ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Rastavite na faktore izraz $x^5 - 5x^3 + 4x$.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
x^5 - 5x^3 + 4x &= x\left(x^4 - 5x^2 + 4\right) = && \text{(1 bod)}\\
&= x(x^2-1)(x^2-4) = && \text{(1 bod)}\\
&= x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2). && \text{(2 boda)}
\end{aligned}
$$

Zadatak B-1.2.

Izračunajte

$$\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}} \cdot \frac{x+5}{x-1}.$$

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}} \cdot \frac{x+5}{x-1} &= \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+6x+5}{x^2}} \cdot \frac{x+5}{x-1} = && \text{(1 bod)}\\
&= \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x+5)} \cdot \frac{x+5}{x-1} = 1 && \text{(2 boda)}
\end{aligned}
$$

$x \neq 1, 0, -1, -5$ (1 bod)

Zadatak B-1.3.

Otac je od kćeri stariji 33 godine, a prije 11 godina kći je od njega bila 4 puta mlađa. Koliko otac ima godina?

Rješenje.

Ako broj godina oca označimo s x, broj godina kćeri je $x-33$. Tada je:

$$
\begin{aligned}
x-11 &= 4\cdot(x-33-11) && \text{(2 boda)}\\
x-11 &= 4x-176\\
x &= 55 && \text{(1 bod)}
\end{aligned}
$$

Otac ima 55 godina. (1 bod)

Zadatak B-1.4.

Ortocentar jednakokračnog trokuta nalazi se u jednom od vrhova trokuta. Ako su duljine krakova $3\sqrt{2}$ cm, kolika je duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice?

Rješenje.

Sjecište visina je vrh trokuta ako i samo ako je trokut pravokutan. Zaključujemo da je zadani trokut pravokutan. (2 boda)

Polumjer opisane kružnice pravokutnom trokutu je polovica hipotenuze.

$$
r=\frac{c}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^{2}}=3. \qquad \text{(2 boda)}
$$

Zadatak B-1.5.

Neka su A, B, C točke na kružnici sa središtem u točki S takve da je $\angle SBC=30^\circ$, a $\angle BCA=50^\circ$. Koliko iznosi mjera kuta $\angle ABC$? (Točka S nalazi se unutar trokuta ABC.)

Prvo rješenje.

Trokut BSC je jednakokračan pa je kut $\angle BSC=120^\circ$. (1 bod)

U jednakokračnom trokutu SCA je kut $\angle SCA=50^\circ-30^\circ=20^\circ$, a kut $\angle ASC=140^\circ$. (1 bod)

Nadalje, kut $\angle ASB=360^\circ-(\angle BSC+\angle ASC)=360^\circ-(120^\circ+140^\circ)=100^\circ$. (1 bod)

Konačno, $\angle ABS=\frac{1}{2}\left(180^\circ-100^\circ\right)=40^\circ$ i $\angle ABC=40^\circ+30^\circ=70^\circ$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Trokut BSC je jednakokračan pa je $\angle BSC=180^\circ-2\cdot30^\circ=120^\circ$. (2 boda)

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi $\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot\angle BSC=60^\circ$. (1 bod)

Kako je zbroj kutova u trokutu 180°, slijedi $\angle ABC=180^\circ-(60^\circ+50^\circ)=70^\circ$. (1 bod)

Zadatak B-1.6.

Autobus krene iz početne stanice sa stanovitim brojem putnika. Na prvoj stanici izađe 20% putnika, a uđe 24 putnika. Na idućoj stanici izađe $\frac{2}{3}$ putnika, a nitko ne uđe. Na posljednjoj se stanici iskrca preostalih 16 putnika. Koliko je putnika ušlo u autobus na početnoj stanici?

Rješenje.

Označimo broj putnika koji su ušli u autobus na početnoj stanici s x. Nakon što 20% putnika izađe na prvoj stanici, u autobusu je $x - 20\%x = 0.8x$ putnika. (2 boda)

Kad tome dodamo još i 24 putnika koji uđu, nakon prve stanice u autobusu je $0.8x + 24$ putnika. (1 bod)

Od tog broja na sljedećoj stanici izađe $\frac{2}{3}$ putnika, što znači da je preostala $\frac{1}{3}$ tog broja, odnosno $\frac{1}{3}(0.8x + 24)$, (2 boda)

a kako taj broj iznosi 16, vrijedi $\frac{1}{3}(0.8x + 24) = 16$, (2 boda)

odnosno $x = 30$. (2 boda)

Na početnoj stanici u autobus je ušlo 30 putnika. (1 bod)

Zadatak B-1.7.

Ako su a, b realni brojevi takvi da vrijedi $a < -2$, $b < 2$, onda je $b - a > 2 - \frac{1}{2}ab$. Dokažite!

Rješenje.

