MATEMATIČKI KLOKAN J 2019 .

RJEŠENJA ZADATAKA

Pitanja za 3 boda:

1. $20 \cdot 19 + 20 + 19 =$

   A) 389 B) 399 C) 409 D) 419 E) 429

   Rješenje: D

2. Model vlaka napravi jedan krug po tračnicama za točno 1 minutu i 11 sekundi. Koliko mu vremena treba da napravi šest krugova?

   A) 6 min 56 s B) 7 min 6 s C) 7 min 16 s D) 7 min 26 s E) 7 min 36 s

   Rješenje: B

3. Brijač želi na ploči napisati riječ SHAVE tako da je klijent koji natpis gleda u ogledalu može ispravno pročitati. Kako bi je trebao napisati na ploči?

   A)  B)  C) 

   D)  E) 

   Rješenje: E

4. Koliko različitih zbrojeva točaka možemo dobiti ako istovremeno bacamo tri standardne igraće kocke?

   A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

   Rješenje: C
   Najmanji mogući zbroj je 3 (na sve tri kocke pala je jedinica), a najveći mogući 18 (na sve tri kocke pala je šestica). Svi zbrojevi između 3 i 18 su mogući.

5. Park ima pet ulaza. Monika želi ući kroz jedan ulaz, a izaći kroz drugi. Na koliko načina to može učiniti?

   A) 25 B) 20 C) 16 D) 15 E) 10

   Rješenje: B
   Monika može izabrati jedna od 5 vrata za ulazak i jedna od preostalih 4 vrata za izlazak iz parka. Dakle, ima $5 \cdot 4 = 20$ mogućnosti.

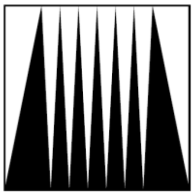
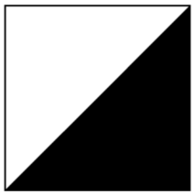
6. Masa svakoga od tri klokana različit je prirodan broj. Njihova je ukupna masa 97 kg. Koliko najviše kilograma može imati najlakši od njih?

   A) 1 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

   Rješenje: C

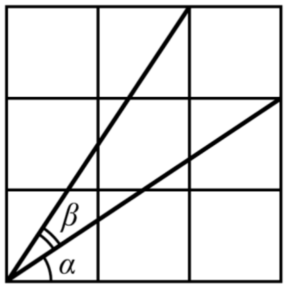
Najlakši klokan ne može imati 33 kg jer bi tada srednje teški imao barem 34 kg, a najteži barem 35 kg pa vrijedi $33 + 34 + 35 > 97$. Nadalje, najlakši klokan ne može imati 32 kg jer bi tada srednje teški imao barem 33 kg, a najteži barem 34 kg pa vrijedi $32 + 33 + 34 > 97$. No, 31 je moguće, primjerice $31 + 32 + 34 = 97$.

7. Dio svakog jediničnog kvadrata na slikama je osjenčan. U kojem je kvadratu osjenčana površina najveća?

A)  B)  C)  D)  E) 

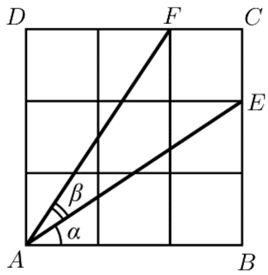
Rješenje: A
Osjenčane površine u kvadratima B, C, D i E jednake su, iznose pola površine kvadrata (površina svakog trokuta polovina je umnoška duljine stranice i visine na tu stranicu, a svi trokuti imaju istu visinu te je zbroj duljina njihovih stranica jednak duljini stranice kvadrata). Pravokutnik koji se nalazi unutar kvadrata A daje nešto veću površinu.

8. Na slici je kvadrat podijeljen na devet jednakih kvadrata. Koja je od danih izjava uvijek istinita za označene kutove?



