## ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**1. razred – srednja škola – A varijanta**

**4. veljače 2010.**

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**Zadatak A-1.1.** (4 boda)

Neka je $n$ prirodni broj i $a \neq 0$ realni broj. Potpuno skrati razlomak

$$\frac{a^{3n+1}-a^4}{a^{2n+3}+a^{n+4}+a^5}.$$

***Rješenje.***

$$\frac{a^{3n+1}-a^4}{a^{2n+3}+a^{n+4}+a^5} = \frac{a(a^{3n}-a^3)}{a^3(a^{2n}+a^{n+1}+a^2)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$= \frac{a(a^n-a)(a^{2n}+a^{n+1}+a^2)}{a^3(a^{2n}+a^{n+1}+a^2)} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{a(a^n-a)}{a^3} = \frac{a^{n-1}-1}{a}. \qquad \text{(1 bod)}$$

***Napomena.*** Konačno rješenje može se zapisati i u obliku $a^{n-2}-a^{-1}$.

**Zadatak A-1.2.** (4 boda)

Odredi prirodni broj čiji je 9-erokratnik između 1100 i 1200, a 13-erokratnik između 1500 i 1600.

*Za prirodni broj $n$,* $n$-terokratnik *nekog broja je broj koji je $n$ puta veći od tog broja.*

***Rješenje.***

Neka je $n$ traženi broj. Uvjeti zadatka se mogu napisati kao dvije nejednakosti:

$$1100 < 9n < 1200, \quad 1500 < 13n < 1600. \qquad \text{(1 bod)}$$

Dijeljenjem prve nejednakosti s 9, a druge s 13 dobivamo:

$$\frac{1100}{9} < n < \frac{1200}{9}, \quad \frac{1500}{13} < n < \frac{1600}{13}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Budući da je $n$ prirodni broj imamo: $122 < n \leqslant 133, \quad 115 < n \leqslant 123.$ (1 bod)

Jedini broj koji zadovoljava obje nejednakosti je $n = 123$. (1 bod)

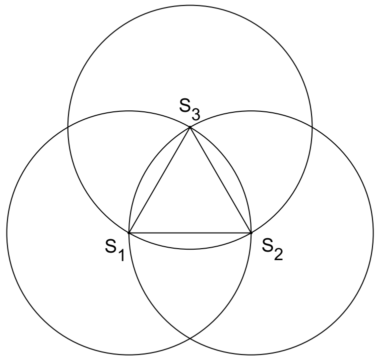
***Napomene.*** Treba priznati i ako su zadani uvjeti shvaćeni kao $1100 \leqslant 9n \leqslant 1200$, $1500 \leqslant 13n \leqslant 1600$ i sl. Pogođeno rješenje (bez obrazloženja) nosi **1 bod**.

**Zadatak A-1.3.** (4 boda)

Tri kružnice polumjera 2 cm nalaze se u ravnini tako da središte svake od njih leži na sjecištu drugih dviju kružnica. Odredi površinu presjeka svih triju krugova određenih tim kružnicama.

***Rješenje.***

Presjek krugova sastoji se od jednakostraničnog trokuta $S_1S_2S_3$ stranice duljine 2 i tri sukladna kružna odsječka. (1 bod)




Površina tog jednakostraničnog trokuta iznosi $P_1 = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$. (1 bod)

Površina $P_2$ jednog odsječka jednaka je površini kružnog isječka sa središnjim kutom $60°$ umanjenoj za površinu trokuta $S_1S_2S_3$. Budući da kružni isječak ima pripadni kut od $60°$, njegova površina je jednaka šestini površine kruga radijusa 2.

Dakle, $P_2 = \frac{1}{6} \cdot 2^2\pi - \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$. (1 bod)

Konačno, $P = P_1 + 3P_2 = \sqrt{3} + 3(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}) = 2(\pi - \sqrt{3})\,\text{cm}^2$. (1 bod)

**Zadatak A-1.4.** (4 boda)

Ako nekom broju obrišemo znamenku jedinica, dobit ćemo broj koji je za 2010 manji od polaznog broja. Koji je polazni broj?

***Rješenje.***

Neka je $x$ broj koji smo dobili nakon brisanja zadnje znamenke, a $n$ obrisana znamenka. Vrijedi

$$10x + n = x + 2010,$$ (1 bod)

odnosno

$$9x = 2010 - n.$$ (1 bod)

Budući da je $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ možemo provjeriti sve mogućnosti za $n$ pa izravnim uvrštavanjem dobijemo da je $x$ prirodni broj samo za $n = 3$. (1 bod)

Odatle slijedi $x = 223$ pa je traženi broj 2233. (1 bod)

***Napomena.*** Do rješenja jednadžbe $9x = 2010 - n$ može se doći i promatranjem ostataka pri dijeljenju brojem 9.

**Zadatak A-1.5.** (4 boda)

U vreći se nalazi dovoljno velik broj crvenih, bijelih i plavih kuglica. Svaki učenik uzima nasumce iz vreće po tri kuglice. Koliko najmanje mora biti učenika da bismo bili sigurni da neka dvojica od njih imaju istu kombinaciju kuglica, tj. jednak broj kuglica svake boje?

***Rješenje.***

Označimo crvenu kuglicu slovom $C$, bijelu kuglicu slovom $B$, te plavu kuglicu slovom $P$.

Moguće kombinacije tri kuglice su:

$$CCC,\ BBB,\ PPP,\ CBB,\ CPP,\ BCC,\ BPP,\ PCC,\ PBB,\ CBP.$$

Ukupno ima 10 mogućih kombinacija. (2 boda)

Da bi postojala dva učenika s istom kombinacijom, dovoljno je da ukupno bude barem 11 učenika. (2 boda)

***Napomena.*** Zaključak da je za $k$ kombinacija potrebno $k+1$ učenika vrijedi 2 boda.

**Zadatak A-1.6.** (10 bodova)

Ako je $a^2 + 2b^2 = 3c^2$, pokaži da je $\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b-c}{b-a}\right) \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c}$ prirodni broj.

***Rješenje.***

U rješenjima ćemo sa $(*)$ označiti korištenje uvjeta zadatka u obliku $2b^2 = 3c^2 - a^2$, odnosno $2b^2 - 3c^2 = -a^2$.

***Prvo rješenje.***

Sredimo prvo izraz u zagradama:

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b-c}{b-a} = \frac{(a+b)(b-a)+(b-c)(b+c)}{(b+c)(b-a)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$= \frac{b^2-a^2+b^2-c^2}{(b+c)(b-a)} \overset{(*)}{=} \frac{3c^2-a^2-a^2-c^2}{(b+c)(b-a)} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{2c^2-2a^2}{(b+c)(b-a)} = \frac{2(c-a)(c+a)}{(b+c)(b-a)}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Odavde slijedi

$$\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b-c}{b-a}\right) \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c} = \frac{2(c-a)(c+a)}{(b+c)(b-a)} \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c}$$

$$= \frac{2(c-a)(a+2b+3c)}{(b+c)(b-a)} = 2 \cdot \frac{ac+2bc+3c^2-a^2-2ab-3ac}{(b+c)(b-a)} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\overset{(*)}{=} 2 \cdot \frac{ac+2bc+2b^2-2ab-3ac}{b^2-ab+bc-ac} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= 2 \cdot \frac{2(-ac+bc+b^2-ab)}{b^2-ab+bc-ac} = 4. \qquad \text{(2 boda)}$$

***Drugo rješenje.***

Uočimo da iz danog uvjeta slijedi $b^2 - a^2 = 3(b^2 - c^2)$, odnosno

$$\frac{a+b}{b+c} = 3 \cdot \frac{b-c}{b-a}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Stoga je $\dfrac{a+b}{b+c} + \dfrac{b-c}{b-a} = 3 \cdot \dfrac{b-c}{b-a} + \dfrac{b-c}{b-a} = 4 \cdot \dfrac{b-c}{b-a}$. (2 boda)

Sada računamo

$$\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b-c}{b-a}\right) \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c} = 4 \cdot \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c}$$

$$= 4 \cdot \frac{ab + 2b^2 + 3bc - ac - 2bc - 3c^2}{(b-a)(a+c)} \overset{(*)}{=} 4 \cdot \frac{ab - a^2 - ac + bc}{(b-a)(a+c)} \qquad \text{(3 boda)}$$

$$= 4 \cdot \frac{(b-a)(a+c)}{(b-a)(a+c)} = 4. \qquad \text{(2 boda)}$$

**Zadatak A-1.7.** (10 bodova)

Pravokutni trokut $ABC$ s katetama duljina $15\,\text{cm}$ i $20\,\text{cm}$ i pravim kutom u vrhu $B$ sukladan je trokutu $BDE$ s pravim kutom u vrhu $D$. Točka $C$ leži unutar dužine $\overline{BD}$, a točke $A$ i $E$ nalaze se s iste strane pravca $BD$.

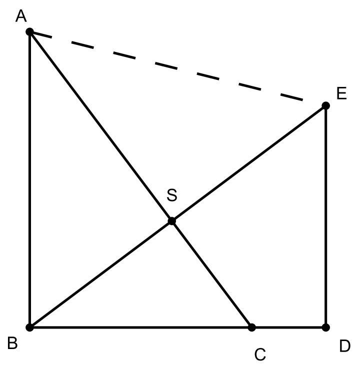
a) Odredi udaljenost točaka $A$ i $E$.

b) Izračunaj površinu presjeka trokuta $ABC$ i $BDE$.