Prema uvjetu zadatka je

$$\begin{aligned} a + 2 &< 0 \\ b - 2 &< 0 \end{aligned}$$ (2 boda)

Množenjem dva negativna broja dobivamo pozitivan broj, tj. $(a + 2) \cdot (b - 2) > 0$.

(4 boda)

Ako izmnožimo te dvije zagrade, dobivamo tvrdnju zadatka:

$$\begin{aligned} ab - 2a + 2b - 4 &> 0 \\ 2b - 2a &> 4 - ab / \cdot \frac{1}{2} \\ b - a &> 2 - \frac{1}{2}ab \end{aligned}$$ (4 boda)

Zadatak B-1.8.

Suma dvoznamenkastog broja i broja koji ima iste znamenke, ali napisane obrnutim redoslijedom je potpuni kvadrat. Odredite sve takve brojeve!

Rješenje.

Označimo traženi broj sa $\overline{xy}$. Tada je

$$\overline{xy} + \overline{yx} = n^2 \qquad \text{(2 boda)}$$
$$10x + y + 10y + x = n^2$$
$$11 \cdot (x + y) = n^2 \qquad \text{(3 boda)}$$

Zbroj znamenaka mora biti 11, a to se može postići na sljedeće načine:

$$2 + 9, 3 + 8, 4 + 7, 5 + 6, 6 + 5, 7 + 4, 8 + 3, 9 + 2 \qquad \text{(4 boda)}$$

Traženi brojevi su: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 i 92. (1 bod)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Riješite jednadžbu

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)-2\left(\sqrt{x}-2\right)=-11.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)-2\left(\sqrt{x}-2\right)&=-11\\ x-6\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4+11&=0\\ x-8\sqrt{x}+15&=0\end{aligned}$$ (1 bod)

Uvodimo supstituciju $\sqrt{x}=t$. (1 bod)

$$t^2-8t+15=0$$

$$t_1=3, \quad t_2=5$$ (1 bod)

$$x_1=9, \quad x_2=25$$ (1 bod)

Zadatak B-2.2.

Izračunajte unutarnji kut pravilnog mnogokuta ako je ukupan broj svih stranica i dijagonala jednak 105.

Rješenje.

Broj stranica tog mnogokuta označimo s n. Tada je:

$$n+\frac{n\cdot(n-3)}{2}=105$$ (1 bod)

Pozitivno rješenje ove kvadratne jednadžbe je 15. (1 bod)

Unutarnji kut izračunamo po formuli

$$\alpha=\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$ (1 bod)

$$\alpha=156^\circ$$ (1 bod)

Zadatak B-2.3.

Dana je jednadžba $x^2 - px + q = 0$, gdje su p i q pozitivni realni brojevi. Ako je razlika rješenja jednadžbe 1, a zbroj rješenja 2, izračunajte p i q.

Prvo rješenje.

Prema Vieteovim formulama je $x_1 + x_2 = p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, a prema uvjetima zadatka

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ |x_1 - x_2| &= 1 \end{aligned}$$

iz čega slijedi $p = 2$. (1 bod)

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$1 = \sqrt{4 - 4q} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$q = \frac{3}{4} \qquad \text{(1 bod)}$$

Napomena:

Razliku rješenja možemo dobiti i direktnim uvrštavanjem u formulu za rješenja kvadratne jednadžbe:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2} \right| = |\sqrt{D}| \quad \Rightarrow \quad D = 1 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$4 - 4q = 1 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$q = \frac{3}{4} \qquad \text{(1 bod)}$$

Priznati i ako nije korištena apsolutna vrijednost.

Drugo rješenje.

Ako je zbroj rješenja 2, a razlika 1, onda su rješenja brojevi $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$. (2 boda)

Vrijednosti za p i q dobivamo direktnim uvrštavanjem u jednadžbu (ili opet po Vieteu). (2 boda)

Zadatak B-2.4.

Odredite sve prirodne brojeve x koji zadovoljavaju sustav nejednadžbi

$$x-\frac{6}{x} \geq 1, \quad \frac{1}{x-6} \leq 0.$$

Rješenje.

Rješenje tražimo u skupu prirodnih brojeva pa prvu nejednadžbu smijemo pomnožiti s nazivnikom. Dobivamo nejednadžbu $x^2-x-6 \geq 0$ čije rješenje u skupu $\mathbb{N}$ je $x \in \{3,4,5,\ldots\}$. (2 boda)

Rješenje nejednadžbe $x-6<0$ u skupu $\mathbb{N}$ je $x \in \{1,2,3,4,5\}$. (1 bod)

Konačno rješenje zadatka je $x \in \{3,4,5\}$. (1 bod)

Zadatak B-2.5.

Kojom znamenkom završava zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 105?

Rješenje.

$$105=3 \cdot 5 \cdot 7$$ (1 bod)

Djelitelji od 105 su $1,3,5,7,15,21,35,105$. (2 boda)

Zbroj djelitelja iznosi 192. Zadnja znamenka zbroja je 2. (1 bod)

Zadatak B-2.6.