A) $\alpha = \beta$ B) $2\alpha + \beta = 90°$ C) $\alpha + \beta = 60°$ D) $2\beta + \alpha = 90°$ E) $\alpha + \beta = 45°$

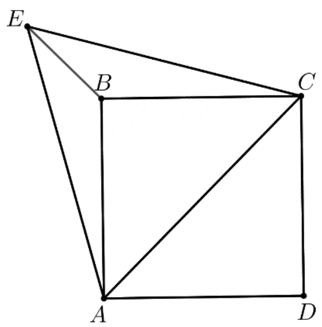
Rješenje: B
Trokut ABE (slika desno) sukladan je trokutu ADF (SKS poučak) pa je $|\angle FAD| = |\angle BAE| = \alpha$. Sada iz $|\angle FAD| + |\angle EAF| + |\angle BAE| = 90°$ slijedi $2\alpha + \beta = 90°$.



Pitanja za 4 boda:

9. Vrhovi kvadrata označeni su A, B, C, D u smjeru kazaljke na satu. Konstruiran je jednakostraničan trokut s vrhovima A, E, C označenim u smjeru kazaljke na satu. Odredi mjeru kuta CBE u stupnjevima.

A) 30 B) 45 C) 135 D) 145 E) 150



Rješenje: C
Trokuti ABE i BCE su sukladni (SSS poučak) pa je
$|\angle ABE| = |\angle CBE| = \frac{1}{2}(360° - 90°) = 135°.$

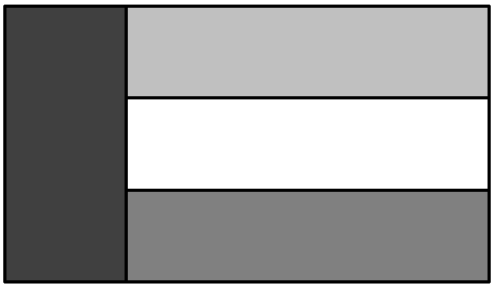
10. Brojevi a, b, c, d različiti su prirodni brojevi između 1 i 10 (uključujući). Koja je najmanja vrijednost koju može poprimiti izraz $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

A) $\frac{2}{10}$ B) $\frac{3}{19}$ C) $\frac{14}{45}$ D) $\frac{29}{90}$ E) $\frac{25}{72}$

Rješenje: C

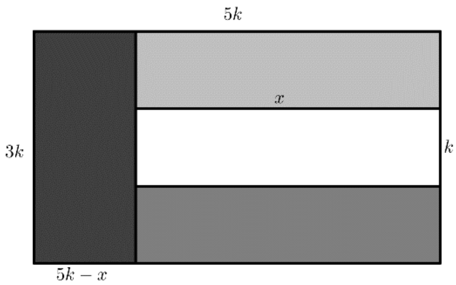
Biramo najmanje moguće brojeve u brojniku i najveće moguće brojeve u nazivniku. Dvije su mogućnosti: $\frac{1}{10} + \frac{2}{9} = \frac{29}{90}$ i $\frac{2}{10} + \frac{1}{9} = \frac{28}{90}$. Manja suma je $\frac{28}{90} = \frac{14}{45}$.

11. Zastava Klokanije pravokutnik je čije su stranice u omjeru $3 : 5$. Zastava je podijeljena na četiri pravokutnika iste površine, kao na slici. Odredi omjer stranica bijelog pravokutnika.



A) $1 : 3$ B) $1 : 4$ C) $2 : 7$ D) $3 : 10$ E) $4 : 15$

Rješenje: E



Duljine stranica zastave su oblika $3k$ i $5k$. Tada je visina svake horizontalne pruge k. Označimo li širinu horizontalne pruge s x, iz jednakosti površina slijedi $x \cdot k = (5k - x) \cdot 3k$ (vidi sliku). Iz ove jednakosti slijedi $x = \frac{15}{4}k$, odnosno $x : k = 15 : 4$.