***Prvo rješenje.***

Vrijedi $|AB| = |BD| = 20$, $|BC| = |DE| = 15$ pa su duljine hipotenuza danih pravokutnih trokuta $|AC| = |BE| = 25$. (1 bod)

Neka je $S$ sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$ i neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$.



Tada je $\sphericalangle EBD = \alpha$ pa je

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle EBD = 90^\circ - \alpha.$$

Zato je $\sphericalangle ASB = 90^\circ$, tj. $AC \perp BE$. (1 bod)

U ovom rješenju koristimo Pitagorin poučak.

Označimo $|AS| = x$, $|CS| = y$ i $|BS| = v$.

Vrijedi $x + y = 25$.

Osim toga, iz pravokutnih trokuta $ABS$ i $BCS$ dobivamo

$$x^2 + v^2 = 20^2, \qquad y^2 + v^2 = 15^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Oduzimanjem slijedi: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 400 - 225 = 175$,

pa vrijedi: $x - y = 175/25 = 7$.

Sada slijedi $x = 16$, $y = 9$. (1 bod)

Zato je $v = 12$. (1 bod)

Sada možemo odgovoriti na oba pitanja.

a) Udaljenost $|AE|$ ćemo dobiti iz prakokutnog trokuta $ASE$. Znamo $|AS| = 16$ i $|SE| = |BE| - |BS| = 25 - 12 = 13$. (1 bod)
   Dakle, $|AE| = \sqrt{16^2 + 13^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}\,\text{cm}$. (2 boda)

b) Površina trokuta $BSC$ iznosi $P = \frac{1}{2}|BS| \cdot |SC| = 54\,\text{cm}^2$. (2 boda)

***Varijacije prvog rješenja.***

Za određivanje duljina $x$, $y$ i $v$ mogu poslužiti Euklidov poučak ili sličnost. U svakom slučaju se točan izračun tih duljina boduje s 3 boda.

**Euklidov poučak.**

Vrijedi

$$x = |AS| = \frac{|AB|^2}{|AC|} = \frac{20^2}{25} = 16, \qquad y = |CS| = \frac{|BC|^2}{|AC|} = \frac{15^2}{25} = 9, \qquad \text{(2 boda)}$$

te konačno $v = \sqrt{xy} = 12$. (1 bod)

**Sličnost trokuta.**

Trokuti $ABC$ i $BSC$ su slični jer imaju jednake kutove (1 bod)

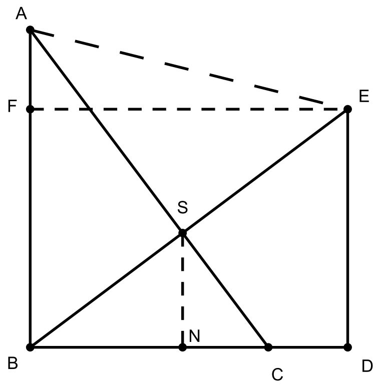
pa je $|BS| : |BC| = |AB| : |AC|$.

Slijedi $v = |BS| = \dfrac{|AB| \cdot |BC|}{|AC|} = 12$, (1 bod)

$y = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, $x = 25 - 9 = 16$. (1 bod)

***Drugo rješenje.***

Vrijedi $|AB| = |BD| = 20$, $|BC| = |DE| = 15$ pa su duljine hipotenuza danih pravokutnih trokuta $|AC| = |BE| = 25$. (1 bod)




a) Označimo na dužini $\overline{AB}$ točku $F$ takvu da je $BDEF$ pravokutnik. Tada je

$$|AE| = \sqrt{|FE|^2 + |AF|^2} = \sqrt{|BD|^2 + |AF|^2} = \sqrt{20^2 + 5^2} = 5\sqrt{17}\,\text{cm}. \quad \text{(3 boda)}$$

b) Neka je $S$ sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$, a $N$ nožište okomice iz $S$ na $\overline{BC}$.

Budući da su pravci $AB$, $SN$ i $ED$ paralelni, prema Talesovom teoremu vrijedi:

$$\frac{|SN|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|BC|} \quad \text{i} \quad \frac{|SN|}{|ED|} = \frac{|BN|}{|BD|} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zbrajanjem jednakosti $|NC| = |SN| \cdot \frac{|BC|}{|AB|}$ i $|BN| = |SN| \cdot \frac{|BD|}{|ED|}$ dobivamo

$$|BC| = |SN| \cdot \left( \frac{|BC|}{|AB|} + \frac{|BD|}{|ED|} \right).$$

U gornjoj jednakosti jedina nepoznata duljina je $|SN|$:

$$15 = |SN| \cdot \left( \frac{15}{20} + \frac{20}{15} \right) = \frac{25}{12}|SN| \quad \Rightarrow \quad |SN| = \frac{15 \cdot 12}{25} = \frac{36}{5}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno, $P(BCS) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |SN| = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{36}{5} = 54\,\text{cm}^2$. (2 boda)

**Zadatak A-1.8.** (10 bodova)

Neka su $p$ i $q$ različiti neparni prosti brojevi. Dokaži da broj $(pq+1)^4-1$ ima barem četiri različita prosta djelitelja.

***Rješenje.***

Dani izraz možemo faktorizirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}(pq+1)^4-1 &= \left[(pq+1)^2-1\right]\left[(pq+1)^2+1\right] \\ &= (pq+1+1)(pq+1-1)\left[(pq+1)^2+1\right] \\ &= pq(pq+2)\left[(pq+1)^2+1\right] \\ &= p\cdot q\cdot(pq+2)\cdot(p^2q^2+2pq+2) \qquad \text{(2 boda)}\end{aligned}$$

Sada vidimo da zadani broj ima proste djelitelje $p$ i $q$ te još dva neparna faktora $pq+2$ i $p^2q^2+2pq+2$. (1 bod)

Pretpostavimo da je $pq+2$ djeljiv s $p$. Tada bi, jer je $pq$ djeljiv s $p$, bilo 2 djeljivo s $p$ što je nemoguće. Prema tome, $p$ nije djelitelj broja $pq+2$. Slično se vidi da $q$ nije djelitelj broja $pq+2$ te da ni $p$ ni $q$ nisu djelitelji broja $p^2q^2+2pq+2$. (2 boda)

Treba još pokazati da $pq+2$ i $p^2q^2+2pq+2$ imaju barem dva različita prosta djelitelja. Pokazat ćemo zapravo da brojevi $pq+2$ i $p^2q^2+2pq+2$ nemaju zajedničkog djelitelja različitog od 1, tj. da su relativno prosti.

Pretpostavimo da je $k$ neki zajednički prosti djelitelj brojeva $pq+2$ i $p^2q^2+2pq+2 = pq(pq+1)+pq+2$. Tada je $k$ djelitelj od $(p^2q^2+2pq+2)-(pq+2) = pq(pq+1)$. Budući da su $p$ i $q$ prosti i različiti od $k$, mora vrijediti da je $k$ djelitelj od $pq+1$. (2 boda)

Međutim, ako je $pq+1$ višekratnik broja $k$, tada $pq+1+1$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s $k$, što je nemoguće budući da je $pq+2$ djeljivo s $k$. Prema tome, naša pretpostavka je kriva i niti jedan djelitelj od $pq+2$ nije djelitelj od $p^2q^2+2pq+2$. (1 bod)

Stoga zaključujemo da svaki od brojeva $pq+2$ i $p^2q^2+2pq+2$ ima barem jedan neparni prosti faktor različit od $p$ i $q$, i ta dva faktora su različita, pa ukupno imamo barem četiri različita neparna prosta faktora. (2 boda)

***Napomena.*** Činjenicu da su $pq+2$ i $p^2q^2+2pq+2$ relativno prosti brojevi možemo dokazati koristeći pravilo za računanje najvećeg zajedničkog djelitelja:

$$\mathrm{NZD}(a,b) = \mathrm{NZD}(a, b-ka), \qquad \forall a,b,k\in\mathbb{N}.$$

Budući da je $p^2q^2+2pq+2 = pq(pq+2)+2$, a $p$ i $q$ neparni brojevi slijedi

$$\mathrm{NZD}(pq+2, p^2q^2+2pq+2) = \mathrm{NZD}(pq+2, 2) = \mathrm{NZD}(pq, 2) = 1.$$

Na sličan način se može dokazati da je svaki od brojeva $p$ i $q$ relativno prost s brojevima $pq+2$ i $p^2q^2+2pq+2$.

## ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**2. razred – srednja škola – A varijanta**

**4. veljače 2010.**

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**Zadatak A-2.1.** (4 boda)

Odredi zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 2010.