Izračunajte površinu lika kojeg u Gaussovoj ravnini određuje skup kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|z-1-i| \leq \sqrt{2}$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Rješenje.

Za zadani skup točaka $z = x + yi$ vrijedi

$$|x+yi-1-i| \leq \sqrt{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

Nadalje,

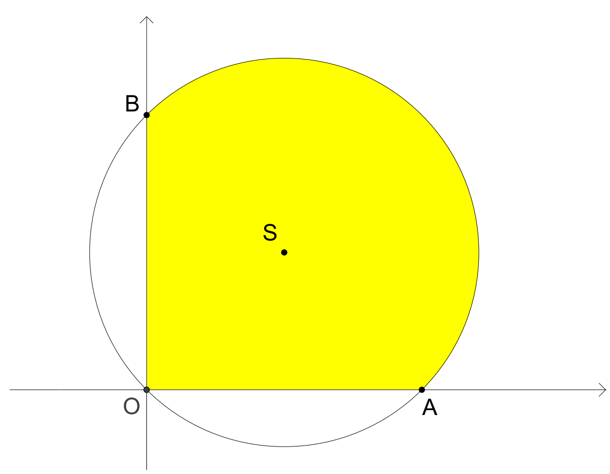
$$|(x-1)+i(y-1)| \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \leq \sqrt{2}.$$

Konačno, skup točaka koje treba nacrtati je

$$(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Treba izračunati površinu dijela kruga sa središtem u $S(1,1)$ i $r = \sqrt{2}$, koji se nalazi u prvom kvadrantu. Taj lik se sastoji od polovice kruga i jednakokračnog pravokutnog trokuta OAB. (*Vidi sliku!*)



Precizno nacrtana slika ... (2 boda)

$$P = \frac{1}{2}r^2\pi + \frac{1}{2}|OA|^2 = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot 4 = \pi + 2. \qquad \text{(2 boda)}$$

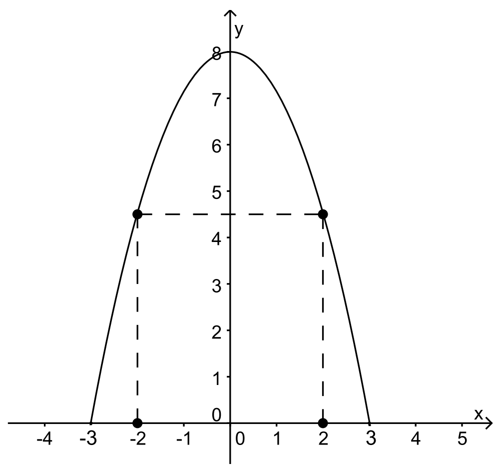
Napomena: Do kruga sa središtem u $S(1,1)$ radijusa $r = \sqrt{2}$, može se doći i direktno iz modula: kao skup svih kompleksnih brojeva z čija je udaljenost od $1+i$ manja ili jednaka od $\sqrt{2}$. (2 boda)

Zadatak B-2.7.

Poprečni presjek tunela ima oblik parabole. Najveća širina tunela je 6 m, a najveća visina 8 m. Može li kamion širine 4 m i visine 4.5 m proći kroz taj tunel? Obrazložite! Ako je visina kamiona 4 m, do koliko najviše metara može iznositi njegova širina tako da prođe kroz tunel?

Rješenje.

Parabolu smjestimo u koordinatni sustav tako da joj tjeme ima koordinate $(0, 8)$.



Tada su njene nultočke $T_1(-3, 0)$ i $T_2(3, 0)$, a jednadžba je

$$y = -\frac{8}{9}x^2 + 8. \qquad \text{(4 boda)}$$

Priznati i neku drugu jednadžbu parabole (ovisno o odabiru koordinatnog sustava) ako je vidljivo kako je učenik do nje došao, npr. $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x$.

Ako je širina kamiona 4 metra, onda bi njegova visina trebala biti manja od

$$-\frac{8}{9} \cdot 2^2 + 8 = \frac{40}{9}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $4.5 > \frac{40}{9}$, kamion neće moći ući u tunel. (2 boda)

Ako je visina kamiona 4 metra, onda maksimalnu širinu $(2x)$ možemo izračunati iz:

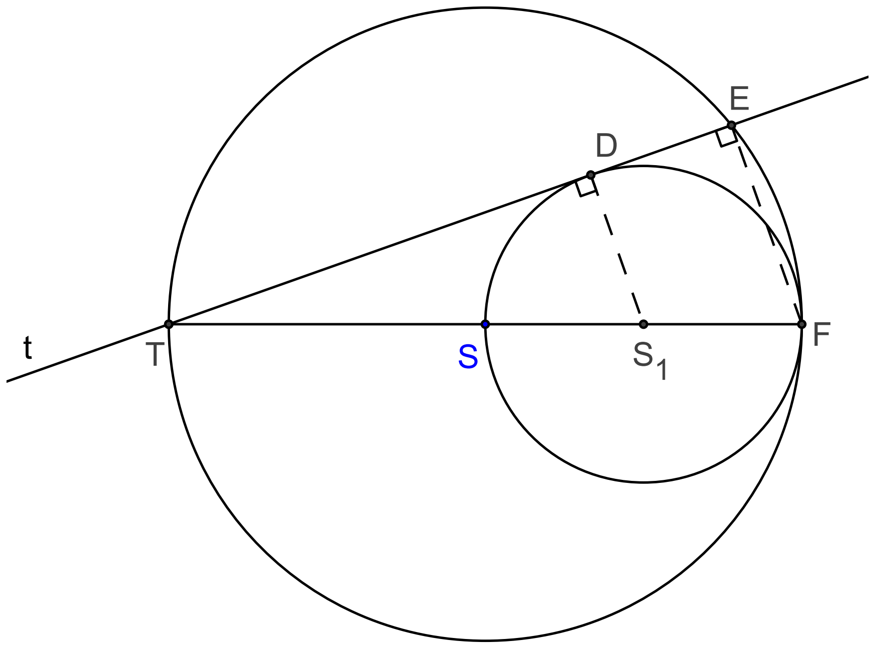
$$\begin{aligned} 4 &< -\frac{8}{9}x^2 + 8 \\ x^2 &< \frac{9}{2} \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Maksimalna širina mora biti manja od $2\sqrt{\frac{9}{2}} = 3\sqrt{2}$. (2 boda)

Zadatak B-2.8.

Dvije kružnice dodiruju se iznutra u točki F. Promjer jedne kružnice je 8 cm, a promjer druge dvostruko je manji. Iz rubne točke T promjera $\overline{TF}$ veće kružnice konstruiramo tangentu na manju kružnicu. Ako je točka E sjecište ($E \neq T$) tangente i veće kružnice, a S_1 središte manje kružnice, odredite opseg trokuta TS_1E.

Rješenje.



Skica ... (1 bod)

Vrijedi da je $\angle TDS_1 = 90°$ (tangenta) i $\angle TEF = 90°$ (kut nad promjerom kružnice) pa su trokuti TDS_1 i TEF slični. (2 boda)

Vrijedi da je $|TS_1| = 6$ cm, $|TF| = 8$ cm i $|S_1D| = 2$ cm. Zbog sličnosti trokuta je $|TS_1| : |TF| = |S_1D| : |EF|$ pa je $6 : 8 = 2 : |EF|$, tj. $|EF| = \frac{8}{3}$. (1 bod)

Sada je $|TE| = \sqrt{|TF|^2 - |EF|^2} = \sqrt{64 - \frac{64}{9}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$. (1 bod)

Po Pitagorinom poučku slijedi

$$|TD| = \sqrt{|TS_1|^2 - |S_1D|^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}. \quad \text{(1 bod)}$$

Sada je

$$|S_1E| = \sqrt{|S_1D|^2 + |DE|^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{68}{9}} = \frac{2\sqrt{17}}{3}. \quad \text{(2 boda)}$$

Opseg trokuta je $o = 6 + \dfrac{2\sqrt{17}}{3} + \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ cm. (2 boda)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Izračunajte

$$\frac{\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ}{1 + \operatorname{tg} 58^\circ \operatorname{ctg} 62^\circ}.$$

Prvo rješenje.

Kako je $\operatorname{ctg} 62^\circ = \operatorname{tg} 28^\circ$ (1 bod)

$$\frac{\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ}{1 + \operatorname{tg} 58^\circ \operatorname{ctg} 62^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ}{1 + \operatorname{tg} 58^\circ \operatorname{tg} 28^\circ} = \operatorname{tg}(58^\circ - 28^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Drugo rješenje.

$$\frac{\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ}{1 + \operatorname{tg} 58^\circ \operatorname{ctg} 62^\circ} = \frac{\dfrac{\sin 58^\circ}{\cos 58^\circ} - \dfrac{\sin 28^\circ}{\cos 28^\circ}}{1 + \dfrac{\sin 58^\circ}{\cos 58^\circ}\dfrac{\cos 62^\circ}{\sin 62^\circ}} = \frac{\dfrac{\sin(58^\circ - 28^\circ)}{\cos 58^\circ \cos 28^\circ}}{\dfrac{\sin(58^\circ + 62^\circ)}{\cos 58^\circ \sin 62^\circ}} = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \sin 62^\circ}{\sin 120^\circ \cos 28^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-3.2.

Riješite nejednadžbu

$$16^{\sin 3x} - 4 \geq 0.$$

Rješenje.

$$4^{2\sin 3x} \geq 4 \quad \Rightarrow \quad 2\sin 3x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sin 3x \geq \frac{1}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / \cdot \frac{1}{3} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena: Analogno bodovati ako je učenik računao u stupnjevima.