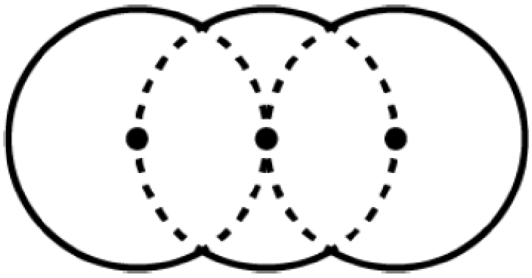
12. Sok se razrjeđuje u omjeru 1 : 7. Koncentrat soka nalazi se u boci volumena 1 litre i boca je polupuna. Koliki dio preostalog koncentrata treba iskoristiti ako želimo dobiti 2 litre razrijeđenog soka?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) Sve.

Rješenje: B

Za dvije litre razrijeđenog soka potrebno je $\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$ litre koncentrata, a to je polovina količine koncentrata preostalog u boci.

13. Lik na slici napravljen je od dijelova triju sukladnih kružnica radijusa R kojima su središta kolinearna. Kružnica koja se nalazi u sredini prolazi središtima preostalih dviju kružnica. Odredi opseg danog lika.

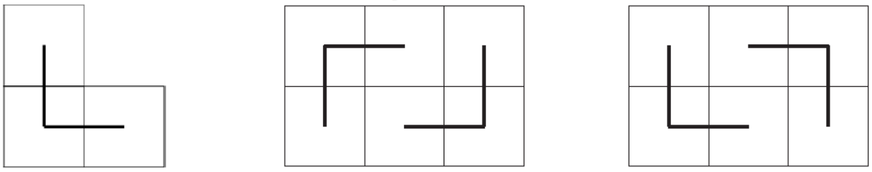


A) $\frac{10\pi R}{3}$ B) $\frac{5\pi R}{3}$ C) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ D) $2\pi R\sqrt{3}$ E) $4\pi R$

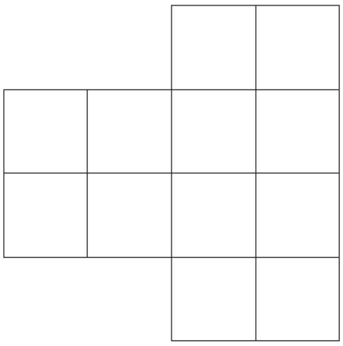
Rješenje: A

Riječ je o 10 lukova koji pripadaju središnjem kutu od 60°, tj. 10 šestina kružnice. $o = 10 \cdot \frac{2R\pi}{6} = \frac{10R\pi}{3}$.

14. Pravokutnik dimenzija 3×2 može biti potpuno prekriven dvjema L-figurama (slika lijevo) na dva različita načina (slike desno).



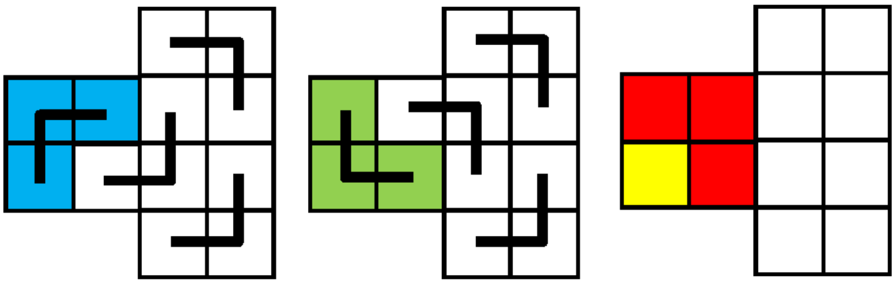
Na koliko različitih načina lik na donjoj slici može biti potpuno prekriven L-figurama?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 48

Rješenje: B

Počnimo od krajnje lijevog gornjeg kuta. Možemo ga prekriti L-figurama na dva različita načina prikazana na slikama (prva i druga slika). Ostatak prekrivanja je jedinstven, kako je prikazano na slikama. Primijetimo da prekrivanje na trećoj slici ne dolazi u obzir jer ostaje kvadratić koji ne može biti prekriven L-figurama. Imamo, dakle, 2 različita načina za potpuno prekrivanje zadanoga lika.