***Prvo rješenje.***

Broj 2010 možemo faktorizirati kao $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ pa su svi pozitivni djelitelji broja 2010:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30,\ 67,\ 134,\ 201,\ 335,\ 402,\ 670,\ 1005,\ 2010. \qquad \text{(3 boda)}$$

Njihov zbroj iznosi 4896. (1 bod)

***Drugo rješenje.***

Svaki prirodni broj možemo prikazati kao umnožak potencija različitih prostih faktora

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$

Prema poznatoj formuli, zbroj (pozitivnih) djelitelja broja $n$ tada iznosi:

$$(1 + p_1 + \cdots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + \cdots + p_2^{a_2}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{a_k}). \qquad \text{(2 boda)}$$

Dakle, za $n = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ suma djelitelja iznosi

$$(1 + 2)(1 + 3)(1 + 5)(1 + 67) = 4896. \qquad \text{(2 boda)}$$

**Zadatak A-2.2.** (4 boda)

Dane su dvije kvadratne jednadžbe

$$x^2 + ax + 1 = 0, \qquad x^2 + x + a = 0.$$

Odredi sve vrijednosti parametra $a$ za koje te jednadžbe imaju barem jedno zajedničko rješenje.

***Rješenje.***

Oduzmemo li od prve jednadžbe drugu, dobivamo

$$(a-1)x + 1 - a = 0 \quad , \text{ tj.} \quad (a-1)(x-1) = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

U slučaju kada je $a = 1$, uvjet zadatka je očito zadovoljen jer se prva i druga jednadžba podudaraju. (1 bod)

Ako je $a \neq 1$, mora biti $x = 1$ pa uvrštavanjem u početne jednadžbe dobivamo da $a = -2$ također zadovoljava uvjete zadatka. (2 boda)

Dakle, jednadžbe iz zadatka imaju barem jedno zajedničko rješenje za $a = -2$ i $a = 1$.

***Napomena.*** Ukoliko učenik napiše jedno ili oba rješenja bez valjanog obrazloženja da nema drugih rješenja treba dobiti po 1 bod za svako rješenje.

**Zadatak A-2.3.** (4 boda)

Žicom duljine 10 km treba ograditi pravokutno zemljište koje s jedne strane ima ravni zid (žicu je potrebno koristiti za preostale tri stranice), tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?

***Rješenje.***

Označimo s $x$ i $y$ duljine stranica ograđenog pravokutnika. Vrijedi $2x + y = 10$ (pri čemu smo s $y$ označili duljinu stranice paralelne sa zidom). Površina zemljišta iznosi

$$P = xy = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Treba naći maksimalnu vrijednost površine u ovisnosti o $x$. S obzirom da je $P$ kvadratna funkcija varijable $x$,

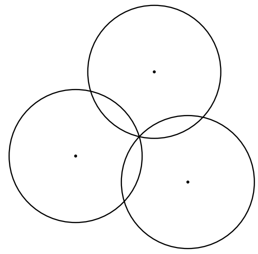
$$P(x) = 10x - 2x^2 = \frac{25}{2} - 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}, \qquad \text{(2 boda)}$$

što znači da maksimalna površina koju je moguće ograditi iznosi $12.5\,\mathrm{km}^2$. (1 bod)

***Napomena.*** Površina je maksimalna kada je $x = 2.5$ i $y = 5$.

**Zadatak A-2.4.** (4 boda)

Tri kruga polumjera 1 cm imaju točno jednu zajedničku točku, a njihova središta vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Odredi površinu skupa svih točaka koje pripadaju dvama od tih krugova.

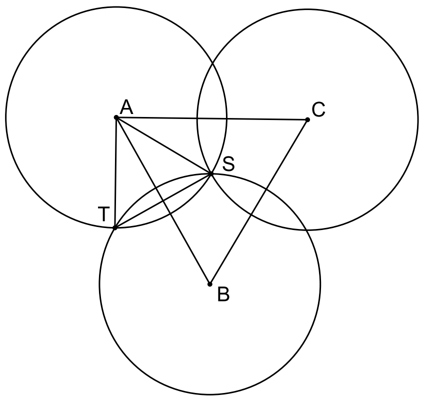


***Rješenje.***

Neka je $ABC$ trokut kojeg tvore središta danih krugova, a $S$ njihova zajednička točka. To je ujedno središte jednakostraničnog trokuta $ABC$.

Vrijedi $|SA| = |SB| = |SC| = 1$.

Neka je $T$ drugo sjecište kružnica polumjera 1 sa središtima $A$ i $B$.




Kako je $AB$ simetrala dužine $\overline{ST}$, vrijedi $\sphericalangle SAT = 2\sphericalangle SAB = 60°$ pa zaključujemo da je trokut $AST$ jednakostraničan stranice duljine 1. (1 bod)

Tražena površina jednaka je trostrukoj površini presjeka dvaju krugova, odnosno šesterostrukoj površini kružnog odsječka koji se nalazi između tetive $\overline{ST}$ i kružnice sa središtem u točki $A$. (1 bod)

Površina tog odsječka jednaka je razlici površine kružnog isječka $AST$ i površine jednakostraničnog trokuta $AST$, tj.

$$P(\text{odsječka}) = P(\text{isječka}) - P(\text{trokuta}) = \frac{1}{6} \cdot 1^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \text{(1 bod)}$$

Tražena površina je $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm$^2$. (1 bod)

***Napomena.*** Učenik koji ne pokaže da je trokut $AST$ jednakostraničan, ali to koristi i dobije točan rezultat treba dobiti 3 boda.

**Zadatak A-2.5.** (4 boda)

Dvadeset i četiri točke raspoređene su u šest stupaca i četiri retka, kao na slici. Pokaži da se od danih točaka može odabrati njih točno dvanaest tako da nikoje četiri od njih nisu vrhovi pravokutnika sa stranicama paralelnim danim recima i stupcima.

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

***Rješenje.***

Jedan mogući izbor točaka prikazan je na slici:

$$\begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot & \times & \times & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot & \times & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \times & \cdot & \times & \times \end{array}$$

(4 boda)

Izabrane su sljedeće točke (prva koordinata označava redak, a druga stupac):

$$(1,1),(2,1), \quad (1,2),(3,2), \quad (1,3),(4,3), \quad (2,4),(3,4), \quad (2,5),(4,5), \quad (3,6),(4,6).$$

***Napomena.*** Ovaj odabir točaka nije jedinstven, ali u svakom ispravnom rješenju moraju biti odabrane točno dvije točke u svakom stupcu i točno tri točke u svakom retku.

Ako učenik ne konstruira ispravan primjer može mu se dodijeliti 2 boda *isključivo* u slučaju da je zapisao tvrdnju da u jednom retku ne mogu biti četiri označene točke ili tvrdnju da u jednom stupcu ne mogu biti tri označene točke. U svim ostalim slučajevima dodjeljuje mu se 0 bodova.

**Zadatak A-2.6.** (10 bodova)

Neka je $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Izračunaj

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^k + \ldots + z^{2010}.$$

***Rješenje.***

Izračunamo: $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z^3 = -1$, $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z^6 = 1$. (5 bodova)

Zbrajanjem dobivamo $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$. (1 bod)

Kako je 2010 djeljivo sa 6, imamo

$$\begin{aligned} & z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^k + \ldots + z^{2010} \\ & = (z + z^2 + \cdots + z^6) + z^6(z + z^2 + \cdots + z^6) + \cdots + z^{2004}(z + z^2 + \cdots + z^6) \\ & = (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)(1 + z^6 + z^{12} + z^{18} + \cdots + z^{2004}) = 0 \end{aligned}$$

(4 boda)

***Napomena.*** Koristeći formulu za sumu geometrijskog niza odmah dobivamo:

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^k + \ldots + z^{2010} = z \cdot \frac{z^{2010} - 1}{z - 1} = z \cdot \frac{(z^3)^{670} - 1}{z - 1} = 0,$$

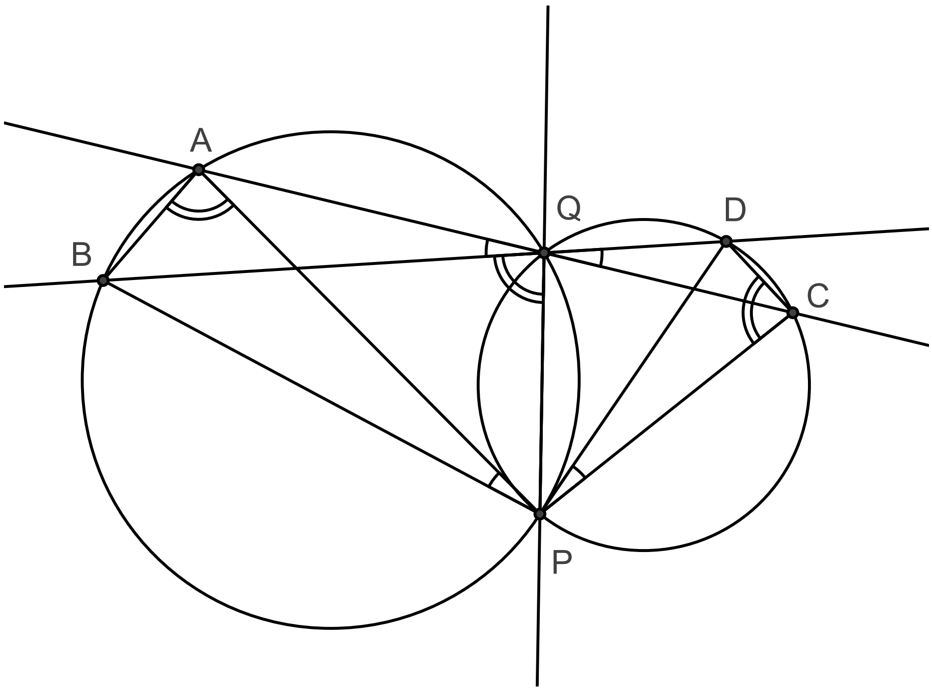
zbog činjenice da je $z^3 = -1$. Takvo rješenje također treba bodovati sa svih 10 bodova.

