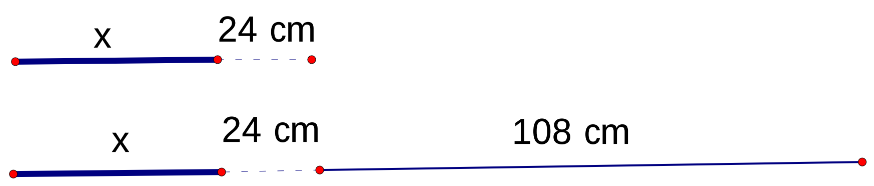
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

4. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

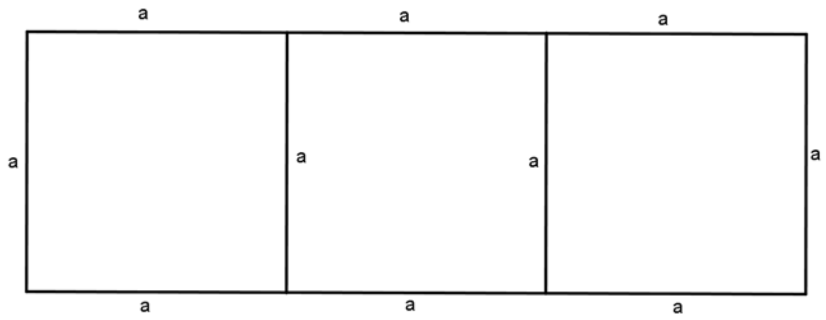
1. 501 · 38 + 86 · (714 – 676) – (15 + 23) · 87=
   $=501 \cdot 38 + 86 \cdot 38 - 38 \cdot 87 =$ 2 BODA
   $=38 \cdot (501 + 86 - 87) =$ 4 BODA
   $=38 \cdot 500 =$ 2 BODA
   $=19\,000$ 2 BODA
   ……………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA
2. Za kućice od broja 1 do broja 9 treba po jedna naljepnica za 1do 9. 1 BOD
   Za kućice od broja 10 do broja 19 treba po jedna naljepnica za 0,2,3,…,9 i 11 naljepnica za 1. 1 BOD
   Za kućice od broja 20 do broja 29 treba po jedna naljepnica za 0,1,3,4,…,9 i 11 naljepnica za 2. 1 BOD
   Na isti način zaključujemo za brojeve 30 do 39, pa za 40 do 49 i tako sve do 90 do 99. 2 BODA
   Za broj 100 treba jedna naljepnica za 1 i dvije naljepnice za 0. 1 BOD
   Zato treba 11 naljepnica za 0, 21 naljepnica za 1 i 20 naljepnica za 2,3,4,…,9. 4 BODA
   ……………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA
3. S obzirom da Marija, baka i djed imaju po 2 noge, onda je ukupan broj nogu tih 240 domaćih životinja $672 - 3 \cdot 2 = 666$. 2 BODA
   Da su sve domaće životinje dvonožne, ukupan broj nogu bi bio $2 \cdot 240 = 480$. Kako je ukupan broj nogu 666 i 666>480, među njima su sigurno neke životinje četveronožne. 4 BODA
   Budući da četveronožna životinja ima 2 noge više od dvonožne, onda je broj četveronožnih životinja $(666 - 480) : 2 = 93$. 4 BODA
   ……………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA
4.



2 BODA

Iz skice je lako zaključiti da je 4·x = x+108. 3 BODA
Slijedi x = 36. 3 BODA
Duljina kraće dužine s početka zadatka je 36 + 24= 60 cm, a dulje 168 cm. 2 BODA
……………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

5. Možemo označiti kao na slici



2 BODA

Opseg pravokutnika iznosi 2(3a+a)=8a. 3 BODA

Opseg kvadrata iznosi 4a. 2 BODA

Zato je opseg pravokutnika 2 puta veći od opsega jednog kvadrata. 3 BODA

…………………………………………………………...……… UKUPNO 10 BODOVA

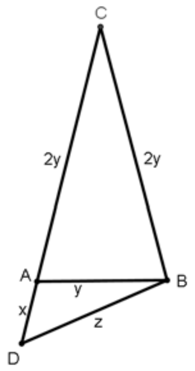
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

5. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. 2 BODA
   Vrijedi 1+3+5=9, 1+3+9=13, 1+5+9=15 i 3+5+9=17. 2 BODA
   Zato znamenke 1, 3 i 5 daju brojeve 135, 153, 315, 351, 513 i 531, 3 BODA
   a znamenke 1, 5 i 9 daju brojeve 159, 195, 519, 591, 915 i 951. 3 BODA
   …………………………………………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA
2. Označimo sa a masu prve djevojčice, b masu druge djevojčice, c masu treće djevojčice, d masu četvrte djevojčice i e masu pete djevojčice.
   Tada vrijedi a+b=72, a+c=75, a+d=76, a+e=77, b+c=78, b+d=80, b+e=81, c+d=82, c+e=85 i d+e=86. 3 BODA
   Zbrojimo li sve jednadžbe, slijedi 4(a+b+c+d+e)=792. 5 BODOVA
   Podijelimo li jednadžbu s 4, tada je a+b+c+d+e=198.
   Masa svih pet djevojčica je 198 kg. 2 BODA
   ……………………………………………..……………… UKUPNO 10 BODOVA
3. Prvih 10 prostih brojeva daju broj 2357111317192329. 2 BODA
   a) Najmanji broj je 11 111 229. 4 BODA
   b) Najveći broj je 77 192 329. 4 BODA
   ……………………………………………………….……. UKUPNO 10 BODOVA
4. Ako bi broj $\overline{7438a}$ bio djeljiv s 5, onda bi znamenka jedinica a bila 0 ili 5. 1 BOD
   Ako bi broj $\overline{7438a}$ bio djeljiv s 9, onda bi zbroj znamenaka 7+4+3+8+a=22+a bio djeljiv s 9 što znači da je a=5. 1 BOD
   Dakle, da bi broj $\overline{7438a}$ bio djeljiv i s 5 i s 9, mora biti a=5. 1 BOD
   Broj 74386 je za 1 veći od broja 74385 te pri dijeljenju i s 5 i s 9 daje ostatak 1.
   2 BODA
   Broj 74387 je za 2 veći od broja 74385 te pri dijeljenju i s 5 i s 9 daje ostatak 2.
   2 BODA
   Jednako se zaključi i za brojeve 74388 i 74389. 2 BODA
   Znamenka a može biti 5, 6, 7, 8 ili 9. 1 BOD
   …………………………………………………..………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka su oznake kao na slici