Zadatak B-3.3.

Izračunajte
$$\frac{1}{\log_2 n^2}+\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} n^2}+\frac{1}{\log_{\frac{4}{3}} n^2}+\ldots+\frac{1}{\log_{\frac{n}{n-1}} n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\log_2 n^2}+\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} n^2}+\frac{1}{\log_{\frac{4}{3}} n^2}+\ldots+\frac{1}{\log_{\frac{n}{n-1}} n^2}= \\
&=\log_{n^2} 2+\log_{n^2} \frac{3}{2}+\log_{n^2} \frac{4}{3}+\cdots+\log_{n^2} \frac{n}{n-1}= && \text{(1 bod)}\\
&=\log_{n^2}\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1}\right)= && \text{(1 bod)}\\
&=\log_{n^2} n=\frac{1}{2}. && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Napomena:

Zadatak se može riješiti i prikazivanjem danih logaritama pomoću logaritama po bazi 10 (ili nekoj drugoj bazi) te svođenjem danog izraza na zajednički nazivnik.

Zadatak B-3.4.

Oko kružnice promjera 5 cm opisan je jednakokračni trapez površine 36 cm^2. Odredite opseg trapeza.

Rješenje.

Trapez je tangencijalni pa za njegove stranice vrijedi $a+c=2b$. (1 bod)

Površina trapeza je $P=\frac{a+c}{2} \cdot v=b \cdot 2r$. (1 bod)

Slijedi $36=5b$, $b=7.2$ cm. (1 bod)

Opseg trapeza iznosi $O=a+c+2b=4b=28.8$ cm. (1 bod)

Zadatak B-3.5.

Za koje realne brojeve x funkcija $f(x)=\sin x-\cos^2 x-1$ ima najmanju vrijednost?

Rješenje.

Funkciju $f(x)=\sin x-\cos^2 x-1$ zapišimo u pogodnom obliku.

$$f(x)=\sin x-\cos^2 x-1=\sin x-\left(1-\sin^2 x\right)-1=\sin^2 x+\sin x-2 \qquad \text{(1 bod)}$$

Uz $t=\sin x$ funkcija $f(t)=t^2+t-2$ je kvadratna funkcija koja postiže najmanju vrijednost za $t_0=-\frac{1}{2}$. (1 bod)

Kako je $t=\sin x$, to će zadana funkcija imati najmanju vrijednost za $\sin x=-\frac{1}{2}$, (1 bod)

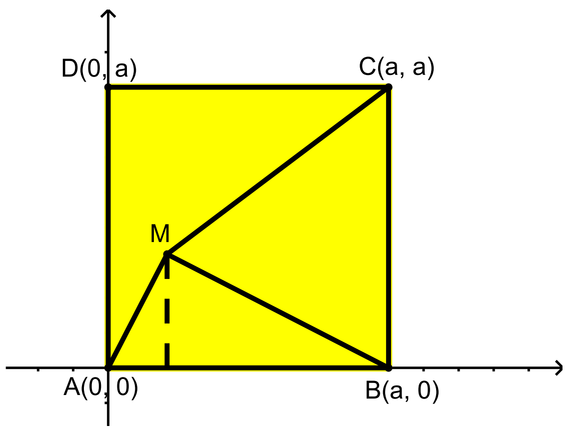
odnosno za $x_1=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $x_2=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Zadatak B-3.6.

U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ postoji točka M takva da je $|MA| = 7$ cm, $|MB| = 13$ cm i $|MC| = 17$ cm. Izračunajte površinu kvadrata $ABCD$.

Rješenje.

Neka je a duljina stranice kvadrata. Postavimo koordinatni sustav kao na slici:



Za točnu sliku s označenim koordinatama svih točaka: (2 boda)

Ako su (x, y) koordinate točke M, slijedi:

$$x^2 + y^2 = 49 \quad \text{(1 bod)}$$
$$(x-a)^2 + y^2 = 169 \quad \text{(1 bod)}$$
$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = 289 \quad \text{(1 bod)}$$

Nakon sređivanja dobije se:

$$a^2 - 2ay = 120$$
$$a^2 - 2ax = 120,$$

tj. $x = y$. Dakle, točka M leži na dijagonali kvadrata. (3 boda)

Duljina dijagonale kvadrata je $7 + 17 = 24$. (1 bod)

Površina kvadrata je $P = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}24^2 = 288$. (1 bod)

Napomena:

Zadatak se može riješiti i bez koordinatnog sustava. Koristeći Pitagorin poučak, dođe se do sličnog sustava jednadžbi. Tada bodujemo kao i gore: 5 bodova za postavljanje sustava i 5 bodova za njegovo rješavanje uključujući i izračunavanje površine.

Zadatak B-3.7.

Riješite jednadžbu

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(2010x).$$

Rješenje.

