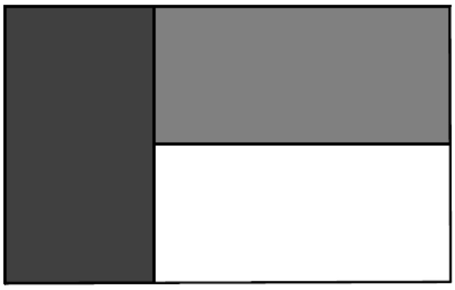
MATEMATIČKI KLOKAN S 2019.

RJEŠENJA ZADATAKA

Pitanja za 3 boda:

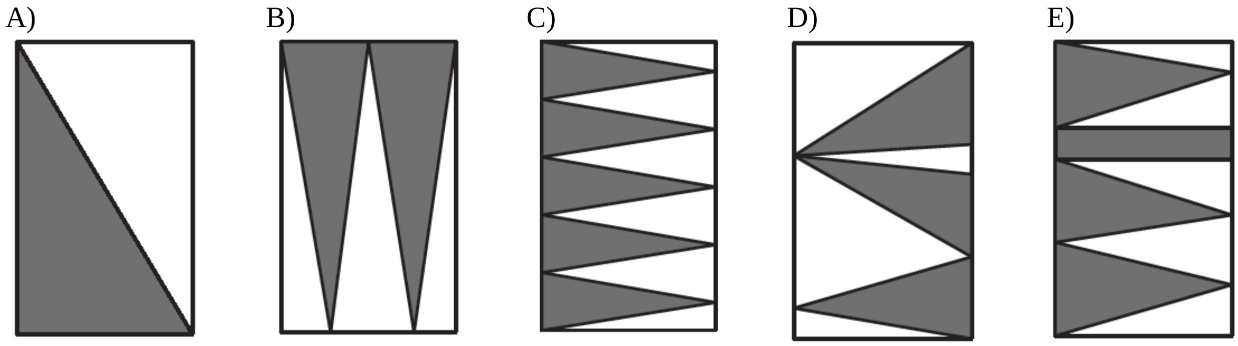
1. Zastava Klokanije je pravokutnik podijeljen na tri manja sukladna pravokutnika, kao na slici. Odredi omjer stranica bijelog pravokutnika.



A) 1 : 2 B) 2 : 3 C) 2 : 5 D) 3: 7 E) 4 : 9

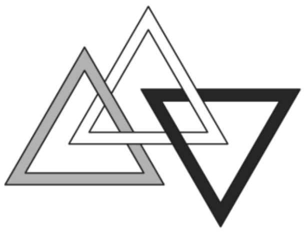
Rješenje: A

2. Pravokutnik je osjenčan na pet različitih načina. Na kojoj je slici osjenčana površina najveća?

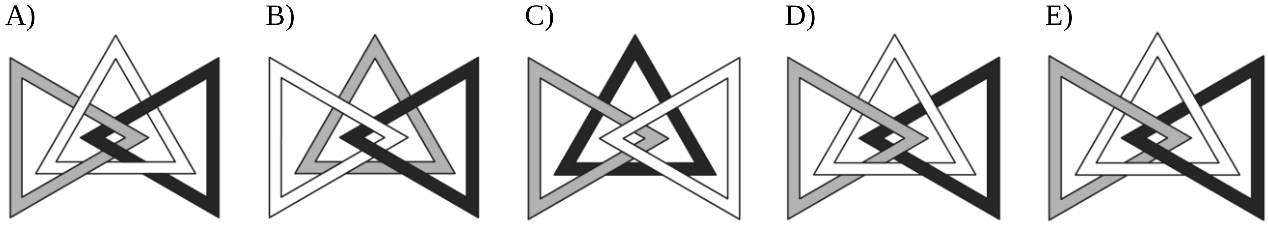


Rješenje: E
Osjenčane površine u pravokutnicima A, B, C i D jednake su, a iznose pola površine pravokutnika. Osjenčani pravokutnik koji se nalazi unutar pravokutnika na slici E daje nešto veću površinu.

3. Tri su trokuta isprepletena kao na slici.



Na kojoj su od danih slika trokuti isprepleteni na isti način?



