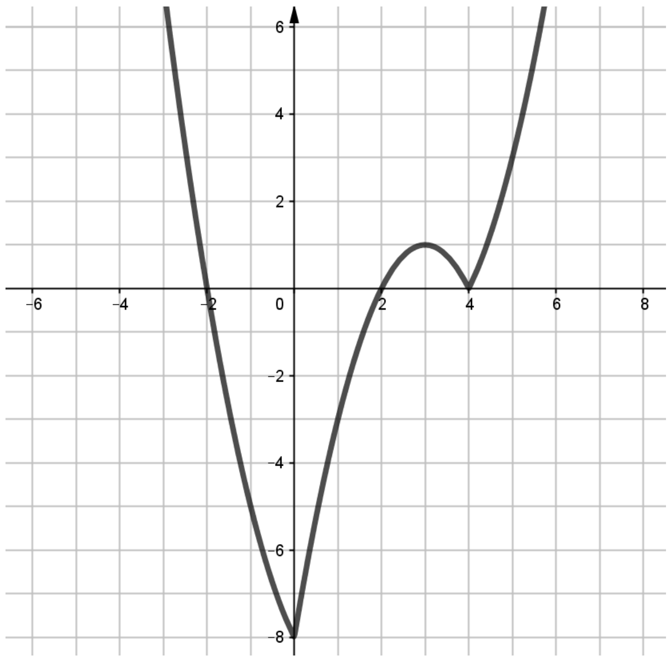
Zapišimo funkciju bez znaka apsolutne vrijednosti i nacrtajmo njezin graf.

$$x \leqslant 0 \implies f(x) = |x-4|(|x|-2) = (-x+4)(-x-2)$$
$$0 \leqslant x \leqslant 4 \implies f(x) = (-x+4)(x-2)$$
$$x \geqslant 4 \implies f(x) = (x-4)(x-2)$$

Dakle,

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x-8 & \text{za } x \leqslant 0 \\ -x^2+6x-8 & \text{za } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ x^2-6x+8 & \text{za } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Tada je grafički prikaz funkcije sljedeći.



Graf dane funkcije sastoji se od dijelova tri parabole (grafova tri kvadratne funkcije f_1, f_2 i f_3) koje se "lome" u točkama $x = 0$ i $x = 4$.

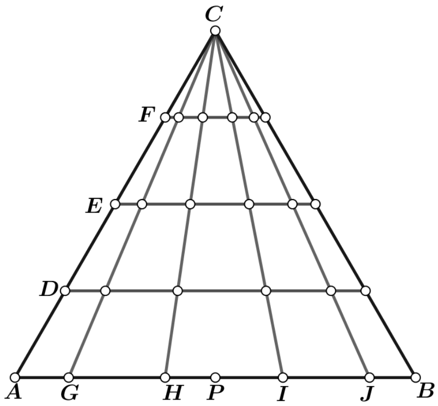
Na intervalu od $x = -2$ do $x = 0$ vrijednost funkcije f_1 pada, zatim od $x = 0$ do $x = 3$ vrijednost funkcije f_2 raste (od prve točke loma do njezina tjemena), a pada od $x = 3$ do $x = 4$ (od tjemena do druge točke loma) te na kraju na intervalu od $x = 4$ do $x = 5$ funkcija f_3 raste (od točke loma do ruba zadanog intervala).

Uočimo da minimalnu ili maksimalnu vrijednost naše funkcije treba tražiti među rubnim točkama zadanog intervala, u točkama u kojima se graf "lomi" ili tjemenu.

Vidimo da će funkcija f imati maksimalnu vrijednost na zadanom intervalu za $x = 5$ i maksimum iznosi $f(5) = 3$, a minimalnu vrijednost postiže za $x = 0$, a iznosi $f(0) = -8$.

Jednadžba $f(x) = m$ ima točno dva realna rješenja ako je $m \in (-8, 0) \cup (1, \infty)$.

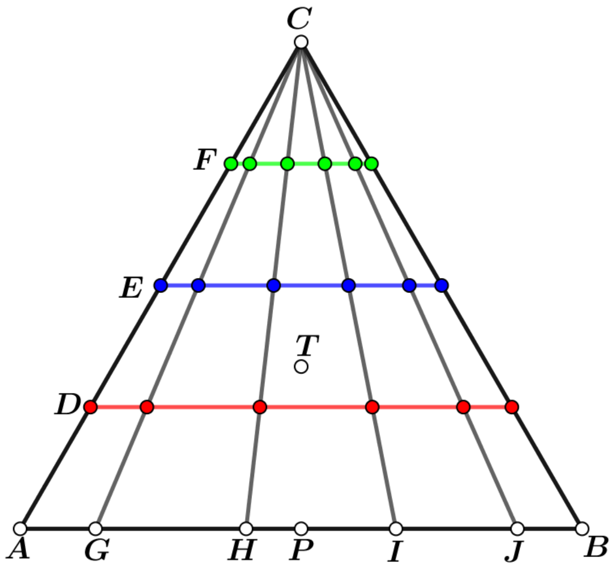
Zadatak B-2.5.



