OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. veljače 2010.

4. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $2010 + 2010 \cdot 2 + 2010 \cdot 3 + 2010 \cdot 4 + 2010 \cdot 5 = 2010 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$
$= 2010 \cdot 15 = 30150$
.... UKUPNO 4 BODA

2. $196 - 28 : 4 + 10 \cdot (168 - 166) = 196 - 7 + 10 \cdot 2 = 189 + 20 = 209$
.... UKUPNO 4 BODA

3. Svaka knjiga ima po 2 korice pa je ukupan broj korica 6, a njihova ukupna debljina 12 mm. Ukupan broj stranica je 90 + 110 + 150 odnosno 350. Zato je ukupna debljina svih stranica jednaka 350:10 odnosno 35 mm. Na kraju, debljina svi knjiga zajedno je 12 + 35 odnosno 47 mm.
.... UKUPNO 4 BODA

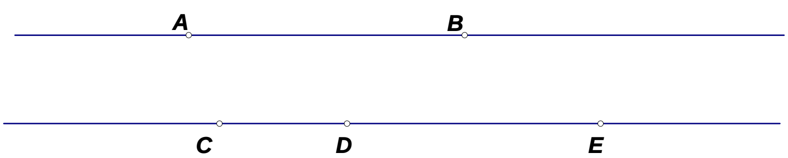
4. Najveći jednoznamenkasti broj je 9, a najveći dvoznamenkasti broj je 99 pa je $999 = 9 + 990 = 9 + 99 \cdot 10$. Dakle, treba dodati 10 puta.
.... UKUPNO 4 BODA

5. Znamenka 7 se pojavljuje u brojevima 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 i 97. Dakle, znamenka 7 je napisana 20 puta.
.... UKUPNO 4 BODA

6. Ana $\Leftrightarrow$ Beata, Ana $\Leftrightarrow$ Cvijeta, Ana $\Leftrightarrow$ Danijela, Ana $\Leftrightarrow$ Ema
Beata $\Leftrightarrow$ Cvijeta, Beata $\Leftrightarrow$ Danijela, Beata $\Leftrightarrow$ Ema
Cvijeta $\Leftrightarrow$ Danijela, Cvijeta $\Leftrightarrow$ Ema
Danijela $\Leftrightarrow$ Ema
Poklone mogu razmijeniti na 10 načina. (za svaku razmjenu 1 bod)
.... UKUPNO 10 BODOVA

7. U utorak je obojio 4 letvice više nego u ponedjeljak, u srijedu 8 letvica više, u četvrtak 12 letvica više, u petak 16 letvica više i u subotu 20 letvica više nego u ponedjeljak. 3 BODA
Kako je $4 + 8 + 12 + 16 + 20 = 60$, to znači da je obojio ukupno 60 letvica više nego da je svaki dan obojio kao u ponedjeljak. 2 BODA
S obzirom da je $246 - 60 = 186$ i $186 : 6 = 31$, onda je u ponedjeljak obojio 31 letvicu. 3 BODA
U srijedu je obojio 8 letvica više nego u ponedjeljak odnosno 39 letvica. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

8.



Dužine su: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{CE}$ i $\overline{DE}$. (za svaku dužinu 1 bod)
.... UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. veljače 2010.

5. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. 18 ima 6 djelitelja: 1, 2, 3, 6, 9 i 18. 1 BOD
   24 ima 8 djelitelja: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 i 24. 1 BOD
   49 ima 3 djelitelja: 1, 7 i 49. 1 BOD
   Najviše djelitelja ima broj 24. 1 BOD
   ………………………………………………………………………… UKUPNO 4 BODA

2. Kako su razlike uzastopnih članova $7 - 2 = 5$, $17 - 7 = 10$ i $37 - 17 = 20$,
   te je $10 : 5 = 2$ i $20 : 10 = 2$, onda sljedeća razlika treba biti $20 \cdot 2 = 40$,
   a zatim $40 \cdot 2 = 80$.
   2 BODA
   Zato u nizu slijedi broj $37 + 40 = 77$ odnosno $77 + 80 = 157$
   Dva broja koji nastavljaju niz su 77 i 157. 2 BODA
   ………………………………………………………...………………. UKUPNO 4 BODA