Rješenje: D

4. Piramida ima 23 strane u obliku trokuta. Koliko ova piramida ima bridova?

A) 23 B) 24 C) 46 D) 48 E) 69

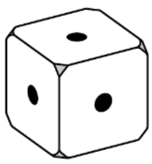
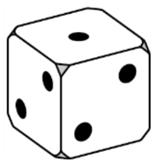
Rješenje: C
Radi se o 23-stranoj piramidi – ona ima 23 brida osnovke i 23 bočna brida, dakle 46 bridova.

5. Koja je prva znamenka (slijeva) najmanjeg prirodnog broja kojemu je zbroj znamenaka jednak 2019?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: B
Da bi broj bio najmanji (s najmanje znamenaka), trebamo iskoristiti maksimalan broj znamenaka 9. Kako je $2019 = 224 \cdot 9 + 3$, traženi je broj $3\underbrace{99 \ldots 99}_{224}$.

6. Svaka strana kocke označena je jednom, dvjema ili trima točkama, i to tako da je vjerojatnost da padne jedinica $\frac{1}{2}$, vjerojatnost da padne dvojka $\frac{1}{3}$, a vjerojatnost da padne trojka $\frac{1}{6}$. Koja od danih slika ne može biti pogled na takvu kocku?

A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: C
Iz danih vjerojatnosti zaključujemo da su na kocki tri jedinice, dvije dvojke i jedna trojka. Stoga pogled C nije moguć.

7. Mihael je izmislio novu "$\diamondsuit$" operaciju s realnim brojevima. Definirana je ovako: $x \diamondsuit y = y - x$. Ako za a, b i c vrijedi $(a \diamondsuit b) \diamondsuit c = a \diamondsuit (b \diamondsuit c)$, koja je od danih izjava nužno točna?

A) $a = b$ B) $b = c$ C) $a = c$ D) $a = 0$ E) $c = 0$

Rješenje: D
Iz $(a \diamondsuit b) \diamondsuit c = a \diamondsuit (b \diamondsuit c)$ slijedi $c - (b - a) = (c - b) - a$, tj. $a = -a$, pa je $a = 0$.

8. Koliko je brojeva između 2^{10} i 2^{13} (uključujući) djeljivo brojem 2^{10}?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

Rješenje: D
Kako je $2^{13} = 8 \cdot 2^{10}$, s 2^{10} bit će djeljivi brojevi $k \cdot 2^{10}$, za $k = 1, 2, \ldots, 8$. Dakle, 8 brojeva.

Pitanja za 4 boda:

9. Koja je najveća potencija broja 3 djelitelj broja $7! + 8! + 9!$?

A) 3^2 B) 3^4 C) 3^5 D) 3^6 E) Potencija broja 3 veća od 3^6.

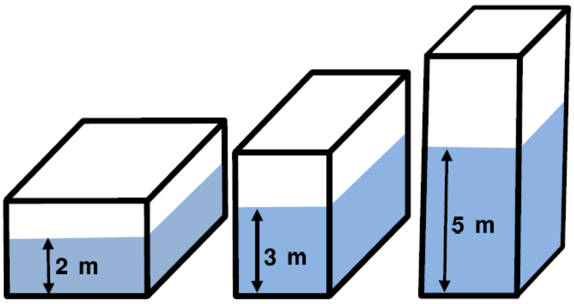
Rješenje: D
$7! + 8! + 9! = 7!\,(1 + 8 + 8 \cdot 9) = 81 \cdot 7! = 3^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7.$
Vidimo da se u rastavu danog broja pojavljuje 6 faktora 3, pa je on djeljiv s 3^6.

10. Ove se godine broj momaka u mome razredu povećao 20%, a broj djevojaka smanjio se 20%. Sada je u razredu jedan učenik više nego lani. Koji bi od danih brojeva mogao biti trenutačni broj učenika u mome razredu?