Jednadžba $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(2010x)$ dijeljenjem s 2 prelazi u

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin(2010x) \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\sin(2010x)$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin(2010x) \qquad \text{(5 bodova)}$$

1. *slučaj:* $x-\frac{\pi}{3}=2010x+2k\pi$, tj. $x=\frac{1}{2009}\left(-\frac{\pi}{3}-2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. (2 boda)

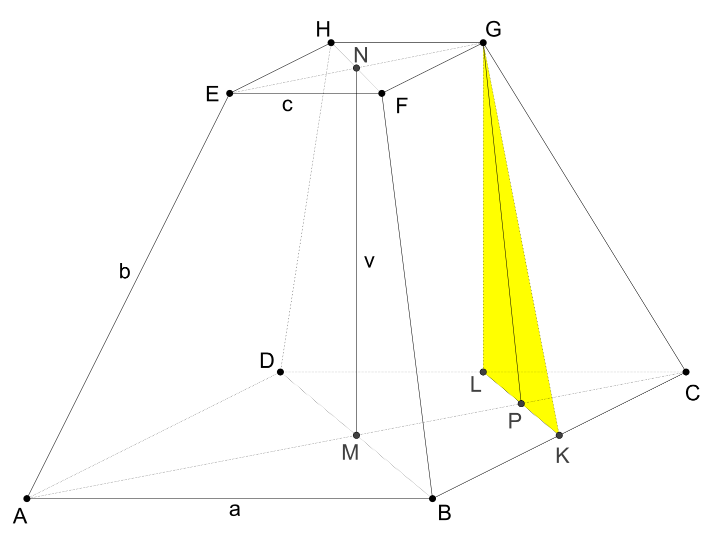
2. *slučaj:* $x-\frac{\pi}{3}=\pi-2010x+2k\pi$, tj. $x=\frac{1}{2011}\left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. (2 boda)

Zadatak B-3.8.

Pravilnu četverostranu krnju piramidu čiji su osnovni bridovi $a=12$ cm i $c=8$ cm, a svi bočni bridovi $b=20$ cm, presijeca ravnina koja prolazi kroz krajnju točku dijagonale manje osnovke okomito na tu dijagonalu. Koliko je oplošje manjeg dijela piramide koji je nastao tim presijecanjem?

Rješenje.

Skica: (1 bod)



Uvedimo sljedeće oznake: v je visina krnje piramide, $d=|AC|$, $d_1=|EG|$, $x=|PK|$, $y=|PC|$.

Traženo oplošje nastale piramide $KLCG$ (s vrhom u G i osnovicom KLC) računamo kao zbroj površina:

$$O = P_{\triangle KLG} + 2 \cdot P_{\triangle KCG} + P_{\triangle KCL}.$$

Da bismo mogli izračunati površinu danog presjeka, trokuta $\triangle KLG$, odredimo:

$$y = \frac{d - d_1}{2} = \frac{12\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$v = \sqrt{b^2 - y^2} = \sqrt{400 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2} \text{ cm}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle MBC$ i $\triangle PKC$ slijedi $\frac{\frac{d}{2}}{x} = \frac{\frac{d}{2}}{y}$, odnosno, $x = y = 2\sqrt{2}$ cm (1 bod)

i $\frac{|KC|}{a} = \frac{y}{\frac{d}{2}}$, odnosno $|KC| = 4$ cm.

$$P_{\triangle KLG} = \frac{2xv}{2} = 56 \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Osnovica piramide je $\triangle KLC$, a njegova je površina

$$P_{\triangle KLC} = \frac{2xy}{2} = 8 \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Bočne strane piramide su sukladni trokuti $\triangle KCG$ i $\triangle LCG$ s osnovicom duljine $|KC| = 4$ cm i visinom jednakoj visini jednakokračnog trapeza $BCGF$. (1 bod)

Stoga je

$$P_{\triangle KCG} = \frac{4 \cdot \sqrt{400 - 4}}{2} = 12\sqrt{11} \text{ cm}^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

I, konačno, $O = 56 + 8 + 2 \cdot 12\sqrt{11} = 64 + 24\sqrt{11}$ cm^2. (1 bod)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite jednadžbu

$$\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1.$$

Prvo rješenje.

$$\sin x - \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = 1, \quad \cos x \neq 0.$$

Jednadžbu pomnožimo sa $\cos x$ i dobivamo

$$\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + \sin x = \cos x. \qquad \text{(1 bod)}$$

Grupiranjem članova slijedi

$$(\cos x + 1) \cdot (\sin x - \cos x) = 0.$$

$$\cos x = -1 \quad \text{ili} \quad \operatorname{tg} x = 1. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. (2 boda)

Drugo rješenje. (Univerzalnom supstitucijom)

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq \pm 1.$$

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2} = 1. \qquad \text{(1 bod)}$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{2}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Još treba provjeriti uvjet $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \neq \pm 1$ i kada $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ nije definirano.