3. U zadanom vremenskom razdoblju sat će se oglasiti $87 - 1 = 86$ puta.
   Dijeljenjem $86 : 5$, dobit ćemo 17 i ostatak 1. 2 BODA
   Sat je u tom vremenu napravio 17 ciklusa tik, tak, tok, bim, bam te proizveo još jedan zvuk.
   Sljedeći po redu nakon tik jest zvuk tak. 2 BODA
   ………………………………………………………………………… UKUPNO 4 BODA

4. $20 = 3 + 17$ 1 BOD
   $20 = 7 + 13$ 1 BOD
   $20 = 2 + 5 + 13$ 1 BOD
   $20 = 2 + 7 + 11$ 1 BOD
   ………………………………………………………………………… UKUPNO 4 BODA

5. Ako je x najmanji od tih brojeva, srednji po veličini je $3x$, a najveći $3 \cdot 3x = 9x$.
   Uvjete zadatka opisuje jednadžba $x + 3x + 9x = 481$. 2 BODA
   Tada je $13x = 481$, odakle je $x = 481 : 13 = 37$. Traženi brojevi su 37, 111 i 333. 2 BODA
   ………………………………………………………………………… UKUPNO 4 BODA

6. Prirodni broj je djeljiv s 15 ako je djeljiv i s 3 i s 5. 1 BOD
   Da bi bio djeljiv s 5, zadnja znamenka mu mora biti 0. 2 BODA
   Da bi bio djeljiv s 3, zbroj znamenaka mu mora biti djeljiv s 3. 2 BODA
   Najmanji zbroj četvorki djeljiv s 3 je $4 + 4 + 4$. 2 BODA
   Traženi broj je broj 4440. 3 BODA
   ……………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

7. Traženi su brojevi oblika $\overline{abcde}$, pri čemu znamenke zadovoljavaju uvjete:
   b je iz skupa {3, 5, 7} pa je biramo na 3 načina, 2 BODA
   c je iz skupa {6, 8, 9} te je biramo na 3 načina, 2 BODA
   d je bilo koja od zadanih znamenaka pa je biramo na 8 načina, 2 BODA
   e je iz skupa {0, 6, 8}, no zbog $a = e$ mora biti $e \neq 0$ što znači da je biramo na 2 načina i *a* je određena znamenkom *e*. 2 BODA
   Ukupan broj brojeva koji zadovoljavaju uvjet je $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 2 = 144$. 2 BODA
   ………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

8. Neka je *x* duljina kraće stranice pravokutnika izražena u centimetrima.
   Tada je duljina dulje stranice $4x$. 2 BODA
   Opseg tog pravokutnika je $2(x + 4x) = 20$ pa je
   $5x = 10$
   $x = 2$ 4 BODA
   Stranica kvadrata dugačka je $4 \cdot 2 = 8$ cm pa je površina 64 cm^2. 4 BODA
   ………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. veljače 2010.

6. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Kako je $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0.5=1$ i $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0=1$, onda i $\frac{1}{5}+0.2+x=1$ 2 BODA

   Dalje je $\frac{2}{5}+x=1$ odnosno $x=\frac{3}{5}$ 2 BODA

   ………………………………………………………………………...……. UKUPNO 4 BODA

2. Neka je x ukupan broj kuglica u kutiji.

   Kako je $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=\frac{7}{12}x$, crvene i plave kuglice čine $\frac{7}{12}$ ukupnog broja kuglica. 1 BOD