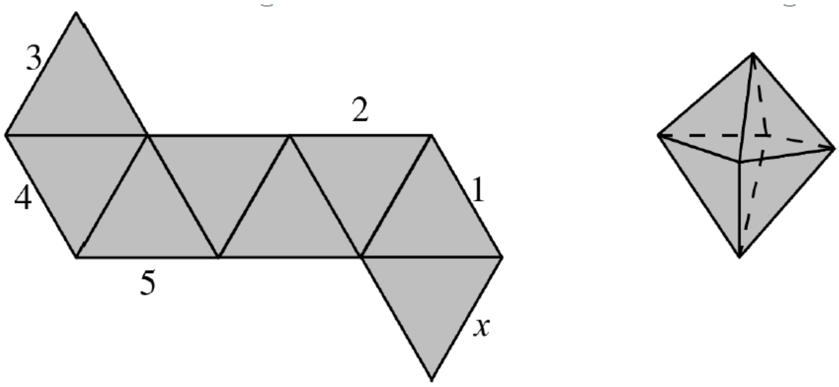
15. Sedam znamenaka telefonskog broja $\overline{aaabbbb}$ zbrojene daju dvoznamenkast broj $\overline{ab}$. Odredi zbroj $a + b$.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Rješenje: C

Uvjet zadatka daje jednakost $3a + 4b = 10a + b$, tj. $3b = 7a$. Kako su a i b znamenke, jedino moguće rješenje je $a = 3, b = 7$, što daje $a + b = 10$.

16. Na slici je mreža oktaedra. Kada se od nje napravi oktaedar, koja će se od označenih dužina podudarati s dužinom označenom x?

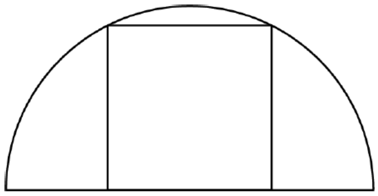


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: E

Pitanja za 5 bodova:

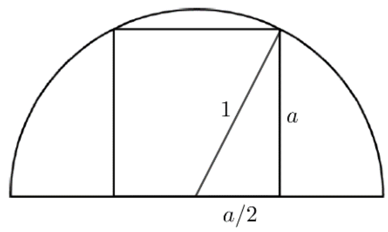
17. Dva su vrha kvadrata na polukružnici, a dva na njezinom promjeru, kao na slici. Polumjer polukružnice je 1 cm. Kolika je površina kvadrata?



A) $\frac{4}{5}$ cm^2 B) $\frac{\pi}{4}$ cm^2 C) 1 cm^2 D) $\frac{4}{3}$ cm^2 E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm^2

Rješenje: A

Označimo li stranicu kvadrata s a, Pitagorin poučak daje $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1^2$, iz čega slijedi $a^2 = \frac{4}{5}$, a to je površina kvadrata.



18. Dvije su točke označene na disku koji rotira oko svoga središta. Jedna od njih je 3 cm udaljenija od središta diska i giba se 2.5 puta brže od druge. Kolika je udaljenost od središta diska do udaljenije točke?

A) 10 cm B) 9 cm C) 8 cm D) 6 cm E) 5 cm

Rješenje: E

Ako je bliža točka od središta udaljena x, onda je dalja udaljena $x + 3$. Kako obje točke u istom vremenu naprave puni krug, njihova je brzina proporcionalna prijeđenom putu ($v = \frac{s}{t}$). Bliža točka prijeđe put $2x\pi$, a dalja $2(x + 3)\pi$ pa imamo $2.5 \cdot 2x\pi = 2(x + 3)\pi$, iz čega slijedi $x = 2$. Dakle, udaljenija točka udaljena je 5 cm od središta.

19. Prirodni brojevi od 1 do 99 zapisani su uzlazno bez razmaka. Taj niz znamenaka zatim je podijeljen u trojke: 123456789101112…979899 → (123)(456)(789)(101)(112)…(979)(899).
Koju od danih trojki nije moguće tako dobiti?