Prvi je uvjet zadovoljen jer je $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \pm 1$ za $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, što nije rješenje. (1 bod)

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nije definiran za $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, odnosno $x = \pi + 2k\pi$, a to je rješenje. (1 bod)

Zadatak B-4.2.

Odredite jednadžbu kružnice koja dira pravac $x-3y+4=0$, a središte joj se nalazi na pravcima $2x-3y-9=0$ i $y+1=0$.

Rješenje.

Središte kružnice je u točki presjeka pravaca $2x-3y-9=0$ i $y+1=0$, odnosno rješenje danog sustava, a to je točka $(3,-1)$. (1 bod)

Polumjer je jednak udaljenosti središta $S(3,-1)$ do pravca $x-3y+4=0$ (1 bod)

$$r=\frac{|3+3+4|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Rješenje: $(x-3)^2+(y+1)^2=10$. (1 bod)

Zadatak B-4.3.

Odredite vrijednosti realnog parametra a, ako je koeficijent uz linearni član u razvoju binoma $\left(x+\frac{1}{ax^2}\right)^7$ jednak $\frac{7}{3}$?

Rješenje.

Opći član u razvoju binoma dan je izrazom $\binom{7}{k}x^{7-k}\left(\frac{1}{ax^2}\right)^k$ (1 bod)

ili, nakon sređivanja, $\binom{7}{k}x^{7-k}\left(\frac{1}{ax^2}\right)^k=\binom{7}{k}x^{7-k-2k}a^{-k}$.

Linearni član je onaj kojemu je eksponent od x jednak 1, tj.

$$\begin{aligned}&7-3k=1\\&k=2\end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Sada je $\binom{7}{2}a^{-2}=\frac{7}{3}$, a odatle $a^2=9$, tj. $a=\pm 3$. (2 boda)

Napomena: Ako učenik napiše samo $a=3$, gubi 1 bod.

Zadatak B-4.4.

Ako je z rješenje jednadžbe $z^2 - z + 1 = 0$, koliko je $z^{2010} - z^{1005} + 1$?

Prvo rješenje.

Rješenje dane jednadžbe nije $z = -1$ pa možemo tu jednadžbu pomnožiti sa $z+1$. Dobit ćemo:

$$\begin{aligned}(z+1)(z^2 - z + 1) &= 0 \\ z^3 + 1 &= 0 \\ z^3 &= -1\end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je i $z^{1005} = \left(z^3\right)^{335} = -1$, (1 bod)

a $z^{2010} = \left(z^{1005}\right)^2 = 1$ (1 bod)

pa je $z^{2010} - z^{1005} + 1 = 3$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Riješimo kvadratnu jednadžbu.

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \qquad \text{(1 bod)}$$

Dobivena rješenja možemo prikazati u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned}z_1 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ z_2 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Sada je $z_1^{1005} = \cos\frac{1005\pi}{3} + i\sin\frac{1005\pi}{3} = -1$ i $z_1^{2010} = 1$.

Slično je $z_2^{1005} = -1$ i $z_2^{2010} = 1$. (1 bod)

U oba slučaja je $z^{2010} - z^{1005} + 1 = 3$. (1 bod)

Zadatak B-4.5.

Elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{16}=1$ i parabola $y^2=2px$ sijeku se u točki $T(4\sqrt{3},2)$. Kolika je površina trokuta TF_EF_P, ako je F_E fokus elipse koji se nalazi na pozitivnom dijelu osi x, a F_P fokus parabole?

Rješenje.

Prvo odredimo nepoznate veličine za elipsu:

$$\frac{(4\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{4}{16}=1, \quad a^2=64, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$e=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}, \quad F_E(4\sqrt{3},0). \qquad \text{(1 bod)}$$

Zatim za parabolu:

$$4=2p\cdot 4\sqrt{3}, \quad p=\frac{\sqrt{3}}{6}, \quad F_P\left(\frac{\sqrt{3}}{12},0\right). \qquad \text{(1 bod)}$$

Površina trokuta je

$$P=\frac{4\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{12}}{2}\cdot 2=\frac{47\sqrt{3}}{12}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-4.6.

Jednadžbe pravaca na kojima leže dvije stranice trokuta su $AB: 3x+y-3=0$, $AC: 3x+4y=0$. Ako je jednadžba simetrale kuta β jednaka $s_\beta: x-y+5=0$, odredite koordinate vrhova trokuta ABC.

Rješenje.