   Preostale kuglice su zelene pa ih ima $x-\frac{7}{12}x=\frac{5}{12}x$. 1 BOD

   S obzirom da zelenih kuglica ima 10, vrijedi $\frac{5}{12}x=10$. 1 BOD

   Dakle, $x=10:\frac{5}{12}=24$. U kutiji su ukupno 24 kuglice. 1 BOD

   ……...……………………………………………………………………. UKUPNO 4 BODA

3. Neka je x traženi broj. Prema uvjetima zadatka možemo pisati

   $\frac{4+x}{9+x}=2\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$ 1 BOD

   $9(4+x)=8(9+x)$

   $36+9x=72+8x$ 1 BOD

   $9x-8x=72-36$

   $x=36$ 1 BOD

   Traženi broj je 36. 1 BOD

   ……………………………………………………………...…………. UKUPNO 4 BODA

4. Neka je α veličina kuta uz osnovicu tog trokuta. Tada je $\alpha + 20°$ veličina kuta među krakovima tog trokuta. 1 BOD

   Zato vrijedi $\alpha+\alpha+\alpha+20° = 180°$ 1 BOD

   Dalje je $3\alpha + 20° = 180°$, odnosno $3\alpha = 160°$, pa je $\alpha = 53°20'$. 1 BOD

   Kutovi trokuta su veličine 53°20', 53°20' i 73°20'. 1 BOD

   ……………………………………………………………………...…. UKUPNO 4 BODA

5. Neka je x količina dovezenog krumpira.

   Kako je $\frac{3}{7}x$ količina prodanog krumpira, onda je $x-\frac{3}{7}x=\frac{4}{7}x$ ostatak. 1 BOD

   Zato vrijedi $\frac{4}{7}x=\frac{3}{7}x+210$. 1 BOD

   Dalje je $\frac{4}{7}x-\frac{3}{7}x=210$ odnosno $\frac{1}{7}x=210$. 1 BOD

   Na kraju je x = 1470. Dostavljač je na tržnicu dovezao 1470 kg krumpira. 1 BOD

   …………………………………………………………………………… UKUPNO 4 BODA

6. Neka je x broj boca od 0.8 l.

Tada je $78-x$ broj boca od $\frac{3}{4}l$. 2 BODA

Zato vrijedi $0.8x+\frac{3}{4}(78-x)=60$. 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe slijedi $x = 30$. 4 BODA

Napunjeno je 30 boca od 0.8 l i 48 boca od $\frac{3}{4}$ l. 2 BODA

……………………………………………………………...………. UKUPNO 10 BODOVA

7. Površinu pravokutnog trokuta računamo: $\frac{c\cdot v_c}{2}=\frac{a\cdot b}{2}$

3 BODA

$\frac{c\cdot 2.4}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}$ 2 BODA

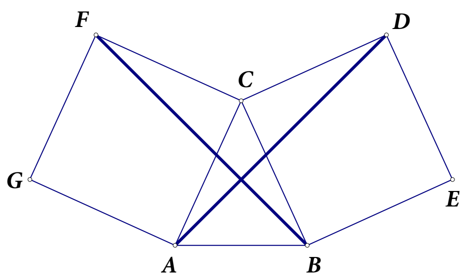
$\frac{c\cdot 2.4}{2}=6$

2 BODA

$c = 5$ m 3 BODA

…………………………………………………………………...…. UKUPNO 10 BODOVA

8.



1 BOD

Prema uvjetima zadatka je $|AC| = |BC| = b$ (to su kraci jednakokračnog trokuta). 1 BOD

Nadalje je $|CD| = |CF| = b$ (stranica kvadrata). 1 BOD

Konačno, $|\angle ACD| = |\angle ACB| + |\angle BCD| = \gamma + 90°$ i

$|\angle BCF| = |\angle BCA| + |\angle ACF| = \gamma + 90°$, pa vrijedi $|\angle ACD| = |\angle BCF|$. 3 BODA

Prema poučku S-K-S o sukladnosti trokuta zaključujemo da je $\Delta ACD \cong \Delta BCF$. 2 BODA