U jednakostraničnom trokutu ABC polovište stranice $\overline{AB}$ je točka P. Točke G i H su između točaka A i P, a točke I i J između točaka P i B. Točke D, E i F dijele dužinu $\overline{AC}$ na četiri jednaka dijela. Tim točkama povučene su paralele sa stranicom $\overline{AB}$. Promatramo sve trokute kojima je jedan vrh u točki C, a preostala dva na jednoj od konstruiranih paralela sa stranicom $\overline{AB}$, uključujući $\overline{AB}$ i to u točkama presjeka sa spojnicama AC, GC, HC, IC, JC ili BC.

Ako je ukupan broj takvih trokuta jednak x, a ukupan broj takvih trokuta koji ne sadrže težište T jednak y, odredite omjer $x : y$.

Rješenje.



Neka je stranica $\overline{AB}$ obojana crno, paralela kroz D crveno, paralela kroz E plavo, a paralela kroz F zeleno. Težište T nalazi se na težišnici $\overline{CP}$ i to između plave i crvene paralele jer je dijeli u omjeru $2 : 1$ od vrha C.

Prebrojimo trokute čija je stranica nasuprot vrhu C crne boje.

Na dužini $\overline{AB}$ moramo od 6 točaka A, G, H, I, J i B izabrati dvije točke.

Ako izaberemo točku A, onda se druga točka može odabrati na 5 načina.

Ako izaberemo točku G, onda se druga točka može odabrati na 4 načina (bez točke A jer je trokut CGA uključen u prethodni slučaj).
Ako izaberemo točku H, onda se druga točka može odabrati na 3 načina.
Ako izaberemo točku I, onda se druga točka može odabrati na 2 načina.
Ako izaberemo točku J, onda se druga točka može odabrati na 1 način.

Dakle, takvih je 15 trokuta.

Isto toliko imamo trokuta čija je jedna stranica crvena, plava ili zelena. Zato je ukupan broj trokuta $4 \cdot 15 = 60$.

Sada ćemo izračunati koliko trokuta sadrži točku T. Takvi trokuti moraju jednu stranicu imati ili crnu ili crvenu.
Ako izaberemo jedan vrh u točki A, onda drugi vrh mora biti I, J ili B.
Analogno, ako je jedan vrh u točki G ili H, imamo po tri mogućnosti za drugi vrh.
Dakle, broj trokuta koji sadrže točku T s jednom crnom stranicom je $3 + 3 + 3 = 9$, a isto ih je toliko sa crvenom stranicom.

Ukupno 18 trokuta sadrži točku T, a $60 - 18 = 42$ trokuta ne sadrži točku T.

Traženi omjer je $60 : 42 = 10 : 7$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-3.1.

Riješite nejednadžbu

$$\sqrt{4^x+1} \geqslant \left|4^{x-1}-1\right| + 4^x \log_x \sqrt{x}$$

u skupu realnih brojeva.

Rješenje.

Da bi svi izrazi bili definirani, mora vrijediti $x > 0$ i $x \neq 0$. Uz taj uvjet i svojstva logaritma zadana je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbama

$$\sqrt{4^x+1} \geqslant \left|4^{x-1}-1\right| + 4^x \cdot \frac{1}{2},$$
$$\sqrt{4^x+1} \geqslant \left|\frac{1}{4}\cdot 4^x-1\right| + \frac{1}{2}\cdot 4^x$$

Uvedimo supstituciju $t = 4^x$. Zbog $x > 0$, $x \neq 1$ vrijedi $t > 1$ i $t \neq 4$.

Slijedi $\sqrt{t+1} \geqslant \left|\frac{1}{4}t-1\right| + \frac{1}{2}t$,

a nakon množenja s 4 dobivamo

$$\sqrt{16t+16} \geqslant |t-4| + 2t. \qquad (*)$$

Prvi slučaj. Neka je $1 < t < 4$.

Tada imamo $\sqrt{16t+16} \geqslant -t+4+2t$, odnosno $\sqrt{16t+16} \geqslant t+4$.