**Zadatak A-2.7.** (10 bodova)

Dvije kružnice sijeku se u točkama $P$ i $Q$. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku $Q$ sijeku prvu kružnicu u točkama $A$ i $B$, a drugu kružnicu u točkama $C$ i $D$, dokaži da su trokuti $PAB$ i $PCD$ slični.

***Rješenje.***

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se na jednom pravcu nalaze točke $A$, $Q$ i $C$, a na drugom $B$, $Q$ i $D$.




Da bi trokuti $PAB$ i $PCD$ bili slični dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ i $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DCP$.

Vrijedi $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{AB}$). (1 bod)

Zatim, $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$ (vršni kutovi).

Sada je $\sphericalangle CQD = \sphericalangle CPD$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{CD}$)
odakle dobivamo $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$. (3 boda)

Imamo $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BQP$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{BP}$). (1 bod)

$\sphericalangle DQP = 180° - \sphericalangle BQP$ (sukuti),

a kako je $\sphericalangle DQP = 180° - \sphericalangle DCP$
(nasuprotni kutovi u tetivnom četverokutu $CDQP$), (3 boda)

konačno slijedi $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DCP$. (2 boda)

***Napomena.*** Tražena sličnost može se dokazati i tako da se dokaže jednakost kutova $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DCP$ i $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CDP$, pri čemu je dovoljno dokazati jednu od te dvije jednakosti i naglasiti da se druga dokazuje analogno.

**Zadatak A-2.8.** (10 bodova)

Odredi sve cijele brojeve $x$ za koje je $x^2 + 3x + 24$ kvadrat nekoga cijeloga broja.

***Prvo rješenje.***

Mora biti $x^2 + 3x + 24 = y^2$, za neki $y \in \mathbb{N}_0$, odnosno mora vrijediti jednakost $x^2 + 3x + 24 - y^2 = 0$. (1 bod)

Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe po $x$ je $D = 9 - 4(24 - y^2) = 4y^2 - 87$. (1 bod)

Da bi $x$ bio cijeli broj, mora vrijediti $4y^2 - 87 = a^2$ za neki $a \in \mathbb{N}_0$. Dakle, imamo $4y^2 - a^2 = 87$, odnosno $(2y - a)(2y + a) = 87$. (2 boda)

Rastav broja 87 na proste faktore je $87 = 3 \cdot 29$. Kako je $2y + a \geqslant 0$, oba faktora su pozitivna i uz to je $2y - a < 2y + a$. (1 bod)

Zato imamo dvije mogućnosti:

$2y - a = 1$, $2y + a = 87$, odnosno $2y - a = 3$, $2y + a = 29$ (1 bod)

U prvom slučaju je $y = 22$, $a = 43$

pa traženi brojevi zadovoljavaju kvadratnu jednadžbu $x^2 + 3x - 460 = 0$,

čija su rješenja $x = 20$ i $x = -23$. (2 boda)

U drugom slučaju $y = 8$, $a = 13$

pa traženi brojevi zadovoljavaju kvadratnu jednadžbu $x^2 + 3x - 40 = 0$

čija su rješenja 5 i $-8$. (2 boda)

Dakle, sve moguća cjelobrojna rješenja su $-23$, $-8$, 5 i 20.

***Drugo rješenje.***

Imamo $x^2 + 3x + 24 = y^2$ za neki cijeli broj $y$. Pomnožimo li jednadžbu s 4 dobivamo $4x^2 + 12x + 96 = 4y^2$, tj. $(2x + 3)^2 + 87 = 4y^2$. (3 boda)

Prebacimo li $(2x + 3)^2$ na desnu stranu i primjenimo razliku kvadrata dobivamo

$$87 = (2y + 2x + 3)(2y - 2x - 3). \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je rastav broja 87 na proste faktore $87 = 3 \cdot 29$ imamo osam slučajeva:

$$\begin{array}{llcll}
2y + 2x + 3 = 1, & 2y - 2x - 3 = 87 & \Rightarrow & x = -23, & y = 22, \\
2y + 2x + 3 = 87, & 2y - 2x - 3 = 1 & \Rightarrow & x = 20, & y = 22, \\
2y + 2x + 3 = 3, & 2y - 2x - 3 = 29 & \Rightarrow & x = -8, & y = 8, \\
2y + 2x + 3 = 29, & 2y - 2x - 3 = 3 & \Rightarrow & x = 5, & y = 8, \\
2y + 2x + 3 = -1, & 2y - 2x - 3 = -87 & \Rightarrow & x = 20, & y = -22, \\
2y + 2x + 3 = -87, & 2y - 2x - 3 = -1 & \Rightarrow & x = -23, & y = -22, \\
2y + 2x + 3 = -3, & 2y - 2x - 3 = -29 & \Rightarrow & x = 5, & y = -8, \\
2y + 2x + 3 = -29, & 2y - 2x - 3 = -3 & \Rightarrow & x = -8, & y = -8.
\end{array}$$
(6 bodova)

Opet dobivamo da su jedina rješenja $x \in \{-23, -8, 5, 20\}$.

***Treće rješenje.***

Primjetimo da je za $x \geqslant 0$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 < x^2 + 3x + 24 < x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \qquad \text{(3 boda)}$$

pa razlikujemo tri slučaja:

*1. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = (x+2)^2 \Rightarrow x = 20$,

*2. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = (x+3)^2 \Rightarrow x = 5$,

*3. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = (x+4)^2 \Rightarrow 5x = 8,\ x \notin \mathbb{Z}$. (2 boda)

Za $x < 0$ imamo

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 < x^2 + 3x + 24 < x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2, \qquad \text{(3 boda)}$$

pa razlikujemo pet slučajeva:

*1. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = (x+1)^2 \Rightarrow x = -23$,

*2. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = x^2 \Rightarrow x = -8$,

*3. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = (x-1)^2 \Rightarrow 5x = -23,\ x \notin \mathbb{Z}$,

*4. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = (x-2)^2 \Rightarrow 7x = -20,\ x \notin \mathbb{Z}$,

*5. slučaj:* $x^2 + 3x + 24 = (x-3)^2 \Rightarrow 9x = -15,\ x \notin \mathbb{Z}$. (2 boda)

Dakle, jedina rješenja su $x \in \{-23, -8, 5, 20\}$.

***Napomena.*** Ako učenik pogodi, tj. navede bez odgovarajućeg postupka, sva četiri rješenja dodijeliti 2 boda.

## ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**3. razred – srednja škola – A varijanta**

**4. veljače 2010.**

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**Zadatak A-3.1.** (4 boda)

Odredi sve $x \in [0, 2\pi]$ za koje su $3\sin x$ i $\frac{4}{7}\cos(2x) + \frac{5}{3}\sin x$ cijeli brojevi.

***Rješenje.***

Neka je $n = 3\sin x \in \mathbb{Z}$. Tada je $-3 \leqslant n \leqslant 3$, pa je $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. (1 bod)

Izraz $\frac{4}{7}\cos(2x) + \frac{5}{3}\sin x$ tada je jednak:

$$\begin{aligned}\frac{4}{7}(\cos^2 x - \sin^2 x) + \frac{5}{3}\sin x &= \frac{4}{7}(1 - 2\sin^2 x) + \frac{5}{3}\sin x \\ &= \frac{4}{7}(1 - 2 \cdot \frac{n^2}{9}) + \frac{5}{3} \cdot \frac{n}{3} = \frac{-8n^2 + 35n + 36}{63}.\end{aligned}$$ (1 bod)

Uvrštavanjem brojeva iz skupa $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ u posljednji izraz dobivamo da je on cijeli broj samo za $n = 1$. (1 bod)

Iz toga zaključujemo da uvjete zadatka zadovoljavaju svi realni brojevi $x$ za koje je $3\sin x = 1$, odnosno $\sin x = \frac{1}{3}$ pa u zadanom intervalu $[0, 2\pi]$ imamo dva rješenja: $x_1 = \arcsin\frac{1}{3}$ i $x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{3}$. (1 bod)

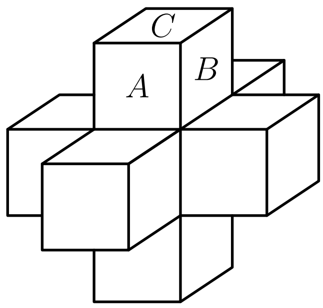
## Zadatak A-3.2. (4 boda)

*Legoplus* je tijelo koje se sastoji od sedam jednakih kocki spojenih tako da postoji kocka koja ima zajedničku stranu sa svakom od preostalih šest kocki.