A) (222) B) (444) C) (464) D) (646) E) (888)

Rješenje: B

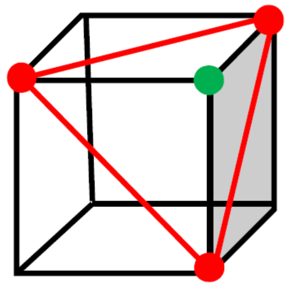
Prve tri trojke možemo zanemariti. U svim ostalim trojkama dvoznamenkasti broj kojemu se znamenke razdvajaju (11, 14, 17,....) pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2. Kada pogledamo kako su dane trojke mogle nastati, vidimo da je ovaj uvjet zadovoljen za sve odgovore osim E: (222) iz 22 i 23, (464) iz 46 i 47, (646) iz 64 i 65, (888) iz 88 i 89. (444) može nastati samo iz 44 i 45, no ostatak pri dijeljenju broja 45 brojem 3 iznosi 0.

20. Koliko ravnina prolazi kroz točno tri vrha dane kocke?

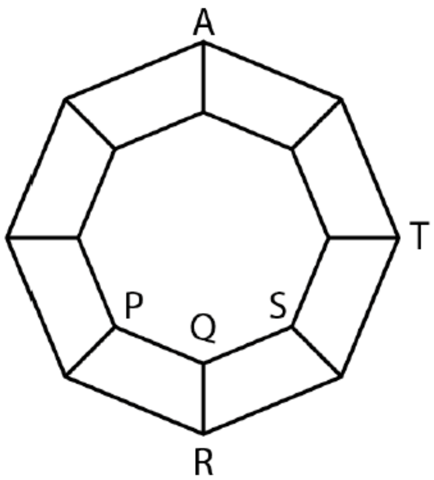
A) 3 B) 2 C) 4 D) 8 E) 12

Rješenje: D

Znamo da tri nekolinearne točke definiraju ravninu. Kako ravnina treba sadržavati točno tri vrha kocke, ne možemo birati tri vrha koja se nalaze na istoj strani kocke niti tri točke koje pripadaju dijagonalnom presjeku kocke (te ravnine sadržavale bi 4 vrha kocke). Moramo dakle izabrati vrhove kao na slici (označeni crveno). Primijetimo da svaka takva ravnina ostavlja jedan vrh kocke (zeleni) s jedne strane, a ostale s druge strane. Možemo zaključiti da traženih ravnina ima koliko i vrhova kocke, tj. 8.

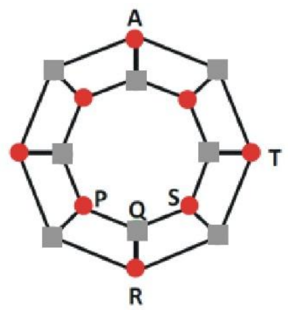


21. Graf se sastoji od 16 vrhova povezanih bridovima kao na slici. Mrav se nalazi u vrhu A. U svakom potezu on može prošetati iz jednog vrha do njemu susjednog vrha puzeći bridom. U kojem od vrhova označenim P, Q, R, S, T mrav može biti nakon 2019 poteza?



A) P, R, S B) P, R, S, T C) Q D) T E) U bilo kojem od označenih vrhova.

Rješenje: C



Na slici su četverokutima označeni vrhovi u kojima se mrav može naći nakon bilo kojeg neparnog broja koraka, a krugovima su prikazani vrhovi u kojima se mrav može naći nakon bilo kojeg parnog broja koraka. Kako je 2019 neparan broj, od ponuđenih odgovora moguće je samo da mrav završi u vrhu Q. Jedan od načina da se to napravi je da mrav dopuže iz A direktno u Q (za to mu treba 5 koraka), a onda 1007 puta ode do R i vrati se u Q.