Kako je $t+4 > 0$, kvadriranje je dozvoljeno pa slijedi $16t+16 \geqslant t^2+8t+16$, odnosno $t^2-8t \leqslant 0$.

Kako je $t > 1$ dobivamo $t \leqslant 8$ što znači da je svaki t za koji vrijedi $1 < t < 4$ rješenje nejednadžbe (*).

Zadanu nejednadžbu zadovoljavaju svi x za koje je $1 < 4^x < 4$ odnosno $0 < x < 1$.

Drugi slučaj. Neka je $t > 4$.

Tada dana nejednakost postaje $\sqrt{16t+16} \geqslant t-4+2t$, odnosno $\sqrt{16t+16} \geqslant 3t-4$.

Ako je $t > 4$, onda je $3t-4 > 0$ pa je kvadriranje dozvoljeno.

Dobivamo $16t+16 \geqslant 9t^2-24t+16$, odnosno $9t^2-40t \leqslant 0$. Slijedi $9t-40 \leqslant 0$ te $4 < t \leqslant \frac{40}{9}$.

Tada je $4 < 4^x \leqslant \frac{40}{9}$ tj. $1 < x \leqslant \log_4 \frac{40}{9}$.

Konačno rješenje je $x \in \langle 0,1\rangle \cup \left\langle 1, \log_4 \frac{40}{9}\right]$.

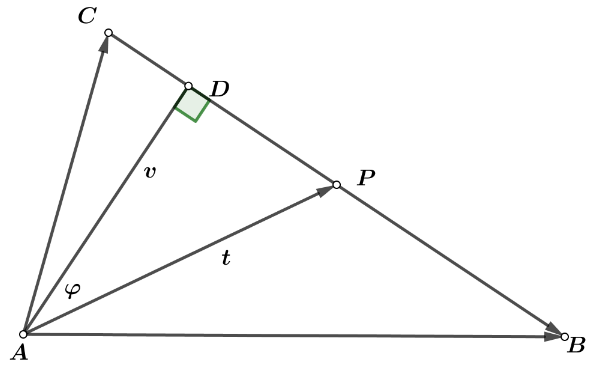
Zadatak B-3.2.

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su jedinični vektori koji zatvaraju kut od $60°$. Ako je $\overrightarrow{AB} = -\vec{a}+4\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a}+2\vec{b}$, izračunajte kosinus kuta između visine i težišnice iz vrha A u trokutu ABC.

Prvo rješenje.

Ako je $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, tada je

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (-\vec{a} + 4\vec{b}) - (-3\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = (-3\vec{a} + 2\vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$



Izračunajmo duljine tih vektora, odnosno duljine stranica trokuta ABC i duljinu težišnice $\overline{AP}$. Pri tome ćemo koristiti činjenicu da je $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

Slijedi

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left(-3\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 7,$$
$$\left|\overrightarrow{CB}\right|^2 = \left(2\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2 = 4|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 + 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 12,$$
$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = \left(-2\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 7.$$

Dakle $|AC| = |AP| = \sqrt{7}$, $|CB| = 2\sqrt{3}$.

Kako je trokut APC jednakokračan, vrijedi

$|AD|^2 = |AP|^2 - \left(\dfrac{1}{4}|BC|\right)^2 = 7 - \dfrac{12}{16} = \dfrac{25}{4}$, te je $|AD| = \dfrac{5}{2}$.

Zato je $\cos\varphi = \dfrac{|AD|}{|AP|} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Neka je λ takav da je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CB} = (2\lambda - 3)\vec{a} + (2 + 2\lambda)\vec{b}$.

Kako je $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD}$ vrijedi $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ odnosno

$$(2\lambda - 3)\vec{a}^2 + (4\lambda - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (2 + 2\lambda)\vec{b}^2 = 0.$$

Kako je $\vec{a}^2 = 1$, $\vec{b}^2 = 1$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}$, slijedi

$$(2\lambda - 3) + (4\lambda - 1) \cdot \frac{1}{2} + (2 + 2\lambda) = 0$$

odakle dobivamo $\lambda = \frac{1}{4}$. Dakle, $\overrightarrow{AD} = -\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}$.

Konačno imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(-2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(-\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}\right) \\
&= 5|\vec{a}|^2 - \frac{25}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{15}{2}|\vec{b}|^2 = 5 - \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{2} = \frac{25}{4} \\
|\overrightarrow{AP}|^2 &= \left(-2\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = 7, \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{7} \\
|\overrightarrow{AD}|^2 &= \left(-\frac{5}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}\right)^2 = \frac{25}{4}, \quad |\overrightarrow{AD}| = \frac{5}{2} \\
\cos\varphi &= \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.
\end{aligned}$$

Zadatak B-3.3.