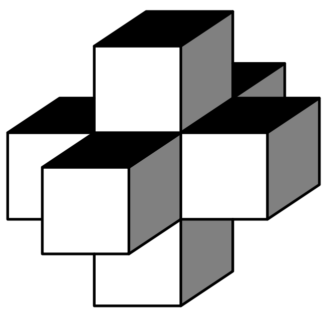
Svaku stranu legoplusa treba obojati jednom bojom. Koliko je minimalno boja potrebno da bi se to moglo napraviti tako da nikoje dvije susjedne strane ne budu obojane istom bojom?

***Rješenje.***

Očito postoje tri strane legoplusa za koje vrijedi da su svake dvije susjedne. Na primjer, takve su strane koje su označene slovima $A$, $B$ i $C$ na donjoj slici. Iz toga zaključujemo da su potrebne barem tri boje da bismo obojali legoplus na traženi način. (2 boda)




Obojamo li stranu $A$ i sve strane koje su paralelne s njom bijelom bojom, stranu $B$ i sve strane koje su paralelne s njom sivom bojom te stranu $C$ i sve strane koje su paralelne s njom crnom bojom, dobit ćemo bojanje s tri boje koje zadovoljava uvjete zadatka. To bojanje je dano na donjoj slici.



Dakle, najmanji broj boja koji je potreban da bismo obojali vanjske strane legoplusa tako da nikoje dvije susjedne strane ne budu obojane istom bojom je tri. (2 boda)

**Zadatak A-3.3.** (4 boda)

Riješi u skupu realnih brojeva jednadžbu

$$2^{\sin^2 x} = \sin x.$$

***Rješenje.***

Kako je $2^{\sin^2 x} > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ to za desnu stranu zadane jednadžbe mora vrijediti $0 < \sin x \leqslant 1$. (1 bod)

Očito $\sin x = 1$ ne zadovoljava jednadžbu jer $2^1 = 2 \neq 1$. (1 bod)

Dakle, vrijedi: $0 < \sin x < 1$, pa je $0 < \sin^2 x < 1$, a odavde je $2^0 < 2^{\sin^2 x} < 2$. (1 bod)

Stoga lijeva i desna strana jednadžbe ne mogu biti jednake jer je lijeva veća od 1, dok je desna manja od 1 pa jednadžba nema rješenja. (1 bod)

**Zadatak A-3.4.** (4 boda)

Dokaži da jednadžba $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 202$ nema cjelobrojnih rješenja.

***Prvo rješenje.***

Jednadžbu možemo pisati ovako:

$$(x+y)^2 - z^2 = 202, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$(x+y-z)(x+y+z) = 202. \qquad \text{(1 bod)}$$

Brojevi $(x+y-z)$ i $(x+y+z)$ su iste parnosti (jer im je suma $(x+y-z)+(x+y+z) = 2(x+y)$ paran broj). Kako je umnožak ta dva broja paran broj, onda svaki od njih također mora biti paran. To znači da je lijeva strana zadane jednadžbe djeljiva s 4, dok desna strana očito nije, pa zaključujemo da jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. (2 boda)

***Drugo rješenje.***

Zapišimo jednadžbu u obliku

$$(x+y)^2 - z^2 = 202. \qquad \text{(1 bod)}$$

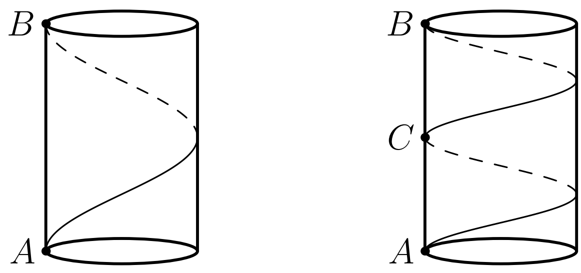
Budući da kvadrat nekog cijelog broja može davati ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 4 zaključujemo da lijeva strana te jednadžbe daje ostatak 0, 1 ili $-1$ (odnosno 3) pri dijeljenju s 4. (1 bod)

S druge strane, broj 202 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4 pa zaključujemo da zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. (2 boda)

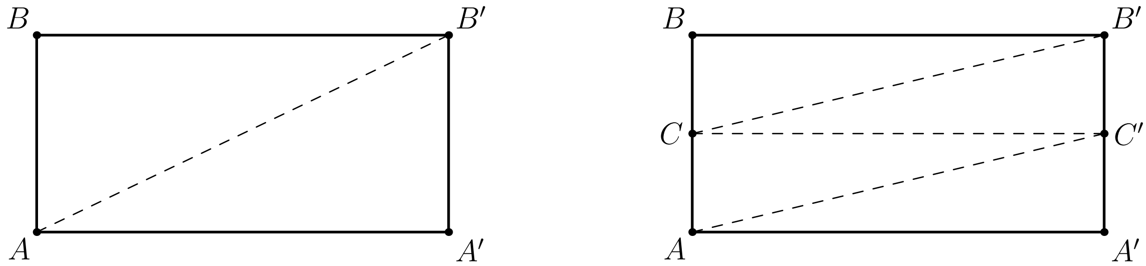
**Zadatak A-3.5.** (4 boda)

Dan je valjak visine $10\,\text{cm}$. Na obodima njegovih osnovki označene su točke $A$ i $B$ takve da je $\overline{AB}$ paralelno s osi valjka. Spojimo li točke $A$ i $B$ najkraćom linijom koja jednom obilazi oko valjka (po plaštu), njena duljina će biti $15\,\text{cm}$. Kolika je duljina najkraće linije koja dvaput obilazi oko valjka i spaja točke $A$ i $B$ ?

***Rješenje.***




Prerežimo plašt valjka duž linije $\overline{AB}$.




Time od plašta valjka dobijemo pravokutnik $AA'B'B$ za kojeg vrijedi $|AB'| = 15\,\text{cm}$. Iz toga zaključujemo da je opseg osnovke valjka (duljina stranice $\overline{AA'}$) jednak

$$|AA'| = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}.$$ (2 boda)

Ako s $d$ označimo duljinu najkraće linije koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke $A$ i $B$, a s $C$ označimo točku presjeka te linije s dužinom $\overline{AB}$, onda vrijedi

$$d = |AC'| + |CB'| = 2|AC'| = 2\sqrt{|AA'|^2 + |A'C'|^2} = 2\sqrt{(5\sqrt{5})^2 + 5^2} = 10\sqrt{6}.$$

Dakle, duljina najkraće linije koja dvaput obilazi oko valjka i spaja točke $A$ i $B$ je jednaka $10\sqrt{6}\,\text{cm}$. (2 boda)

**Zadatak A-3.6.** (10 bodova)

Dokaži da suma kotangensa kutova trokuta ne može biti jednaka nuli.

***Prvo rješenje.***

Pretpostavimo da postoji trokut s veličinama kutova $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ za koji vrijedi:

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = 0.$$

Kako je prema adicijskom teoremu za funkciju kotangens

$$\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg}\left[180^\circ - (\alpha + \beta)\right] = -\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta},$$

množenjem s $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta \neq 0$ i sređivanjem dobivamo

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$ (3 boda)

S obzirom da je

$$\begin{aligned} &(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)^2 \\ &= \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma \\ &+ 2(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha), \end{aligned}$$ (3 boda)

dobivamo da je

$$\begin{aligned} &\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma = \\ &= (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)^2 \\ &- 2(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha) \\ &= 0^2 - 2 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$ (2 boda)

Kako suma kvadrata tri realna broja ne može biti negativna zaključujemo da ne postoji trokut čije veličine kutova zadovoljavaju zadanu jednadžbu. (2 boda)

***Drugo rješenje.***

Koristeći standardne oznake, iz poučka o sinusu i kosinusu imamo:

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R} \quad \text{i} \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

odakle je

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{R}{abc}\left(b^2 + c^2 - a^2\right).$$ (4 boda)

Analogno dobivamo i

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{R}{abc}\left(c^2 + a^2 - b^2\right), \quad \operatorname{ctg} \gamma = \frac{R}{abc}\left(a^2 + b^2 - c^2\right),$$

odakle slijedi

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{R}{abc}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$ (4 boda)

Desna strana prethodne jednakosti je očito pozitivni broj pa zaključujemo da ne postoji trokut kojem je suma kotangensa jednaka nuli. (2 boda)

**Zadatak A-3.7.** (10 bodova)

Nađi sve dvoznamenkaste prirodne brojeve $a$ za koje jednadžba

$$2^{x+y} = 2^x + 2^y + a$$

ima rješenje $(x, y)$ u prirodnim brojevima.

***Prvo rješenje.***

Polaznu jednadžbu transformiramo:

$$(2^x - 1)(2^y - 1) = a + 1. \qquad \text{(3 boda)}$$

Da bi jednadžba imala rješenja, nužno je i dovoljno da je $a + 1$ umnožak faktora oblika $2^x - 1$, gdje je $x$ neki prirodni broj.