22. Na svaki vrh kvadrata stavljen je jedan prirodan broj. Za bilo koja dva broja povezana stranicom vrijedi da je jedan od njih višekratnik drugoga. Međutim, za bilo koja dva dijagonalno suprotna broja vrijedi da nijedan nije višekratnik onog drugog. Koji je najmanji mogući zbroj tih četiriju brojeva?

A) 12 B) 24 C) 30 D) 35 E) 60

Rješenje: D

Ni jednom vrhu ne može biti pridružen broj 1 jer bi onda njemu dijagonalno suprotan broj bio njegov višekratnik. Dijagonalno suprotni brojevi moraju imati barem jedan prosti faktor u kojemu se razlikuju, a kako tražimo najmanji zbroj, uzmimo da su dva dijagonalno suprotna broja 2 i 3 (najmanji mogući). Na preostala dva vrha moraju biti višekratnici brojeva 2 i 3 (dakle, višekratnici broja 6), ali koji nisu višekratnici jedan drugome. To znači da moraju imati barem jedan prosti faktor u kojemu se razlikuju. Kako tražimo najmanji zbroj, uzmimo da su ta dva faktora 2 i 3, tj. da su na preostalim vrhovima brojevi $6 \cdot 2 = 12$ i $6 \cdot 3 = 18$. Zbroj je tada $2 + 3 + 12 + 18 = 35$.

23. Koji je najmanji broj elemenata skupa $\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ koje moramo izbaciti da bi umnožak svih preostalih elemenata bio potpuni kvadrat?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: B
Rastavimo li sve brojeve zadanog skupa na proste faktore, možemo uočiti da se faktor 7 pojavljuje samo jednom, pa broj koji ga sadrži (70) treba izbaciti. Umnožak ostatka brojeva je $2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^9$. Broj će biti potpuni kvadrat ako su svi eksponenti parni. Dakle, treba izbaciti barem još jedan broj, primjerice $10 = 2 \cdot 5$. Umnožak preostalih brojeva bit će $2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^8 = (2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4)^2$.

24. Izbrišemo li bilo koju znamenku danog četveroznamenkastog broja, dobit ćemo troznamenkast broj koji je djelitelj početnog broja. Koliko četveroznamenkastih brojeva s ovim svojstvom postoji?

A) 5 B) 9 C) 14 D) 19 E) 23

Rješenje: C
Neka je $\overline{abcd}$ broj sa zadanim svojstvom. On je onda djeljiv s $\overline{abc}$. Slijedi da je i $\overline{abcd} - 10\overline{abc} = d$ djeljiv s $\overline{abc}$, iz čega nužno slijedi da je $d = 0$, tj. broj je oblika $\overline{abc0}$.
Prema pretpostavci je $\overline{abc0}$ djeljiv s $\overline{ab0}$. Onda je i $\overline{abc}$ djeljiv s $\overline{ab}$. Slijedi da je i $\overline{abc} - 10\overline{ab} = c$ djeljiv s $\overline{ab}$, iz čega nužno slijedi da je $c = 0$, tj. traženi broj je oblika $\overline{ab00}$.
Zatim, prema pretpostavci je $\overline{ab00}$ djeljiv s $\overline{a00}$ pa je $\overline{ab}$ djeljiv s a. Slijedi da je $\overline{ab} - 10a = b$ djeljiv s a. Također, $\overline{ab00}$ djeljiv je s $\overline{b00}$ pa je $\overline{ab}$ djeljiv s b. Slijedi da je $\overline{ab} - b = 10a$ djeljiv s b.
Iz uvjeta $b = ka$ i $10a = lb = kla$ slijede tri mogućnosti: $b = a, b = 2a, b = 5a$. Kako su a i b znamenke, traženi četveroznamenkasti brojevi su: 1100, 2200, …, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800, 1500. Ima ih 14.

Rješenja zadataka bit će objavljena 22. travnja 2019. godine na internetskoj stranici HMD-a. Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 28. travnja 2019. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2019. godine na internetskoj stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2019. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 20. svibnja 2019. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na internetu – **http://www.matematika.hr/klokan/2019/.**