Dokažite da vrijednost funkcije $f(x) = \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$ nije u intervalu $\left\langle \dfrac{1}{9}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$ niti za jedan realni broj x za koji je funkcija definirana.

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) &= \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} \\
&= \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} \\
&= \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.
\end{aligned}$$

Sada zapišimo funkciju $f(x) = \operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg} 2x$ koristeći dobiveni izraz i formulu za tangens dvostrukog kuta.

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2}.$$

Uvođenjem zamjene $\operatorname{tg}^2 x = t$ dobivamo $f(x) = \dfrac{3-t}{1-3t} \cdot \dfrac{1-t}{2}$.

Treba dokazati da $f(x)$ ne može poprimiti niti jednu vrijednost iz intervala $\left\langle \dfrac{1}{9}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neki realni broj x iz domene funkcije f vrijedi $\dfrac{1}{9} < f(x) < \dfrac{3}{2}$.

Rješavamo sustav nejednadžbi

$$\frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} > \frac{1}{9}, \qquad \frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} < \frac{3}{2}.$$

Riješimo prvu nejednadžbu.

$$\begin{aligned} &\frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} > \frac{1}{9} \\ &\frac{9(3-4t+t^2) - 2(1-3t)}{2(1-3t)} > 0 \\ &\frac{(3t-5)^2}{2(1-3t)} > 0 \end{aligned}$$

Kako brojnik nije nikada negativan, nazivnik mora biti pozitivan pa je $t < \frac{1}{3}$.

Druga nejednadžba je ekvivalentna s

$$\begin{aligned} &\frac{3-t}{1-3t} \cdot \frac{1-t}{2} < \frac{3}{2} \\ &\frac{3-4t+t^2 - 3(1-3t)}{2(1-3t)} < 0 \\ &\frac{t^2+5t}{2(1-3t)} < 0. \end{aligned}$$

Kako broj t mora zadovoljavati obje nejednadžbe, zbog $t < \frac{1}{3}$ nazivnik mora biti pozitivan pa dobivamo $-5 < t < 0$. Kako je $t = \operatorname{tg}^2 x$, ova nejednadžba nema rješenja.

Stoga ne postoji realni broj x iz domene funkcije f takav da vrijedi $\dfrac{1}{9} < f(x) < \dfrac{3}{2}$.

Dakle, za svaki x za koji je $f(x)$ definiran, funkcija ima vrijednost izvan intervala $\left\langle \dfrac{1}{9}, \dfrac{3}{2} \right\rangle$.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju dolazimo do izraza $f(x) = \dfrac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x} \cdot \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2}$. Uvodimo zamjene $t = \operatorname{tg}^2 x$ i $y = f(x)$.

Dobivenu jednadžbu $y = \dfrac{3-t}{1-3t} \cdot \dfrac{1-t}{2}$ možemo zapisati kao kvadratnu po t:

$$t^2 - 2(2-3y)t + (3-2y) = 0. \tag{$*$}$$

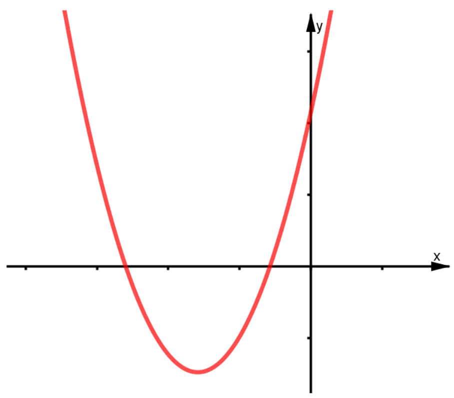
Budući da je $t = \operatorname{tg}^2 x$, jednadžba (*) može imati samo nenegativna realna rješenja.

Za one y za koje jednadžba (*) ima rješenja, postoje realni x za koje dana funkcija ima vrijednost y. Tražimo, dakle, one vrijednosti y za koje jednadžba (*) nema realna rješenja ili su joj oba rješenja negativna.

U prvom slučaju, jednadžba nema realna rješenja, a to znači da joj je diskriminanta negativna: $(2(2-3y))^2 - 4(3-2y) < 0$.

Sređivanjem dobivamo kvadratnu nejednadžbu $9y^2 - 10y + 1 < 0$ čija su rješenja $y \in \left\langle \dfrac{1}{9}, 1 \right\rangle$.