S obzirom da $a + 1$ mora biti dvoznamenkast, ti faktori mogu biti isključivo 1, 3, 7, 15, 31 i 63. (3 boda)

Mogućnosti za $a + 1$ su sljedeće:

$$15 = 1 \cdot 15,\ 21 = 3 \cdot 7,\ 31 = 1 \cdot 31,\ 45 = 3 \cdot 15,\ 49 = 7 \cdot 7,\ 63 = 1 \cdot 63,\ 93 = 3 \cdot 31.$$

Moguće vrijednosti za $a$ su, dakle:

$$14,\ 20,\ 30,\ 44,\ 48,\ 62,\ 92. \qquad \text{(4 boda)}$$

***Drugo rješenje.***

Zadanu jednadžbu možemo pisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a &= 2^{x+y} - 2^x - 2^y, \\ a &= 2^{x+y} - 2^x - 2^y + 1 - 1, \\ a &= (2^x - 1)(2^y - 1) - 1. \end{aligned} \qquad \text{(3 boda)}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \leqslant y$.

Razlikujemo nekoliko slučajeva:

*1. slučaj:* $x = 1$

Tada je $a = 2^y - 2$, a kako je $10 \leqslant a \leqslant 99$, mora vrijediti da je $12 \leqslant 2^y \leqslant 101$. Ovo očito zadovoljavaju brojevi $y \in \{4, 5, 6\}$ i uvrštavanjem tih vrijednosti za $y$, dobivamo $a \in \{14, 30, 62\}$. (2 boda)

*2. slučaj:* $x = 2$

U ovom slučaju je $a = 3 \cdot 2^y - 4$. Opet iz uvjeta $10 \leqslant a \leqslant 99$ dobivamo da je $\frac{14}{3} \leqslant 2^y \leqslant \frac{103}{3}$, pa je rješenje $y \in \{3, 4, 5\}$, odnosno $a \in \{20, 44, 92\}$. (2 boda)

*3. slučaj:* $x = 3$

Sada je $a = 7 \cdot 2^y - 8$, pa je $\frac{18}{7} \leqslant 2^y \leqslant \frac{107}{7}$. Rješenja su $y \in \{2, 3\}$, pa uvrštavanjem dobijemo da je $a \in \{20, 48\}$. (2 boda)

*4. slučaj:* $x \geqslant 4$

Zbog pretpostavke $x \leqslant y$ imamo $a = (2^x - 1)(2^y - 1) - 1 \geqslant (2^4 - 1)(2^4 - 1) - 1 = 224$ i zaključujemo da ovaj slučaj nema rješenja. (1 bod)

Uzimanjem unije rješenja sva tri slučaja dobivamo da uvjete zadatka zadovoljavaju brojevi iz skupa $\{14,\ 20,\ 30,\ 44,\ 48,\ 62,\ 92\}$.

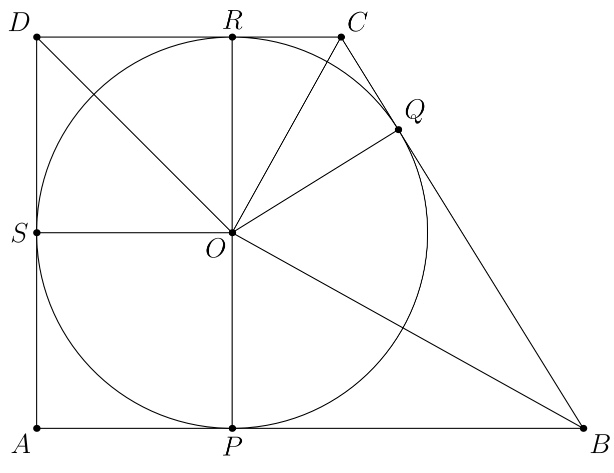
***Napomena.*** Za pogođena rješenja, tj. rješenja bez odgovarajućeg postupka, bodovi se daju na sljedeći način: 3 boda ako su sva rješenja točna, 2 boda za šest točnih rješenja, te 1 bod za tri točna rješenja. Ukoliko je uz točna rješenja navedeno jedno ili više netočnih, ukupno se daje 0 bodova.

**Zadatak A-3.8.** (10 bodova)

Zadan je pravokutni trapez kome se može upisati kružnica. Ako udaljenosti središta upisane kružnice od krajeva duljeg kraka iznose 15 cm i 20 cm, kolika je površina trapeza?

***Rješenje.***

Neka je $ABCD$ promatrani trapez, s tim da je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CDA = 90°$ i $|AB| > |CD|$. Neka je $O$ središte kružnice upisane trapezu, $r$ njen polumjer, a $P$, $Q$, $R$ i $S$ dirališta te kružnice sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ redom.




Tada je $|OB| = 20$, $|OC| = 15$.

Uočimo $|PB| = |BQ|$, $|QC| = |CR|$ i $\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC$, $\sphericalangle BCO = \sphericalangle OCD$.
Trokuti $POB$ i $QOB$ su sukladni, kao i trokuti $CQO$ i $CRO$. (2 boda)

Četverokuti $APOS$ i $SORD$ su kvadrati stranice duljine $r$. (1 bod)

Stoga je

$$
\begin{aligned}
P &= P(APOS) + P(SORD) + P(OPB) + P(OQB) + P(OQC) + P(ORC) \\
&= 2r^2 + 2\left[P(OQB) + P(OQC)\right] \\
&= 2r^2 + 2P(OBC)
\end{aligned}
$$

(2 boda)

Označimo $\alpha = \sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC$.
Tada je $\sphericalangle BCO = \sphericalangle OCD = 90^\circ - \alpha$, jer je $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$.

Promatrajući kutove trokuta $BCO$ zaključujemo da je $\sphericalangle BOC = 90^\circ$.
Dakle, trokut $OBC$ je pravokutan. (2 boda)

Koristeći Pitagorin teorem možemo izračunati duljinu stranice $\overline{BC}$ trokuta $OBC$:

$$|BC| = \sqrt{|OB|^2 + |OC|^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$$

(1 bod)

Polumjer upisane kružnice $\overline{OQ}$ je visina pravokutnog trokuta $OBC$, pa je

$$r = \frac{|OB||OC|}{|BC|} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

(1 bod)

Sada možemo izračunati traženu površinu:

$$P = 2r^2 + |OB| \cdot |OC| = 2 \cdot 12^2 + 20 \cdot 15 = 588.$$

(1 bod)

***Varijacije.***

***Način računanja površine.***

Površina trapeza je $P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |AD|$.

Kako je ovaj trapez tangencijalan, vrijedi $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

Kao u gornjem rješenju odredimo $|BC| = 25$ i $r = 12$,

pa je $|AD| = 24$, $|AB| + |BC| = |BC| + |DA| = 49$ i $P = \frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 24 = 588$.

Možemo odrediti i $|AB| = 12 + 16 = 28$, $|CD| = 9 + 12 = 21$.

***Trigonometrija.***

Znajući da je $OBC$ pravokutan trokut, možemo se poslužiti trigonometrijom.

Za kut $\alpha$ iz gornjeg rješenja vrijedi $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{|OC|}{|OB|} = \dfrac{3}{4}$.

Slijedi $\sin \alpha = \dfrac{3}{5}$ i $\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$.

Vrijedi $r = |OB| \sin \alpha = 12$ i $|BC| = |OB| \cos \alpha + |OC| \sin \alpha = 16 + 9 = 25$.

## ŠKOLSKO (GRADSKO) NATJECANJE IZ MATEMATIKE

### 4. razred – srednja škola – A varijanta

### 4. veljače 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**Zadatak A-4.1.** (4 boda)

Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

***Prvo rješenje.***

Identitet dokazujemo matematičkom indukcijom po $n$.

*Baza*: za $n = 1$ imamo $1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$. (1 bod)

*Pretpostavka*: pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n$.

*Korak*: za $n+1$ imamo

$$\underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!}_{\text{prema pp}} + (n+1)\,(n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)\,(n+1)! \quad \text{(1 bod)}$$

$$= (n+2)\,(n+1)! - 1. \quad \text{(1 bod)}$$

Dakle, koristeći pretpostavku da tvrdnja vrijedi za $n$ dokazali smo da tvrdnja vrijedi i za $n+1$ pa stoga i za sve prirodne brojeve. (1 bod)

***Napomena.*** Posljednji bod se ne dodjeljuje ako učenik nije pravilno zapisao dokaz metodom matematičke indukcije.

***Drugo rješenje.***

Dokaz kombinatornim argumentom. Dvije strane jednakosti prebrojavaju isti skup na različite načine. S desne strane $((n+1)! - 1)$ je broj permutacija skupa $\{1, 2, ..., n+1\}$ pri čemu isključujemo mogućnost da se svaki broj preslikava u samog sebe. (1 bod)