Iz dokazane sukladnosti slijedi $|AD| = |BF|$. 2 BODA

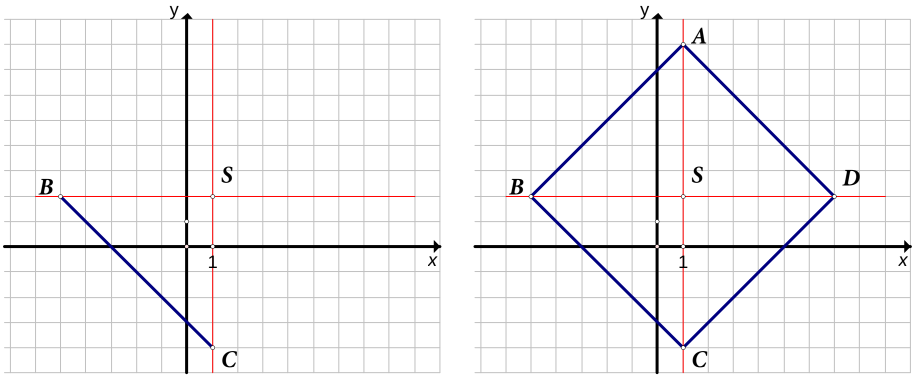
……………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. veljače 2010.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.



1 BOD

Sjecište dijagonala kvadrata je u točki $S(1, 2)$. Dijagonale kvadrata su okomite i jednakih duljina, a točka S je njihovo zajedničko polovište. 1 BOD

Tada je $A(1, 8)$ i $D(7, 2)$. 2 BODA

………………………………………………………………………….. UKUPNO 4 BODA

2. $1 : x = 4$ cm : 180 km = 4 cm : 18 000 000 cm 2 BODA

$x = \dfrac{18000000}{4} = 4500000$ 1 BOD

Traženo mjerilo je 1 : 4 500 000 1 BOD

………………………………………………………………….……… UKUPNO 4 BODA

3. Iz uvjeta zadatka moguće je sastaviti jednakost $x_1 + x_2 ... + x_{16} = 416$. 1 BOD

Nakon što Hrvoje napusti skupinu jednakost glasi $x_1 + x_2 ... + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 375$. 1 BOD

Oduzimanjem druge jednakosti od prve dobivamo da je $x_{16} = 416 - 375$ 1 BOD

Dakle, Hrvoje ima 41 godinu. 1 BOD

…………………………………………………………………..……… UKUPNO 4 BODA

4. Neka je c početna cijena krumpira. To znači da domaćica raspolaže s $20c$ kn. 1 BOD

Nakon sniženja će nova cijena biti $c - 20\%c = 0.8c$. 1 BOD

Ako je x količina krumpira kojeg može kupiti po novoj cijeni, onda vrijedi $x \cdot 0.8c = 20c$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe slijedi $x = 25$. Po novoj cijeni se može kupiti 25 kg. 1 BOD

…………………………………………………………………….…. UKUPNO 4 BODA

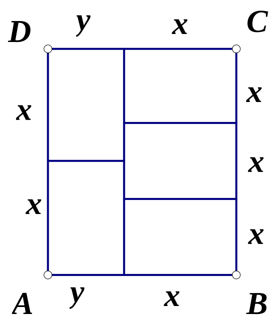
5. Prva osoba za jedan dan obavi $\dfrac{1}{12}$ posla, a druga osoba $\dfrac{1}{6}$ posla. 1 BOD

Oni skupa za jedan dan mogu obaviti $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ posla. 2 BODA

Dakle, za cijeli posao im treba 4 dana. 1 BOD

………………………………………………………………………….. UKUPNO 4 BODA

6.