U drugom slučaju kvadratna jednadžba (*) dva negativna rješanja, a to znači da graf pripadne kvadratne funkcije mora imati oblik kao na slici



što će se ostvariti ako je $-\frac{b}{2a} < 0$, $c > 0$ i $b^2 - 4ac \geqslant 0$, gdje su a, b i c redom koeficijenti kvadratnog, linearnog i slobodnog člana. Tako dobivamo sustav nejednadžbi:

$$\begin{cases} 2-3y < 0 \\ 3-2y > 0 \\ 9y^2 - 10y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava je $y \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right\rangle$.

Konačno, unija skupova rješenja u promatrana dva slučaja $\left\langle \frac{1}{9}, 1 \right\rangle \cup \left[1, \frac{3}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{9}, \frac{3}{2} \right\rangle$ daje interval u kojem funkcija se ne nalazi nijedna vrijednost $y = f(x)$, a to je i trebalo dokazati.

Zadatak B-3.4.

Klara je čekajući u redu za ulaznice kratila vrijeme zapisujući na papiru redom prirodne brojeve jedan pokraj drugog počevši od broja 1. Pri tome nije zapisivala brojeve koji sadrže znamenku 3. Zadnji broj koji je zapisala prije nego je došla na red je 9999.

Koliko ukupno znamenaka ima broj koji je Klara takvim zapisivanjem dobila? Koja je znamenka 2019. po redu?

Rješenje.

Klarin broj je $N = 12456789101112141516\ldots 999799989999$.

Kako bismo izračunali ukupan broj znamenaka broja N moramo odrediti koliko je prirodnih brojeva manjih od 10000 koji ne sadrže znamenku 3 u svom zapisu.

Na početku je 8 jednoznamenkastih brojeva: $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Dvoznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3 ima $8 \cdot 9 = 72$ jer prvu znamenku možemo odabrati na 8 načina (ne može biti 0 ni 3), a drugu na 9 (ne može biti 3, ali može biti 0). To nam daje $2 \cdot 72 = 144$ znamenke u nizu.

Analogno, troznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3 ima $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Time dobivamo 1944 znamenke u nizu.

Četveroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3 ima $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ što daje 23328 znamenaka.

Dakle broj N ima ukupno $8 + 144 + 1944 + 23328 = 25424$ znamenaka.

Treba još odrediti 2019. znamenku po redu.

U trenutku kad smo ispisali sve troznamenkaste brojeve s traženim svojstvom, zapisali smo $8 + 144 + 1944 = 2096$ znamenki. To znači da je 2096. po redu zadnja znamenka broja 999, pa ćemo 2019. znamenku tražiti među troznamenkastim brojevima.

Dakle, treba se vratiti 2096˘2019 = 77 znamenki unazad, što je 25 troznamenkastih brojeva i još dvije znamenke. Kako od 990 do 999, od 980 do 989 i od 970 do 979 ima po 9 brojeva koji ne sadrže znamenku 3, vratimo li se 27 brojeva unazad doći ćemo do zadnje znamenke broja 969. Kako je $2096 - 3 \cdot 9 = 2015$, ta je znamenka 2015. po redu.

Sljedeće tri znamenke su znamenke broja 970 pa 2019. po redu prva znamenka broja 971, dakle znamenka 9.

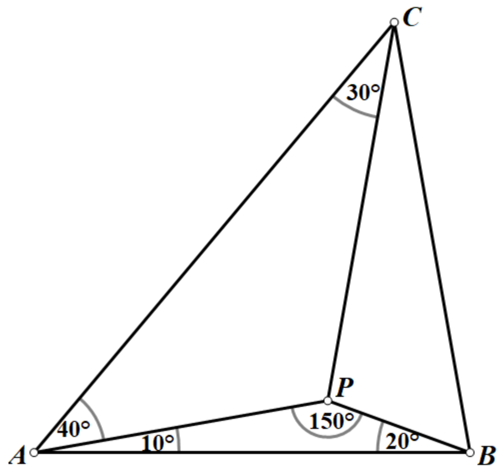
Zadatak B-3.5.

Ako unutar trokuta ABC postoji točka P takva da je

$$\sphericalangle PAB = 10^\circ, \quad \sphericalangle PBA = 20^\circ, \quad \sphericalangle PCA = 30^\circ, \quad \sphericalangle PAC = 20^\circ,$$

dokažite da je trokut ABC jednakokračan.

Rješenje.