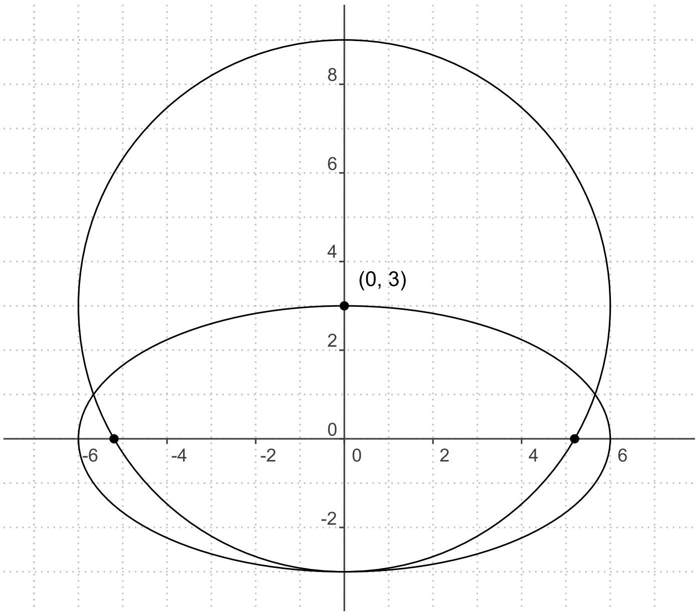
S druge strane prebrojavamo isti skup (permutacije bez identitete) tako da promatramo slučajeve ovisno o najvećem broju koji se ne preslikava u samog sebe. Ako je najveći broj koji se ne preslikava u samog sebe $k+1$, onda između $k$ brojeva manjih od $k+1$ možemo izabrati jedan koji se preslikava u $k+1$, a preostale brojeve manje od $k+1$ zajedno s brojem $k+1$ preslikavamo u $1, 2, ..., k$. To možemo učiniti na $k \cdot k!$ načina. (2 boda)

Budući da smo isključili mogućnost da se svaki broj preslikava u samog sebe, a s $k+1$ smo označili najveći broj koji se ne preslikava u samog sebe, slijedi da $k$ može biti bilo koji broj između 1 i $n$ pa je zaista rezultat $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$ (1 bod)

**Zadatak A-4.2.** (4 boda)

Dana je elipsa čija je jednadžba $x^2 + 4y^2 = 36$. Kružnica $k$ ima središte u točki $(0, 3)$ i prolazi žarištima dane elipse. Odredi sva sjecišta kružnice $k$ s elipsom.

***Rješenje.***




Iz jednadžbe je vidljivo da su poluosi elipse $a = 6$, $b = 3$.

Budući da je točka $(0, 3)$ na elipsi, zbroj udaljenosti te točke od žarišta je $2a = 12$. Odavde slijedi da je polumjer kružnice $k$ jednak 6.

Jednadžba kružnice $k$ je $x^2 + (y-3)^2 = 36$. (1 bod)

Tražimo rješenja sustava

$$x^2 + 4y^2 = 36,$$
$$x^2 + (y-3)^2 = 36.$$

Oduzmemo li te dvije jednadžbe dobivamo $4y^2 - (y-3)^2 = 0$. (1 bod)

Odavde dobivamo $4y^2 = (y-3)^2$, tj. $2y = \pm(y-3)$.

Imamo dva rješenja $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. (1 bod)

Iz jednadžbe elipse dobivamo $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm\sqrt{36-4} = \pm 4\sqrt{2}$.

Tražene točke su $(0, -3)$, $(4\sqrt{2}, 1)$, $(-4\sqrt{2}, 1)$. (1 bod)

***Varijacija.*** (*Drugi dokaz da polumjer kružnice iznosi* 6.)

Budući da je $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, zaključujemo da se žarišta elipse nalaze u točkama $(3\sqrt{3}, 0)$ i $(-3\sqrt{3}, 0)$. Odavde slijedi da je polumjer kružnice $k$ jednak $\sqrt{27+9} = 6$.

**Zadatak A-4.3.** (4 boda)

Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $(\mathrm{ABCDE2010})_{15}$ brojem 7 ?

*Brojevi se u bazi* 15 *pišu pomoću znamenaka* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E *čije su vrijednosti redom* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

***Prvo rješenje.***

Broj $(\mathrm{ABCDE2010})_{15}$ se može napisati kao

$$a = 10 \cdot 15^8 + 11 \cdot 15^7 + 12 \cdot 15^6 + 13 \cdot 15^5 + 14 \cdot 15^4 + 2 \cdot 15^3 + 1 \cdot 15^1.$$

Neka je $b = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 2 + 0 + 1 + 0 = 63$.

Primijetimo da je broj $15^k - 1$ djeljiv sa 7 za svaki prirodan broj $k$ jer je

$$15^k - 1 = (15 - 1) \cdot (15^{k-1} + \ldots + 1). \qquad \text{(1 bod)}$$

Oduzmimo broj $b$ od broja $a$:

$$\begin{aligned}
&a - b = \\
&= 10 \cdot 15^8 \;+\; 11 \cdot 15^7 \;+\; 12 \cdot 15^6 \;+\; 13 \cdot 15^5 \;+\; 14 \cdot 15^4 \;+\; 2 \cdot 15^3 \;+\; 1 \cdot 15^1 \\
&\qquad -10 \qquad\quad -11 \qquad\quad -12 \qquad\quad -13 \qquad\quad -14 \qquad\quad -2 \qquad\quad -1 \\
&= 10 \cdot (15^8 - 1) + 11 \cdot (15^7 - 1) + 12 \cdot (15^6 - 1) + 13 \cdot (15^5 - 1) + 14 \cdot (15^4 - 1) + \\
&+ 2 \cdot (15^3 - 1) + 1 \cdot (15 - 1).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je ta razlika djeljiva sa 7 jer je djeljiv svaki pribrojnik. (2 boda)

S druge strane, znamo da je broj $b = 63$ djeljiv sa 7, pa slijedi da je i broj $a$ djeljiv sa 7.

Dakle, ostatak dijeljenja sa 7 jednak je 0. (1 bod)

***Napomena.*** Činjenica da pri dijeljenju $15^k$ sa 7 dobijemo ostatak 1 (za $k = 1, \ldots, 8$) možemo dobiti i koristeći binomnu formulu

$$15^k = (14 + 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 14^i$$

Svi članovi u sumi su djeljivi sa 7 osim prvog $\binom{k}{0} \cdot 1 = 1$.

***Drugo rješenje.***

Vrijedi $15 \equiv 1 \pmod 7$, pa stoga i $15^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 7$, za $k = 1, \ldots, 8$. (1 bod)

Budući da stoga slijedi $15^k \cdot n \equiv n \pmod 7$ za $n = 1, \ldots, 14$, uz prethodne oznake imamo

$$a \equiv 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 2 + 1 \pmod 7 \qquad \text{(2 boda)}$$

tj.

$$a \equiv 0 \pmod 7. \qquad \text{(1 bod)}$$

***Treće rješenje.***

Direktnim dijeljenjem u sustavu s bazom 15 dobijemo:

$$\begin{array}{l}
\text{ABCDE2010}_{15} : 7 = \text{181CA8CD0}_{15} \\
\ \text{3B} \\
\quad \text{0C} \\
\qquad \text{5D} \\
\qquad\ \ \text{4E} \\
\qquad\quad\ \text{42} \\
\qquad\qquad \text{60} \\
\qquad\qquad\ \ \text{61} \\
\qquad\qquad\quad \text{00} \\
\qquad\qquad\qquad \text{0}
\end{array}$$

Ostatak dijeljenja sa 7 jednak je 0. (4 boda)

***Napomena.*** Ako učenik računa ovom metodom i samo jednom pogriješi u računu dati 2 boda.

***Četvrto rješenje.***

Prelaskom u dekadski sustav imamo:

$$(ABCDE2010)_{15} = (27\,655\,634\,265)_{10}$$ (2 boda)

$$27\,655\,634\,265 : 7 = 3\,950\,804\,895, \quad \text{ost } 0$$ (2 boda)

**Zadatak A-4.4.** (4 boda)

Odredi sve parove prirodnih brojeva $(m, n)$ takvih da vrijedi $m^5 + n^2 = 1700$.

***Rješenje.***

Budući da je $n^2 = 1700 - m^5$ nenegativni broj, imamo $m^5 \leqslant 1700 < 3125 = 5^5$, što povlači da je $m < 5$. (1 bod)

Ako je $m = 1$ dobivamo $n^2 = 1699$, što je nemoguće $(41^2 < 1699 < 42^2)$.

Ako je $m = 2$ dobivamo $n^2 = 1668$, što je nemoguće $(40^2 < 1668 < 41^2)$.

Ako je $m = 3$ dobivamo $n^2 = 1457$, što je nemoguće $(38^2 < 1457 < 39^2)$.

Dakle, $m$ ne može biti 1, 2 ili 3. (2 boda)

Ako je $m = 4$ dobivamo $n^2 = 676$ te je $n = 26$.

Jedino rješenje je $(m, n) = (4, 26)$. (1 bod)

***Napomena.*** Može se koristiti činjenica da potpuni kvadrat nikada ne završava znamenkama 7 ili 8.

**Zadatak A-4.5.** (4 boda)

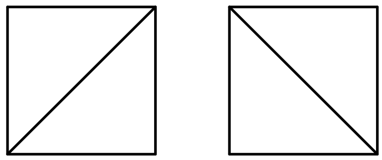
Stazu pravokutnog oblika širine $1.5\,\mathrm{m}$ i duljine $20\,\mathrm{m}$ treba popločati jednakim pločama oblika jednakokračnog pravokutnog trokuta s katetama duljine $50\,\mathrm{cm}$, tako da katete budu paralelne stranicama tog pravokutnika. Odredi broj načina na koji je to moguće napraviti.