A) 22 B) 26 C) 29 D) 31 E) 34

Rješenje: B
Neka je M prošlogodišnji broj momaka, a D prošlogodišnji broj djevojaka u razredu. Prvo primijetimo da ti brojevi moraju biti djeljivi s 5 (kako bi 20% bio prirodan broj). Iz uvjeta zadatka imamo jednadžbu $1.2M + 0.8D = M + D + 1$, odnosno $M = D + 5$. Trenutačan je broj učenika u razredu broj oblika $2D + 6$ (paran broj koji pri dijeljenju s 5 daje ostatak 1). Taj uvjet zadovoljava samo rješenje B.

11. Kada se u spremniku oblika kvadra nalazi 120 m^3 vode, spremnik nije pun. Dubina vode je 2 m, 3 m ili 5 m, ovisno o tome koja je strana spremnika na tlu, kao na slici (slika nije u mjerilu). Odredi volumen spremnika.



A) 160 m^3 B) 180 m^3 C) 200 m^3 D) 220 m^3 E) 240 m^3

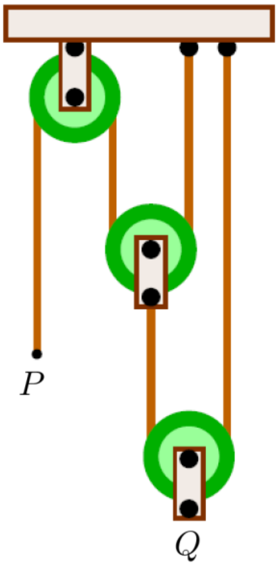
Rješenje: E
Neka su a, b i c dimenzije spremnika. Iz danih uvjeta imamo jednadžbe:
$a \cdot b \cdot 2 = 120$, $a \cdot c \cdot 3 = 120$, $b \cdot c \cdot 5 = 120$, tj. $a \cdot b = 60$, $a \cdot c = 40$, $b \cdot c = 24$. Pomnožimo li ove tri jednadžbe, dobivamo $a^2b^2c^2 = 60 \cdot 40 \cdot 24$, odnosno $V^2 = 240^2$, pa je $V = 240$ m^3.

12. Za prirodan broj n reći ćemo da je "dobar" ako je njegov najveći djelitelj (ne računajući n) jednak $n - 6$. Koliko dobrih prirodnih brojeva postoji?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) Beskonačno mnogo.

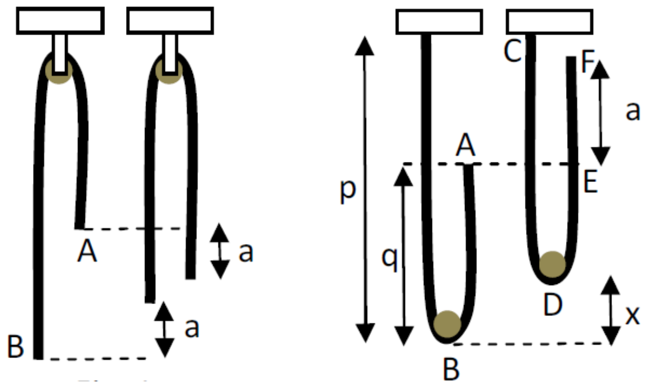
Rješenje: C
Najmanji mogući djelitelj broja n (osim 1) je 2. Stoga mora vrijediti $2 \cdot (n - 6) \leq n$, iz čega slijedi $n \leq 12$. Također, iz uvjeta $n - 6 \geq 0$ slijedi $n \geq 6$. Provjerom prirodnih brojeva od 6 do 12 vidimo da su "dobri" 7, 9 i 12.

13. Na slici je sustav od tri koloture povezane vertikalnom užadi. Povučemo li kraj P dolje za 24 cm, koliko će se centimetara točka Q pomaknuti gore?



A) 24 B) 12 C) 8 D) 6 E) $\frac{24}{5}$

Rješenje: D
Ako uže visi na koloturi koja je na stropu, kao na lijevoj slici, onda će povlačenje kraja A za a dolje uzrokovati pomicanje kraja B za a gore.
Ako je uže privezano na strop i provučeno kroz koloturu, kao na slici desno, onda će povlačenje kraja A za a gore uzrokovati pomicanje točke B za $\frac{a}{2}$ gore (to slijedi iz $p + q = (p - x) + (q - x) + a$).
Oba slučaja vrijede zato što se duljina užeta ne mijenja.