Primijenimo li poučak o sinusima na trokut PAB dobivamo:

$$|PA| = |AB|\frac{\sin 10^\circ}{\sin 150^\circ} = |AB|\frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} = 2|AB|\sin 10^\circ$$
$$|PB| = |AB|\frac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ} = 2|AB|\sin 20^\circ.$$

Primijenimo li poučak o sinusima na trokut PAC dobivamo:

$$\begin{aligned}|PC| &= |PA|\frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 4|AB|\sin 20^\circ \sin 40^\circ\\ &= 2|AB|(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) = 2|AB|\left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right)\\ &= 2|AB|\left(1 - 2\sin^2 10^\circ - \frac{1}{2}\right) = 2|AB|\left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 10^\circ\right).\end{aligned}$$

U trokutu PCB vrijedi:

$$\begin{aligned}|BC|^2 &= |PB|^2 + |PC|^2 - 2|PB|\cdot|PB|\cos 100^\circ\\ &= 4|AB|^2\sin^2 10^\circ + 4|AB|^2\left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 10^\circ\right)^2 + 8|AB|^2\sin^2 10^\circ\left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 10^\circ\right)\\ &= |AB|^2\left(4\sin^2 10^\circ + (1 - 8\sin^2 10^\circ + 16\sin^4 10^\circ) + (4\sin^2 10^\circ - 16\sin^4 10^\circ)\right)\\ &= |AB|^2.\end{aligned}$$

Dakle, $|BC| = |AB|$ pa je trokut ABC jednakokračan.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Poreč, 29. ožujka 2019.

Zadatak B-4.1.

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ korijena}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Rješenje.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije. Provjerimo da tvrdnja zadatka vrijedi za $n=1$.

Za $n=1$ je $2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ korijena}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Korak indukcije. Treba, koristeći pretpostavku, pokazati da tvrdnja vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$ odnosno da je $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ korijena}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

Neka je $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ korijena}} = u$.

Kvadriranjem dobivamo $2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ korijena}} = u^2$ (*)

Koristeći prepostavku indukcije iz (*) dobivamo $2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = u^2$ odnosno

$$2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = u^2. \qquad (**)$$

Primijenimo li na (**) formulu za kosinus polovine argumenta $(1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2})$ dobivamo $2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}} = u^2$ odakle slijedi $u = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$, čime je dokazano da tvrdnja vrijedi i za $n+1$.

Po principu matematičke indukcije dana tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Zadatak B-4.2.

Realne funkcije $f \circ g$ i f zadane su pravilima pridruživanja

$$(f \circ g)(x)=2^{4^{4^{\sin x}}} \quad \text{i} \quad f(x)=4^{8^{-2^{x}}}.$$

Odredite pravilo pridruživanja kojim je zadana funkcija g i njezino područje definicije.

Rješenje.

Vrijedi $(f \circ g)(x)=f(g(x))=4^{8^{-2^{g(x)}}}$. Zato je

$$4^{8^{-2^{g(x)}}}=2^{4^{4^{\sin x}}}.$$

Slijedi redom

$$\begin{aligned}
&2^{2 \cdot 8^{-2^{g(x)}}}=2^{4^{4^{\sin x}}} \\
&2 \cdot 8^{-2^{g(x)}}=4^{4^{\sin x}} \\
&2 \cdot 2^{-3 \cdot 2^{g(x)}}=2^{2 \cdot 4^{\sin x}} \\
&2^{1-3 \cdot 2^{g(x)}}=2^{2 \cdot 4^{\sin x}} \\
&1-3 \cdot 2^{g(x)}=2 \cdot 4^{\sin x} \\
&1-3 \cdot 2^{g(x)}=2 \cdot 2^{2 \sin x} \\
&1-3 \cdot 2^{g(x)}=2^{1+2 \sin x} \\
&3 \cdot 2^{g(x)}=1-2^{1+2 \sin x} \\
&2^{g(x)}=\frac{1}{3}\left(1-2^{1+2 \sin x}\right) \\
&g(x)=\log _{2} \frac{1-2^{1+2 \sin x}}{3}.
\end{aligned}$$

Odredimo domenu funkcije g.

Iz uvjeta $\frac{1-2^{1+2 \sin x}}{3}>0$ redom slijedi $2^{1+2 \sin x}<1$, $1+2 \sin x<0$, $\sin x<-\frac{1}{2}$.

Konačno, $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}\left\langle\frac{7 \pi}{6}+2 k \pi, \frac{11 \pi}{6}+2 k \pi\right\rangle$.

Zadatak B-4.3.

Odredite sve parove cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^{2}-x y+y^{2}=2 x-y.$$

Prvo rješenje.