Vrh A je presjek pravaca AB i AC, $A=\left(\dfrac{4}{3},-1\right)$. (1 bod)

Vrh B je presjek pravaca AB i s_β, $B=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{2}\right)$. (1 bod)

Koeficijente smjera pravaca AB, s_β, BC označimo sa k_{AB}, k_{s_β}, k_{BC}. Zbog svojstva simetrale kuta vrijedi da su kutovi $\angle(BA,s_\beta)$ i $\angle(s_\beta,BC)$ jednaki, a tada su i njihovi tangensi jednaki te vrijedi: (1 bod)

$$\left|\frac{k_{AB}-k_{s_\beta}}{1+k_{AB}\cdot k_{s_\beta}}\right|=\left|\frac{k_{s_\beta}-k_{BC}}{1+k_{BC}\cdot k_{s_\beta}}\right| \qquad (\dagger)$$

$$\left|\frac{-3-1}{1+(-3)\cdot 1}\right|=\left|\frac{1-k_{BC}}{1+1\cdot k_{BC}}\right|. \qquad \text{(1 bod)}$$

Ova jednadžba ima dva rješenja:

$$k_{BC}=-\frac{1}{3}, \quad k_{BC}=-3, \qquad \text{(2 boda)}$$

ali samo je $k_{BC}=-\frac{1}{3}$ dobro rješenje jer u drugom slučaju pravci na kojima leže dvije stranice trokuta imaju isti koeficijent smjera, što je nemoguće. (1 bod)

Napomena:

Pravilnim poretkom koeficijenata smjera može se izostaviti apsolutna vrijednost u (†) pa se odmah dobije samo jedno, valjano rješenje. U tom slučaju treba postojati skica iz koje se poredak vidi pa se može dati sva 3 boda za određivanje k_{BC}.

Jednadžba pravca BC točkom B uz poznati koeficijent smjera $k_{BC}=-\frac{1}{3}$ je $BC: y-\frac{9}{2}=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, odnosno $BC: x+3y-13=0$. (2 boda)

I, konačno, vrh C je presjek pravaca BC i AC, $C=\left(-\dfrac{52}{5},\dfrac{39}{5}\right)$. (1 bod)

Zadatak B-4.7.

Riješite jednadžbu

$$\binom{x}{x-3}+4\cdot\binom{x+1}{x-2}+\binom{x+2}{3}=125.$$

Rješenje.

Primjenimo li svojstvo simetričnosti binomnih koeficijenata, jednadžbu pišemo u obliku

$$\binom{x}{3}+4\cdot\binom{x+1}{3}+\binom{x+2}{3}=125. \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+4\frac{(x+1)x(x-1)}{6}+\frac{(x+2)(x+1)x}{6}=125. \qquad \text{(2 boda)}$$

Nakon provedenog množenja imamo:

$$\begin{aligned} x\cdot(x^2-3x+2+4x^2-4+x^2+3x+2)&=6\cdot 125 && \text{(4 boda)}\\ 6x^3&=6\cdot 125\\ x&=5 && \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Zadatak B-4.8.

Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sin 1+\sin 3+\sin 5+\ldots+\sin (2n-1)=\frac{\sin ^{2} n}{\sin 1}.$$

Prvo rješenje.

Zadatak napišimo u obliku

$$\sin 1 \cdot \sin 1+\sin 1 \cdot \sin 3+\sin 1 \cdot \sin 5+\ldots+\sin 1 \cdot \sin (2n-1)=\sin ^{2} n.$$

Koristeći identitet $\sin x \cdot \sin y=\frac{1}{2}(\cos (x-y)-\cos (x+y))$ dobivamo: (3 boda)

$$\sin 1 \cdot \sin 1+\sin 1 \cdot \sin 3+\sin 1 \cdot \sin 5+\ldots+\sin 1 \cdot \sin (2n-1)=$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 0-\cos 2+\cos 2-\cos 4+\cos 4-\cos 6+\ldots+\cos (2n-2)-\cos (2n))=$$

(5 bodova)

$$=\frac{1}{2}(1-\cos (2n))=\sin ^{2} n.$$ (2 boda)

Drugo rješenje.

Matematičkom indukcijom.

Provjerimo tvrdnju za $n=1$: $\sin 1=\sin 1$ (baza indukcije) (1 bod)

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n:

$$\sin 1+\sin 3+\sin 5+\ldots+\sin (2n-1)=\frac{\sin ^{2} n}{\sin 1}. \quad \text{(pretpostavka indukcije)}$$ (1 bod)

Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n+1$:

$$\sin 1+\sin 3+\sin 5+\ldots+\sin (2n-1)+\sin (2n+1)=\frac{\sin ^{2}(n+1)}{\sin 1}.$$ (1 bod)

Krenimo od lijeve strane i iskoristimo pretpostavku

$$\sin 1+\sin 3+\sin 5+\ldots+\sin (2n-1)+\sin (2n+1)=\frac{\sin ^{2} n}{\sin 1}+\sin (2n+1)=\frac{\sin ^{2} n+\sin 1 \sin (2n+1)}{\sin 1}$$

(2 boda)

i dalje korištenjem trigonometrijskih identiteta dobivamo

$$=\frac{\frac{1-\cos 2n}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2n-\cos 2(n+1)]}{\sin 1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \cos 2(n+1)}{\sin 1}=\frac{\sin ^{2}(n+1)}{\sin 1}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. (5 bodova)