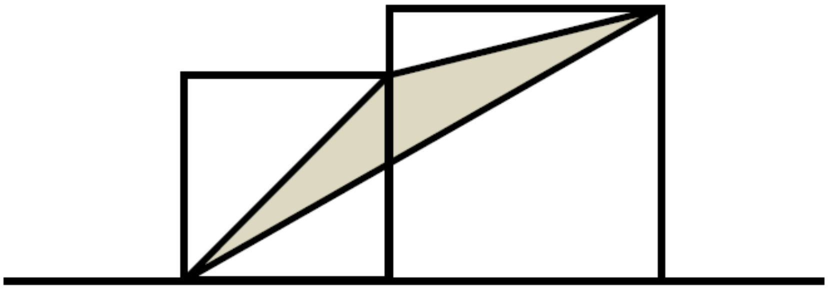
Na slici u zadatku povlačenje kraja P dolje za 24 cm uzrokuje podizanje koloture u sredini za $\frac{24}{2} = 12$ cm, što dalje uzrokuje podizanje točke Q za $\frac{12}{2} = 6$ cm.

14. U kutiji se nalaze 4 čokolade i 1 voćna pločica. Ivo i Mare naizmjenice izvlače poslasticu iz kutije, bez vraćanja. Pobjeđuje onaj koji izvuče voćnu pločicu. Ivo izvlači prvi. Koja je vjerojatnost da će Mare pobijediti?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

Rješenje: A
Možemo zamislili da Ivo i Mare izvlače poslastice dok god kutija nije prazna, a tek onda pogledaju tko je pobijedio. Mogući rasporedi izvlačenja voćnih pločica (V) i čokolada (Č) su: VČČČČ, ČVČČČ, ČČVČČ, ČČČVČ, ČČČČV, i svi su jednako vjerojatni. Mare pobjeđuje ako je voćna pločica izvučena druga ili četvrta po redu, u dva od pet slučajeva, pa je vjerojatnost za Marinu pobjedu $\frac{2}{5}$.

15. Na slici su prikazana dva susjedna kvadrata stranica duljina a i b ($a < b$). Kolika je površina osjenčanog trokuta?



A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{1}{2}a^2$ C) $\frac{1}{2}b^2$ D) $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ E) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

Rješenje: B
Od površina dvaju kvadrata možemo oduzeti površine triju bijelih pravokutnih trokuta:
$a^2+b^2-\frac{a^2}{2}-\frac{(a+b)b}{2}-\frac{(b-a)b}{2}=\frac{a^2}{2}$.

16. Odredi cjelobrojni dio broja $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}}$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 20 E) 25

Rješenje: A

Znamo da je $\sqrt{20} < 5$ pa je $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}} < \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+5}}}} = 5$.

Znamo i da je cijeli izraz veći od $\sqrt{20} > 4$. Stoga je cjelobrojni dio ovog broja jednak 4.

Pitanja za 5 bodova:

17. Neka je a zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 1024 i b umnožak svih pozitivnih djelitelja broja 1024. Tada vrijedi:

A) $(a-1)^5 = b$ B) $(a+1)^5 = b$ C) $a^5 = b$ D) $a^5 - 1 = b$ E) $a^5 + 1 = b$

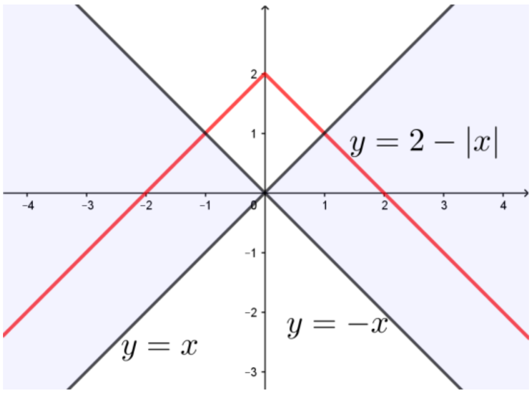
Rješenje: B
Djelitelji broja $1024 = 2^{10}$ potencije su broja 2: $2^0, 2^1, \dots, 2^{10}$. Njihov je zbroj $a = 2^{11} - 1$, a njihov umnožak $b = 2^{55}$. Dakle, vrijedi $(a+1)^5 = b$.

