Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

4. veljače 2010.

1. (4) Neka je n prirodni broj i $a \neq 0$ realni broj. Potpuno skrati razlomak
$$\frac{a^{3n+1} - a^4}{a^{2n+3} + a^{n+4} + a^5}.$$

2. (4) Odredi prirodni broj čiji je 9-erokratnik između 1100 i 1200, a 13-erokratnik između 1500 i 1600.

*Za prirodni broj n, n-*terokratnik *nekog broja je broj koji je n puta veći od tog broja.*

3. (4) Tri kružnice polumjera $2\,\text{cm}$ nalaze se u ravnini tako da središte svake od njih leži na sjecištu drugih dviju kružnica. Odredi površinu presjeka svih triju krugova određenih tim kružnicama.

4. (4) Ako nekom broju obrišemo znamenku jedinica, dobit ćemo broj koji je za 2010 manji od polaznog broja. Koji je polazni broj?

5. (4) U vreći se nalazi dovoljno velik broj crvenih, bijelih i plavih kuglica. Svaki učenik uzima nasumce iz vreće po tri kuglice. Koliko najmanje mora biti učenika da bismo bili sigurni da neka dvojica od njih imaju istu kombinaciju kuglica, tj. jednak broj kuglica svake boje?

6. (10) Ako je $a^2 + 2b^2 = 3c^2$, pokaži da je $\left(\dfrac{a+b}{b+c} + \dfrac{b-c}{b-a}\right) \cdot \dfrac{a+2b+3c}{a+c}$ prirodni broj.

7. (10) Pravokutni trokut ABC s katetama duljina $15\,\text{cm}$ i $20\,\text{cm}$ i pravim kutom u vrhu B sukladan je trokutu BDE s pravim kutom u vrhu D. Točka C leži unutar dužine $\overline{BD}$, a točke A i E nalaze se s iste strane pravca BD.

   a) Odredi udaljenost točaka A i E.

   b) Izračunaj površinu presjeka trokuta ABC i BDE.

8. (10) Neka su p i q različiti neparni prosti brojevi. Dokaži da broj $(pq+1)^4 - 1$ ima barem četiri različita prosta djelitelja.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

4. veljače 2010.

1. (4) Odredi zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 2010.

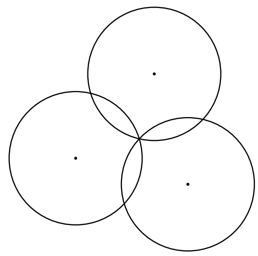
2. (4) Dane su dvije kvadratne jednadžbe

$$x^2 + ax + 1 = 0, \qquad x^2 + x + a = 0.$$

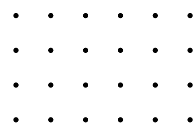
Odredi sve vrijednosti parametra a za koje te jednadžbe imaju barem jedno zajedničko rješenje.

3. (4) Žicom duljine 10 km treba ograditi pravokutno zemljište koje s jedne strane ima ravni zid (žicu je potrebno koristiti za preostale tri stranice), tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?

4. (4) Tri kruga polumjera 1 cm imaju točno jednu zajedničku točku, a njihova središta vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Odredi površinu skupa svih točaka koje pripadaju dvama od tih krugova.



5. (4) Dvadeset i četiri točke raspoređene su u šest stupaca i četiri retka, kao na slici. Pokaži da se od danih točaka može odabrati njih točno dvanaest tako da nikoje četiri od njih nisu vrhovi pravokutnika sa stranicama paralelnim danim recima i stupcima.



6. (10) Neka je $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Izračunaj

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^k + \ldots + z^{2010}.$$

7. (10) Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

8. (10) Odredi sve cijele brojeve x za koje je $x^2 + 3x + 24$ kvadrat nekoga cijeloga broja.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

4. veljače 2010.

1. (4) Odredi sve $x \in [0, 2\pi]$ za koje su $3\sin x$ i $\frac{4}{7}\cos(2x) + \frac{5}{3}\sin x$ cijeli brojevi.

2. (4) *Legoplus* je tijelo koje se sastoji od sedam jednakih kocki spojenih tako da postoji kocka koja ima zajedničku stranu sa svakom od preostalih šest kocki.

   Svaku stranu legoplusa treba obojati jednom bojom. Koliko je minimalno boja potrebno da bi se to moglo napraviti tako da nikoje dvije susjedne strane ne budu obojane istom bojom?

3. (4) Riješi u skupu realnih brojeva jednadžbu

$$2^{\sin^2 x} = \sin x.$$

4. (4) Dokaži da jednadžba $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 202$ nema cjelobrojnih rješenja.

5. (4) Dan je valjak visine 10 cm. Na obodima njegovih osnovki označene su točke A i B takve da je $\overline{AB}$ paralelno s osi valjka. Spojimo li točke A i B najkraćom linijom koja jednom obilazi oko valjka (po plaštu), njena duljina će biti 15 cm. Kolika je duljina najkraće linije koja dvaput obilazi oko valjka i spaja točke A i B ?

6. (10) Dokaži da suma kotangensa kutova trokuta ne može biti jednaka nuli.

7. (10) Nađi sve dvoznamenkaste prirodne brojeve a za koje jednadžba

$$2^{x+y} = 2^x + 2^y + a$$

   ima rješenje (x, y) u prirodnim brojevima.

8. (10) Zadan je pravokutni trapez kome se može upisati kružnica. Ako udaljenosti središta upisane kružnice od krajeva duljeg kraka iznose 15 cm i 20 cm, kolika je površina trapeza?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

4. veljače 2010.

1. (4) Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

2. (4) Dana je elipsa čija je jednadžba $x^2 + 4y^2 = 36$. Kružnica k ima središte u točki $(0, 3)$ i prolazi žarištima dane elipse. Odredi sva sjecišta kružnice k s elipsom.

3. (4) Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $(\text{ABCDE2010})_{15}$ brojem 7 ?

Brojevi se u bazi 15 *pišu pomoću znamenaka* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E *čije su vrijednosti redom* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

4. (4) Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takvih da vrijedi $m^5 + n^2 = 1700$.

5. (4) Stazu pravokutnog oblika širine 1.5 m i duljine 20 m treba popločati jednakim pločama oblika jednakokračnog pravokutnog trokuta s katetama duljine 50 cm, tako da katete budu paralelne stranicama tog pravokutnika. Odredi broj načina na koji je to moguće napraviti.

6. (10) Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{4z} \right|,$$

pri čemu je z kompleksan broj različit od nule.

7. (10) U pravokutnom trokutu težišnica i simetrala pravog kuta dijele hipotenuzu na tri dijela čije duljine, u nekom poretku, čine aritmetički niz. Odredi sve moguće omjere duljina kateta tog trokuta.

Tri broja čine aritmetički niz *ako je suma najmanjeg i najvećeg jednaka dvostrukom srednjem broju.*

8. (10) Unutar kvadrata stranice duljine 10 nalazi se šest različitih točaka raspoređenih tako da je udaljenost između svake dvije od njih cjelobrojna. Dokaži da među tim udaljenostima postoje dvije jednake.