Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

1\. (4) Rastavite na faktore izraz $x^5 - 5x^3 + 4x$.

2\. (4) Izračunajte

$$\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}} \cdot \frac{x+5}{x-1}.$$

3\. (4) Otac je od kćeri stariji 33 godine, a prije 11 godina kći je od njega bila 4 puta mlađa. Koliko otac ima godina?

4\. (4) Ortocentar jednakokračnog trokuta nalazi se u jednom od vrhova trokuta. Ako su duljine krakova $3\sqrt{2}$ cm, kolika je duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice?

5\. (4) Neka su A, B, C točke na kružnici sa središtem u točki S takve da je $\angle SBC = 30°$, a $\angle BCA = 50°$. Koliko iznosi mjera kuta $\angle ABC$? (Točka S nalazi se unutar trokuta ABC.)

6\. (10) Autobus krene iz početne stanice sa stanovitim brojem putnika. Na prvoj stanici izađe 20% putnika, a uđe 24 putnika. Na idućoj stanici izađe $\frac{2}{3}$ putnika, a nitko ne uđe. Na posljednjoj se stanici iskrca preostalih 16 putnika. Koliko je putnika ušlo u autobus na početnoj stanici?

7\. (10) Ako su a, b realni brojevi takvi da vrijedi $a < -2$, $b < 2$, onda je $b - a > 2 - \frac{1}{2}ab$. Dokažite!

8\. (10) Suma dvoznamenkastog broja i broja koji ima iste znamenke, ali napisane obrnutim redoslijedom je potpuni kvadrat. Odredite sve takve brojeve!

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

1. (4) Riješite jednadžbu
$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-6\right)-2\left(\sqrt{x}-2\right)=-11.$$

2. (4) Izračunajte unutarnji kut pravilnog mnogokuta ako je ukupan broj svih stranica i dijagonala jednak 105.

3. (4) Dana je jednadžba $x^2-px+q=0$, gdje su p i q pozitivni realni brojevi. Ako je razlika rješenja jednadžbe 1, a zbroj rješenja 2, izračunajte p i q.

4. (4) Odredite sve prirodne brojeve x koji zadovoljavaju sustav nejednadžbi
$$x-\frac{6}{x}\geq 1, \quad \frac{1}{x-6}\leq 0.$$

5. (4) Kojom znamenkom završava zbroj svih pozitivnih djelitelja broja 105?

6. (10) Izračunajte površinu lika kojeg u Gaussovoj ravnini određuje skup kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $|z-1-i|\leq\sqrt{2}$, $\operatorname{Re} z\geq 0$, $\operatorname{Im} z\geq 0$.

7. (10) Poprečni presjek tunela ima oblik parabole. Najveća širina tunela je 6 m, a najveća visina 8 m. Može li kamion širine 4 m i visine 4.5 m proći kroz taj tunel? Obrazložite! Ako je visina kamiona 4 m, do koliko najviše metara može iznositi njegova širina tako da prođe kroz tunel?

8. (10) Dvije kružnice dodiruju se iznutra u točki F. Promjer jedne kružnice je 8 cm, a promjer druge dvostruko je manji. Iz rubne točke T promjera $\overline{TF}$ veće kružnice konstruiramo tangentu na manju kružnicu. Ako je točka E sjecište $(E\neq T)$ tangente i veće kružnice, a S_1 središte manje kružnice, odredite opseg trokuta TS_1E.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

1. (4) Izračunajte
$$\frac{\operatorname{tg} 58^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ}{1 + \operatorname{tg} 58^\circ \operatorname{ctg} 62^\circ}.$$

2. (4) Riješite nejednadžbu
$$16^{\sin 3x} - 4 \geq 0.$$

3. (4) Izračunajte
$$\frac{1}{\log_2 n^2} + \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} n^2} + \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}} n^2} + \ldots + \frac{1}{\log_{\frac{n}{n-1}} n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. (4) Oko kružnice promjera 5 cm opisan je jednakokračni trapez površine 36 cm^2. Odredite opseg trapeza.

5. (4) Za koje realne brojeve x funkcija $f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1$ ima najmanju vrijednost?

6. (10) U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ postoji točka M takva da je $|MA| = 7$ cm, $|MB| = 13$ cm i $|MC| = 17$ cm. Izračunajte površinu kvadrata $ABCD$.

7. (10) Riješite jednadžbu
$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(2010x).$$

8. (10) Pravilnu četverostranu krnju piramidu čiji su osnovni bridovi $a = 12$ cm i $c = 8$ cm, a svi bočni bridovi $b = 20$ cm, presijeca ravnina koja prolazi kroz krajnju točku dijagonale manje osnovke okomito na tu dijagonalu. Koliko je oplošje manjeg dijela piramide koji je nastao tim presijecanjem?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

4. veljače 2010.

1. (4) Riješite jednadžbu
$$\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1.$$

2. (4) Odredite jednadžbu kružnice koja dira pravac $x - 3y + 4 = 0$, a središte joj se nalazi na pravcima $2x - 3y - 9 = 0$ i $y + 1 = 0$.

3. (4) Odredite vrijednosti realnog parametra a, ako je koeficijent uz linearni član u razvoju binoma $\left(x + \frac{1}{ax^2}\right)^7$ jednak $\frac{7}{3}$?

4. (4) Ako je z rješenje jednadžbe $z^2 - z + 1 = 0$, koliko je $z^{2010} - z^{1005} + 1$?

5. (4) Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$ i parabola $y^2 = 2px$ sijeku se u točki $T(4\sqrt{3}, 2)$. Kolika je površina trokuta TF_EF_P, ako je F_E fokus elipse koji se nalazi na pozitivnom dijelu osi x, a F_P fokus parabole?

6. (10) Jednadžbe pravaca na kojima leže dvije stranice trokuta su $AB : 3x + y - 3 = 0$, $AC : 3x + 4y = 0$. Ako je jednadžba simetrale kuta β jednaka $s_\beta : x - y + 5 = 0$, odredite koordinate vrhova trokuta ABC.

7. (10) Riješite jednadžbu
$$\binom{x}{x-3} + 4 \cdot \binom{x+1}{x-2} + \binom{x+2}{3} = 125.$$

8. (10) Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi
$$\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \ldots + \sin(2n-1) = \frac{\sin^2 n}{\sin 1}.$$