18. Za koje realne brojeve a jednadžba $2 - |x| = ax$ ima točno 2 rješenja?

A) $\langle -\infty, -1]$ B) $\langle -1, 1 \rangle$ C) $[1, \infty \rangle$ D) $\{0\}$ E) $\{-1, 1\}$

Rješenje: B

Skiciramo li graf funkcije $y = 2 - |x|$ te neke pravce kroz ishodište $y = ax$, možemo uočiti da će te dvije funkcije imati dva presjeka ukoliko je $a \in \langle -1,1 \rangle$. Za $a = 1$ i $a = -1$ dobivamo pravce koji su paralelni s granama grafa funkcije $y = 2 - |x|$.



19. Zadana su četiri pravca kroz ishodište koordinatnog sustava. Oni presijecaju parabolu $y = x^2 - 2$ u osam točaka. Što od navedenog može biti umnožak x-koordinata tih osam točaka?

A) samo 16 B) samo -16 C) samo 8 D) samo -8 E) Postoji nekoliko mogućih umnožaka.

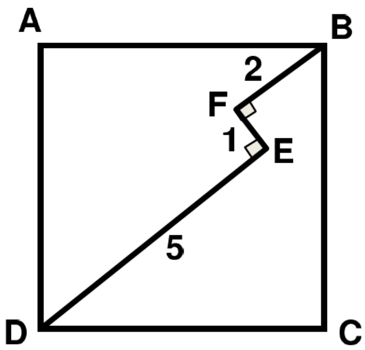
Rješenje: A
Pravac kroz ishodište koordinatnog sustava ima jednadžbu $y = kx, k \in \mathbb{R}$. Presjeci toga pravca i parabole $y = x^2 - 2$ rješenja su jednadžbe $kx = x^2 - 2$, odnosno $x^2 - kx - 2 = 0$. Prema Vièteovim formulama za umnožak rješenja ove jednadžbe vrijedi $x_1 \cdot x_2 = -2$, a to je ujedno umnožak x-koordinata presjeka. Kako su zadana četiri pravca koji parabolu sijeku u osam točaka (svaki u dvije točke), umnožak x-koordinata tih presjeka je $(-2)^4 = 16$.

20. Za koliko je cijelih brojeva n broj $|n^2 - 2n - 3|$ prost?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Beskonačno mnogo.

Rješenje: D
Kako je $n^2 - 2n - 3 = (n-3)(n+1)$, dani će broj biti prost samo ako je jedan od faktora u tom izrazu 1 ili -1. Provjeravanjem brojeva koji se dobiju za $n \in \{-2, 0, 2, 4\}$ vidimo da su sva četiri broja prosta (5, 3, 3, 5).

21. Putanja $DEFB$ leži unutar kvadrata $ABCD$ i vrijedi $DE \perp EF$, $EF \perp FB$.
Ako je $|DE| = 5$, $|EF| = 1$ i $|FB| = 2$, kolika je duljina stranice kvadrata $ABCD$?



A) $3\sqrt{2}$ B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{11}{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) Ništa od navedenog.

Rješenje: E
Spustimo li okomicu iz vrha B na produžetak dužine $\overline{DE}$, dobit ćemo pravokutan trokut s katetama duljina 1 i $5 + 2 = 7$. Hipotenuza toga trokuta ujedno je i dijagonala kvadrata $ABCD$. Iz $\sqrt{1^2 + 7^2} = a\sqrt{2}$ slijedi $a = 5$.

22. Prvi član niza $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je $a_1 = 49$. Za $n \geq 1$ broj a_{n+1} dobije se tako da sumi znamenaka broja a_n dodamo 1, a zatim kvadriramo rezultat. Tako je $a_2 = (4+9+1)^2 = 196$. Odredi a_{2019}.