Iz $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$ dobivamo

$$x^2 - (y+2)x + y^2 + y = 0. \tag{$*$}$$

Kako tražimo cjelobrojna rješenja, diskriminanta kvadratne jednadžbe (*) mora biti nenegativna, dakle $(y+2)^2 - 4(y^2+y) \geqslant 0$ odakle sređivanjem dobivamo $-3y^2 + 4 \geqslant 0$.

Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je $y \in \langle \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rangle$, a kako tražimo cjelobrojna rješenja, y može poprimiti vrijednosti -1, 0 i 1.

Uvrštavanjem $y = -1$ u jednadžbu (*) dobivamo jednadžbu $x^2 - x$, s rješenjima $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, te su rješenja zadane jednadžbe uređeni parovi $(0, -1)$ i $(1, -1)$.

Uvrštavanjem $y = 0$ u jednadžbu (*) dobivamo jednadžbu $x^2 - 2x = 0$ čija su rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$, te su rješenja zadane jednadžbe uređeni parovi $(0, 0)$ i $(2, 0)$.

Konačno, uvrštavanjem $y = 1$ u jednadžbu (*) dobivamo jednadžbu $x^2 - 3x + 2 = 0$ čija su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, te su rješenja zadane jednadžbe uređeni parovi $(1, 1)$ i $(2, 1)$.

Drugo rješenje.

Iz $x^2 - xy + y^2 = 2x - y$ redom dobivamo

$$\begin{aligned}
&2x^2 - 2xy + 2y^2 = 4x - 2y,\\
&(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 = 0,\\
&(x-y)^2 + (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5.
\end{aligned}$$

Kako se traže $x, y \in \mathbb{Z}$, brojevi $x - y$, $x - 2$ i $y + 1$ su cijeli. Zbroj kvadrata tri cijela broja jednak je 5 ako i samo ako su ti kvadrati jednaki 0, 1 i 4 u nekom poretku.

Imamo sljedeće mogućnosti:

1° $\quad x - y = 0$, $x - 2 = \pm 1$, $y + 1 = \pm 2$.

Tada je $x = y$, $x \in \{1, 3\}$, $y \in \{1, -3\}$ pa je jedino rješenje $(x, y) = (1, 1)$.

2° $\quad x - y = 0$, $x - 2 = \pm 2$, $y + 1 = \pm 1$.

Tada je $x = y$, $x \in \{0, 4\}$, $y \in \{0, -2\}$ pa je jedino rješenje $(x, y) = (0, 0)$.

3° $\quad x - 2 = 0$, $y + 1 = \pm 1$, $x - y = \pm 2$.

Tada je $x = 2$, $y \in \{0, -2\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (2, 0)$.

4° $\quad x - 2 = 0$, $y + 1 = \pm 2$, $x - y = \pm 1$.

Tada je $x = 2$, $y \in \{1, -2\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (2, 1)$.

5° $\quad y + 1 = 0$, $x - 2 = \pm 1$, $x - y = \pm 2$.

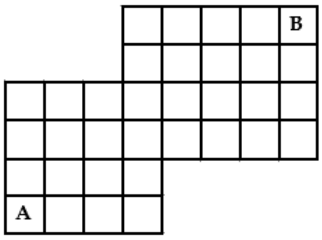
Tada je $y = -1$, $x \in \{1, 3\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (1, -1)$.

6° $\quad y + 1 = 0$, $x - 2 = \pm 2$, $x - y = \pm 1$.

Tada je $y = -1$, $x \in \{0, 4\}$ a zbog treće jednadžbe jedino rješenje je $(x, y) = (0, -1)$.

Zadatak B-4.4.

Na igraćoj ploči prikazanoj na slici Ivan treba doći od polja A do polja B. Pritom iz pojedinog polja smije prijeći samo na polje koje je neposredno desno ili neposredno iznad njega. Na koliko načina Ivan može doći od polja A do polja B?

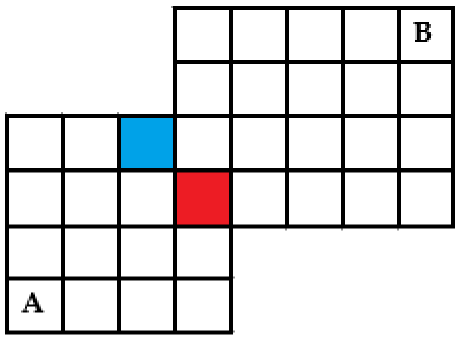


Prvo rješenje.