Označimo dimenzije početnog pravokutnika s x i y.
Vrijedi: $|BC| = 3y$, $|AB| = |DC| = x + y$, $|AD| = 2x$. 1 BOD
Kako je $|BC| = |AD|$, onda je $3y = 2x$ odnosno $x = 1.5y$. 1 BOD
Neka je p površina početnog pravokutnika. Tada je $p = xy = 1.5y \cdot y$ 1 BOD
Dalje je $p_{ABCD} = 5p = 7.5y \cdot y = 750$ odnosno $y \cdot y = 150$ pa je $y = 10$ cm. 3 BODA
Slijedi $x = 15$ cm. 1 BOD
$|AB| = x + y = 25$ cm 1 BOD
$|BC| = 3y = 30$ cm 1 BOD
Na kraju, $o_{ABCD} = 2|AB| + 2|BC| = 110$ cm 1 BOD
…………………………………………………………………...…… UKUPNO 10 BODOVA

7. Produljeni razmjer $a : b : c = 2 : 5\frac{1}{3} : 3.2$ možemo pisati u obliku $a : b : c = 30:80:48$,
odnosno $a : b : c = 15 : 40 : 24$. 2 BODA
Tada vrijedi $a = 15x$, $b = 40x$ i $c = 24x$, $x \in \mathbb{Q}$. 3 BODA
Prema uvjetu zadatka je $c = b - 8$ km, tj. $24x = 40x - 8$. 1 BOD
Iz posljednje jednadžbe nalazimo da je $x = 0.5$. 1 BOD
Udaljenosti tvornica A, B i C od luke su redom 7.5 km, 20 km i 12 km. 3 BODA
……………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

8. Neka je s_1 odnosno s_2 duljina puta od mjesta A do mjesta B odnosno duljina puta u povratku. Neka je t_1 odnosno t_2 vrijeme provedeno u vožnji od mjesta A do mjesta B odnosno u povratku. Neka je v_1 odnosno v_2 prosječna brzina na putu do mjesta B odnosno u povratku.
1 BOD

Tada je $s_2 = s_1 - 0.26s_1 = 0.74s_1$, $t_1 = 6\frac{45}{60} - \frac{30}{60} = 6\frac{15}{60} = 6\frac{1}{4}$ i

$t_2 = 6\frac{45}{60} - \frac{35}{60} = 6\frac{10}{60} = 6\frac{1}{6}$ 3 BODA

Dalje je $v_1 = \frac{s_1}{t_1}$ i $v_2 = \frac{s_2}{t_2}$ 2 BODA

Zato vrijedi $v_1 : v_2 = \frac{s_1}{t_1} : \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_1}{t_1} \cdot \frac{t_2}{s_2} = \frac{s_1 \cdot 6\frac{1}{6}}{6\frac{1}{4} \cdot 0.74s_1} = \frac{\frac{37}{6}}{\frac{25}{4} \cdot 0.74} = \frac{37 \cdot 16}{6 \cdot 74} = \frac{4}{3}$ 3 BODA

Dakle, $v_1 : v_2 = 4 : 3$. 1 BOD
……………………………………………………………………... UKUPNO 10 BODOVA

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. veljače 2010.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Količnici uzastopnih članova su 2, 4, 8. 1 BOD
Kako je $4 : 2 = 2$ i $8 : 4 = 2$, onda sljedeći količnik treba biti $8 \cdot 2 = 16$,
a zatim $16 \cdot 2 = 32$. 2 BODA
Zato u nizu slijedi broj $192 \cdot 16 = 3072$, odnosno $3072 \cdot 32 = 98304$. 1 BOD

………………………………………………………………………….……. UKUPNO 4 BODA

2. Potrebno je uočiti da je $10\,000^{9999} = (10^4)^{9999}$. 2 BODA
Iz toga slijedi jednakost $(10^4)^{9999} = 10^{39996}$. 1 BOD
Dakle, iza znamenke 1 biti će 39 996 nula, pa će broj imati 39 997 znamenaka. 1 BOD
……………………………………………………………………..………… UKUPNO 4 BODA