A) 121 B) 25 C) 64 D) 400 E) 49

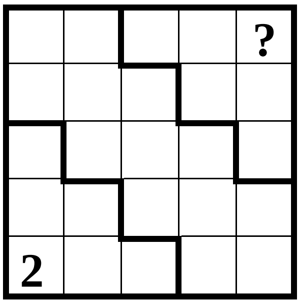
Rješenje: C
Izračunajmo nekoliko početnih članova niza: $a_3 = (1+9+6+1)^2 = 289$, $a_4 = (2+8+9+1)^2 = 400$, $a_5 = (4+0+0+1)^2 = 25$, $a_6 = (2+5+1)^2 = 64$, $a_7 = (6+4+1)^2 = 121$,
$a_8 = (1+2+1+1)^2 = 25$. Kako je $a_8 = a_5$, dalje će se članovi niza ponavljati s periodom 3 (64, 121, 25, 64, 121, 25, …). Zaključujemo da je $a_{2019} = a_6 = 64$.

23. Iz skupa $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ nasumično su izabrana tri različita broja. Koja je vjerojatnost da je jedan od njih aritmetička sredina preostalih dvaju?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

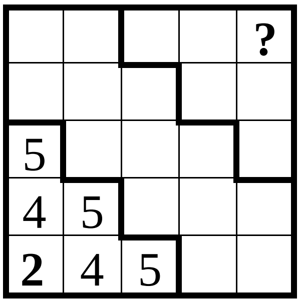
Rješenje: B
Tri broja iz skupa od 10 brojeva možemo odabrati na $\binom{10}{3} = 120$ načina.
Biramo tri broja $a < b < c$ za koje mora vrijediti $b = \frac{a+c}{2}$. Da bi b bio prirodan broj, a i c moraju biti iste parnosti. Zadatak se svodi na vjerojatnost da iz zadanog skupa nasumično odaberemo 2 broja iste parnosti.
Dva parna broja možemo odabrati na $\binom{5}{2} = 10$ načina, dva neparna broja također možemo odabrati na $\binom{5}{2} = 10$ načina. Tražena vjerojatnost je $\frac{10+10}{120} = \frac{1}{6}$.

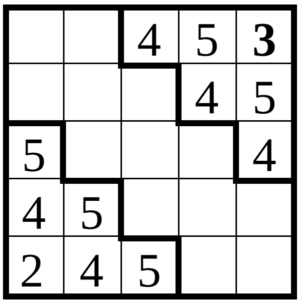
24. Kvadrat na slici popunjen je brojevima tako da svaki redak i svaki stupac sadrži brojeve 1, 2 3, 4 i 5 točno jednom. K tome, zbroj brojeva u svakome od tri ograđena područja jednak je. Koji se broj nalazi u gornjem desnom kutu?

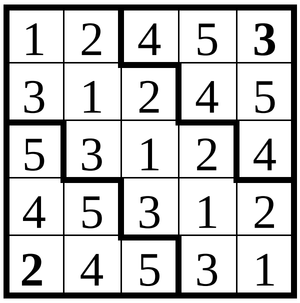


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C
Zbroj svih brojeva u tablici iznosi $5 \cdot (1+2+3+4+5) = 75$ pa u svakome od tri ograđena područja zbroj mora biti 25. Jedini način da zbroj u donjem lijevom području bude 25 je $25 = 2+5+5+5+4+4$ i brojevi moraju biti raspoređeni kao na prvoj slici.
U gornjem desnom području 5 se može pojaviti najviše dva puta. To područje stoga mora sadržavati tri broja 4 (inače bi suma mogla biti maksimalno $5+5+4+4+3+3 = 24$). Dakle, da bismo dobili zbroj 25 u gornjem desnom kutu mora biti broj 3, $25 = 5+5+4+4+4+3$ (druga slika).
Potrebno je popuniti i ostatak tablice kako bismo se uvjerili da je takvo rješenje moguće (treća slika).







Eventualne primjedbe na rješenja zadataka primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 28. travnja 2019. u 23:59.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 2. svibnja 2019. godine na internetskoj stranici HMD-a.
Primjedbe i žalbe učenika primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 9. svibnja 2019. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 20. svibnja 2019. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na internetu – **http://www.matematika.hr/klokan/2019/**.