***Rješenje.***

Jasno je da će po dva trokuta tvoriti kvadrate stranice duljine 0.5.

Takvih je kvadrata $3 \cdot 40 = 120$. (1 bod)

Svaki od manjih kvadrata $0.5 \times 0.5$ možemo popločati na dva načina. (1 bod)



Zaključujemo da je traženi broj popločavanja $2^{120}$. (2 boda)

**Zadatak A-4.6.** (10 bodova)

Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{4z} \right|,$$

pri čemu je $z$ kompleksan broj različit od nule.

***Prvo rješenje.***

Prelaskom na trigonometrijski oblik $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{4z} \right| &= \left| \cos\varphi + i\sin\varphi + \frac{1}{4(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right| && \text{(2 boda)} \\
&= \left| \cos\varphi + i\sin\varphi + \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{4} \right| \\
&= \left| \frac{5}{4}\cos\varphi + \frac{3}{4} i\sin\varphi \right| && \text{(2 boda)} \\
&= \sqrt{\frac{25}{16}\cos^2\varphi + \frac{9}{16}\sin^2\varphi} \\
&= \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^2\varphi}. && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Kako je $0 \leqslant \cos^2 \varphi \leqslant 1$ slijedi

$$\frac{3}{4} \leqslant \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^2 \varphi} \leqslant \frac{5}{4}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Dakle,

$$\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{4z} \right| \in \left[ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right].$$

***Napomena.*** Nakon što se dobije izraz $\sqrt{\frac{25}{16}\cos^2\varphi + \frac{9}{16}\sin^2\varphi}$, moguće je dalje sve izraziti preko $\sin\varphi$ umjesto $\cos\varphi$ i dobiti isto rješenje.

***Drugo rješenje.***

Označimo $|z| = r$. Tada je

$$\left| \frac{z}{r} + \frac{r}{4z} \right| = \left| \frac{4z^2 + r^2}{4zr} \right| = \frac{|4z^2 + r^2|}{4r^2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Sada prelaskom na algebarski oblik $z = x + yi$ imamo

$$\left|4z^2 + r^2\right| = \left|4(x+yi)^2 + x^2 + y^2\right| = \left|5x^2 - 3y^2 + 8xyi\right| \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\begin{aligned} \left|4z^2 + r^2\right| &= \sqrt{(5x^2 - 3y^2)^2 + (8xy)^2} \\ &= \sqrt{25(x^2+y^2)^2 - 16y^2(x^2+y^2)} \\ &= \sqrt{25r^4 - 16y^2r^2} \\ &= r\sqrt{25r^2 - 16y^2}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{4z} \right| = \frac{\sqrt{25r^2 - 16y^2}}{4r}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno kako je $-r \leqslant y \leqslant r$, slijedi $0 \leqslant y^2 \leqslant r^2$ te je

$$3r \leqslant \sqrt{25r^2 - 16y^2} \leqslant 5r. \qquad \text{(2 boda)}$$

Dijeljenjem sa $4r$ dobivamo da je

$$\frac{3}{4} \leqslant \frac{\sqrt{25r^2 - 16y^2}}{4r} \leqslant \frac{5}{4}.$$

Dakle,

$$\left| \frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{4z} \right| \in \left[ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right]. \qquad \text{(2 boda)}$$

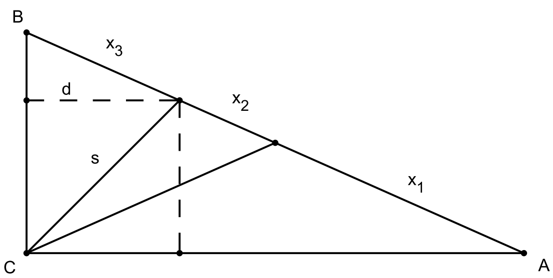
**Zadatak A-4.7.** (10 bodova)

U pravokutnom trokutu težišnica i simetrala pravog kuta dijele hipotenuzu na tri dijela čije duljine, u nekom poretku, čine aritmetički niz. Odredi sve moguće omjere duljina kateta tog trokuta.

*Tri broja čine* aritmetički niz *ako je suma najmanjeg i najvećeg jednaka dvostrukom srednjem broju.*

***Rješenje.***

***Odgovor:*** Jedine mogućnosti su $a : b = 1 : 5$ (ili $5 : 1$) i $a : b = 1 : 2$ (ili $2 : 1$).




Označimo duljine ta tri dijela redom s $x_1$, $x_2$, $x_3$. Vrijedi $x_1 = \frac{c}{2}$ i $x_1 + x_2 + x_3 = c$.

***Prvo rješenje.***

S $d$ označimo duljinu okomica spuštenih iz sjecišta hipotenuze i simetrale pravog kuta na katete. Te okomice su katete dvaju manjih pravokutnih trokuta koji su slični polaznom trokutu. (1 bod)

Zbog sličnosti i Pitagorinog poučka vrijedi

$$\frac{d}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - d^2}} = \frac{\sqrt{x_3^2 - d^2}}{d} = \frac{a}{b}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Zbog jednostavnosti pretpostavimo $c = 6$. Razlikujemo dva slučaja:

*1. slučaj:* Neka je $x_3 < x_2 < x_1$. Tada iz $x_1 + x_3 = 2x_2$ jednostavnim računom dobijemo $x_2 = \frac{c}{3} = 2$ i $x_3 = \frac{c}{6} = 1$. (2 boda)

Odavde slijedi

$$\frac{d}{\sqrt{25 - d^2}} = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d}$$

te zbog toga $d = \frac{5}{\sqrt{26}}$ i $a : b = 1 : 5$. (1 bod)

*2. slučaj:* Neka je $x_2 < x_3 < x_1$. Tada iz $x_1 + x_3 = 2x_2$ jednostavnim računom dobijemo $x_2 = \frac{c}{6} = 1$ i $x_3 = \frac{c}{3} = 2$. (2 boda)

Odavde slijedi

$$\frac{d}{\sqrt{16 - d^2}} = \frac{\sqrt{4 - d^2}}{d}$$

te zbog toga $d = \frac{4}{\sqrt{5}}$ i $a : b = 1 : 2$. (1 bod)

***Drugo rješenje.***

U ovom rješenju koristimo poučak o simetrali kuta koji kaže da simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica trokuta. Dakle,

$$\frac{a}{b} = \frac{x_3}{x_1 + x_2}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Razlikujemo dva slučaja:

*1. slučaj:* Ako je $x_3 < x_2 < x_1$ imamo $x_2 = \dfrac{c}{3}$ i $x_3 = \dfrac{c}{6}$. (2 boda)

Simetrala kuta dijeli hipotenuzu u omjeru $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x_3}{x_1 + x_2} = \dfrac{1}{5}$. (1 bod)

*2. slučaj:* Neka je $x_2 < x_3 < x_1$ imamo $x_2 = \dfrac{c}{6}$, $x_3 = \dfrac{c}{3}$. (2 boda)

Simetrala kuta dijeli hipotenuzu u omjeru $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x_3}{x_1 + x_2} = \dfrac{1}{2}$. (1 bod)

***Napomene.***
Ako učenik pretpostavi da postoji samo jedan slučaj i točno riješi taj slučaj, dodijeliti ukupno 6 bodova.
Učenik može do jednakosti $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x_3}{x_1 + x_2}$ doći i na druge načine. Ako učenik na bilo koji način dobije navedenu formulu, dodijeliti za to ukupno 4 boda.

***Prva varijacija drugog rješenja.***

Neka je $d$ duljina okomica spuštenih iz sjecišta hipotenuze i simetrale pravog kuta na katete. Tada vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{d}{x_1 + x_2} = \frac{x_3 \cos\alpha}{x_1 + x_2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\,\alpha = \frac{x_3}{x_1 + x_2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

***Druga varijacija drugog rješenja.***

Ako sa $s$ označimo duljinu dijela simetrale pravog kuta unutar zadanog trokuta, prema sinusovom poučku imamo

$$\frac{\sin\alpha}{s} = \frac{\sin 45^\circ}{x_1 + x_2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{s} = \frac{\cos\alpha}{s} = \frac{\sin 45^\circ}{x_3}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Dijeljenjem prethodne dvije jednakosti dobivamo

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{x_3}{x_1 + x_2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

**Zadatak A-4.8.** (10 bodova)

Unutar kvadrata stranice duljine 10 nalazi se šest različitih točaka raspoređenih tako da je udaljenost između svake dvije od njih cjelobrojna. Dokaži da među tim udaljenostima postoje dvije jednake.

***Rješenje.***

Udaljenost bilo koje dvije točke unutar kvadrata manja je ili jednaka duljini dijagonale kvadrata $10\sqrt{2}$. (2 boda)

Budući da je $10\sqrt{2} < 15$, cjelobrojne udaljenosti neke dvije od danih 6 točaka mogu biti jednake nekom od 14 prirodnih brojeva $1, 2, \ldots, 14$. (2 boda)

Dane točke određuju $\binom{6}{2} = 15$ parova. (2 boda)

Budući da za 15 parova imamo 14 mogućih udaljenosti, prema Dirichletovom principu zaključujemo da postoje dvije udaljenosti koje su jednake. (4 boda)