3. Površina romba je jednaka polovini umnoška duljina njegovih dijagonala.

$$p = \frac{\left(\sqrt{2010} + \sqrt{2002}\right) \cdot \left(\sqrt{2010} - \sqrt{2002}\right)}{2}$$ 1 BOD

$$p = \frac{\left(\sqrt{2010}\right)^2 - \left(\sqrt{2002}\right)^2}{2}$$ 1 BOD

$$p = \frac{2010 - 2002}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Površina romba iznosi 4 cm^2. 2 BODA
………………………………………………………………………….……. UKUPNO 4 BODA

4. $$\frac{4a^2 - 4ab}{a^3 - ab^2} = \frac{4a \cdot (a-b)}{a \cdot (a^2 - b^2)} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4 \cdot a \cdot (a-b)}{a \cdot (a-b) \cdot (a+b)} =$$ 1 BOD

$$= \frac{4}{a+b}$$ 1 BOD

……………………………………………………………………….………. UKUPNO 4 BODA

5. Vrijedi $a^2 - 4a + 2010 = a^2 - 2 \cdot 2a + 2^2 - 2^2 + 2010 = (a-2)^2 + 2006$. 2 BODA
Za $a = 2$ najmanja vrijednost je 2006. 2 BODA
…………………………………………………………………….…………… UKUPNO 4 BODA

6. Iz $a : b = 8 : 15$ slijedi da je $a = 8x$ i $b = 15x$, $x \in \mathbb{Q}$. 2 BODA
Primjenom Pitagorina poučka dobiva se $c^2 = (8x)^2 + (15x)^2$, tj. $c^2 = 289x^2$.
Duljina hipotenuze je $c = 17x$. 3 BODA
Opseg trokuta je 100 cm pa je $8x + 15x + 17x = 100$.
Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo $x = 2.5$. 2 BODA
Duljine stranica trokuta su $a = 20$ cm, $b = 37.5$ cm i $c = 42.5$ cm. 3 BODA
……………………………………………………………..………. UKUPNO 10 BODOVA

7. Broju n prethodnik je broj $n - 1$,a sljedbenik $n + 1$. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka slijedi jednadžba:

$n^2 - 49 = 3(n-1)^2 - 2(n+1)^2$ 2 BODA

$n^2 - 49 = 3(n^2 - 2n + 1) - 2(n^2 + 2n + 1)$ 2 BODA

$n^2 - 49 = 3n^2 - 6n + 3 - 2n^2 - 4n - 2$ 1 BOD

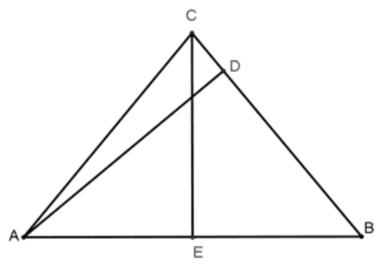
$10n = 50$ 2 BODA

$n = 5$ 1 BOD

Traženi broj je 5, a njegov sljedbenik 6. 1 BOD

…………………………………………………………………...……… UKUPNO 10 BODOVA

8.



Neka su $\overline{AD}$ visina na krak $\overline{BC}$ i $\overline{CE}$ visina na osnovicu $\overline{AB}$. 1 BOD

Kako je $|BC| < |AB|$, onda je $|AD| > |CE|$.

To znači da je $|AD| = 24$ cm, a $|CE| = 20$ cm. 1 BOD

Kako je $p = \frac{|AB| \cdot |CE|}{2} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2}$, onda vrijedi $20|AB| = 24|BC|$

odnosno $|AB| = \frac{6}{5}|BC|$. 2 BODA

Primijenimo li Pitagorin poučak na ΔBCE, slijedi $20^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = |BC|^2$, odnosno nakon

sređivanja $|BC| = 25$ cm i $|AB| = 30$ cm. 4 BODA

Na kraju, $o = |AB| + 2\,|BC| = 30 + 2 \cdot 25 = 80$ cm. 2 BODA

…………………………………………………………………...……… UKUPNO 10 BODOVA