Krenemo li iz polja A, u polje koje je neposredno desno možemo doći samo na jedan način, a tako i u sva ostala polja u tom redu te stupcu iznad polja A. Broj načina na koliko možemo doći u neko od ostalih polja jednak je zbroju načina na koliko se može doći u polje koje je neposredno lijevo i neposredno ispod. Ako jedno od tih polja ne postoji broj načina jednak je broju načina na koji se može doći u prethodno polje (koje postoji). U tablici je prikazan broj načina (dobiven opisanim zbrajanjem) na koji se može doći u svako polje na igraćoj ploči.

Tako zaključujemo da je ukupan broj načina da se iz polja A dođe u polje B jednak 500.

			20	70	160	300	**500**
			20	50	90	140	200
1	4	10	20	30	40	50	60
1	3	6	10	10	10	10	10
1	2	3	4				
A	1	1	1				



Drugo rješenje.

Na putu od polja A do polja B Ivan mora proći ili kroz crveno polje ili kroz plavo polje.

Iz polja A u plavo polje mora doći u pet pomaka, od kojih su dva horizontalna, a tri vertikalna. Od pet pomaka dva horizontalna možemo odabrati na $\binom{5}{2} = 10$ načina.

Iz polja A u crveno polje mora doći također u pet pomaka, od kojih su tri horizontalna, a dva vertikalna, odnosno na $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ načina.

Od plavog polja prvo mora ići u polje neposredno desno, a od tog polja do polja B mora doći u 6 pomaka, od kojih je četiri u desno, a dva gore, što može napraviti na $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ načina.

Od crvenog polja do polja B mora doći u 7 pomaka, od kojih je četiri u desno, a tri gore, što može napraviti na $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$ načina.

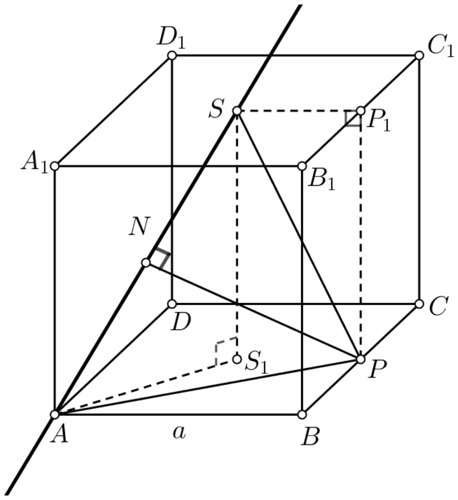
Ukupan je broj načina jednak $\binom{5}{2}\binom{7}{4} + \binom{5}{3}\binom{6}{2} = 10 \cdot 35 + 10 \cdot 15 = 500$ načina.

Zadatak B-4.5.

Duljina brida kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iznosi a. Odredite udaljenost od polovišta P brida $\overline{BC}$ do pravca koji prolazi vrhom A i središtem S stranice $A_1B_1C_1D_1$. Kolika je površina presjeka kocke ravninom APS ?

Rješenje.

Označimo sa N nožište okomice povučene iz točke P na pravac AS.



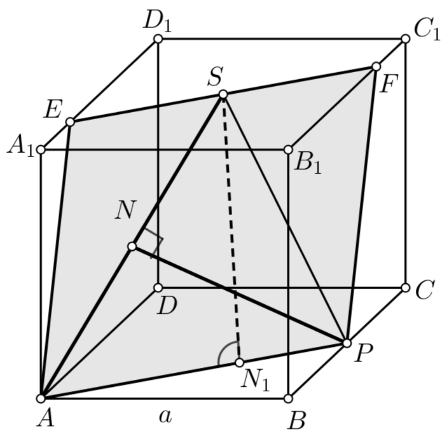
Uočimo $|AS|^2 = |AS_1|^2 + |S_1S|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{6a^2}{4}$ pa vrijedi $|AS| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Iz $|AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$ slijedi $|AP| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Slijedi da je trokut APS jednakokračan pa je $|AN| = \frac{1}{2}|AS| = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Sada iz $|PN|^2 = |AP|^2 - |AN|^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{7a^2}{8}$ dobivamo $|PN| = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Uočimo da ravnina APS siječe brid $\overline{A_1D_1}$ u točki E i brid $\overline{B_1C_1}$ u točki F tako da je dužina $\overline{EF}$ usporedna s dužinom $\overline{AP}$ i jednake duljine pa slijedi da je četverokut $APFE$ paralelogram.



Površina paralelograma $APFE$ jednaka je $P_{APFE} = |AP| \cdot |SN_1| = 2P_{APS}$.

Vrijedi $P_{APS} = \frac{1}{2}|AS| \cdot |PN| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^2\sqrt{21}}{8}$

pa slijedi $P_{APFE} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{21}}{8} = \frac{a^2\sqrt{21}}{4}$.