2 BODA

Tada vrijedi x+y+z=18 i x+4y+z=30. 2 BODA

Slijedi 3y=12 odnosno y=4. 4 BODA

Na kraju, opseg trokuta ΔABC je O=y+2y+2y=5y=20 cm. 2 BODA

…………………………………………………..………… UKUPNO 10 BODOVA

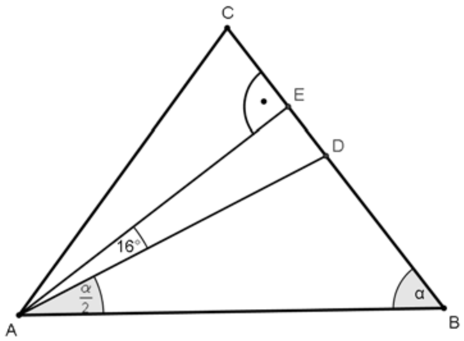
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

6. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x prvi broj, a y drugi broj.
   Tada je $\frac{3}{11}x - \frac{3}{11}y = \frac{2}{7}$ odnosno $\frac{3}{11} \cdot (x - y) = \frac{2}{7}$. 4 BODA
   Slijedi $x - y = \frac{22}{21}$. 2 BODA
   Zato je $\frac{4}{7}x - \frac{4}{7}y = \frac{4}{7} \cdot (x - y) = \frac{4}{7} \cdot \frac{22}{21} = \frac{88}{147}$. 4 BODA
   …………………………………………………..………… UKUPNO 10 BODOVA
2. Kako je $p \cdot n = 2010$ odnosno $p \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, broj p može biti 2, 3, 5 ili 67.
   6 BODOVA
   Za $p = 2$ je $n = 1005$, za $p = 3$ je $n = 670$, za $p = 5$ je $n = 402$ i za $p = 67$ je $n = 30$. 4 BODA
   ………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA
3. Broj je djeljiv brojem 45 ako je djeljiv brojevima 9 i 5. 1 BOD
   Broj je djeljiv brojem 5 ako završava znamenkom 0 ili 5. Budući da broj počinje i završava znamenkom *a*, mora biti *a* = 5. 1 BOD
   Prema uvjetu zadatka vrijedi *c* = 7. 1 BOD
   Broj je djeljiv brojem 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 9. 1 BOD
   Zato zbroj 5 + *b* + 7 + *d* + 5 = 17 + *b* + *d* mora biti djeljiv brojem 9, tj. mora biti *b* + *d* = 1 ili *b* + *d* = 10. 2 BODA
   Prvi uvjet zadovoljavaju brojevi 50715 i 51705. 1 BOD
   Drugi uvjet zadovoljavaju brojevi 51795, 52785, 54765, 56745, 58725 i 59715.
   3 BODA
   ………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA
4. Za jednu minutu veliki i mali puž mogu pojesti $\frac{1}{6}$ jagode. 1 BOD
   Neka je x vrijeme u minutama za koje će mali puž pojesti jagodu sam. Tada će za jednu minutu mali puž pojesti $\frac{1}{x}$ jagode, a veliki puž tri puta više, to jest $\frac{3}{x}$ jagode.
   2 BODA
   Vrijedi $\frac{1}{x} + \frac{3}{x} = \frac{1}{6}$. 2 BODA
   Rješavanjem slijedi $x = 24$. 3 BODA
   Veliki će puž sam pojesti jagodu za 8 minuta. 2 BODA
   …………………………………………………..………… UKUPNO 10 BODOVA

5.



Neka je točka D sjecište simetrale kuta $\sphericalangle CAB$ i kraka $\overline{BC}$, a točka E nožište visine na taj isti krak. Trokut ABE je pravokutni pa je zbroj njegovih šiljastih kutova 90^0. Zato vrijedi $16° + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 90°$. 4 BODA

Slijedi $\alpha = 49°20'$. 2 BODA

Dalje je $\gamma = 180° - 2\alpha = 81°20'$. 2 BODA

Veličine unutarnjih kutova trokuta ABC su $49^0 20'$, $49^0 20'$ i $81^0 20'$. 2 BODA

……………………………………………..…………………… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $a = \frac{7}{3}b$, $b = \frac{5}{2}c$ 2 BODA

$$a = \frac{7}{3}b = \frac{7}{3}\cdot\frac{5}{2}c = \frac{35}{6}c$$

3 BODA

(a – b): (b + c) = $\left(\frac{35}{6}c - \frac{5}{2}c\right):\left(\frac{5}{2}c + c\right) = \left(\frac{10}{3}c\right):\left(\frac{7}{2}c\right) = 20:21$

5 BODOVA

……………………………………………………..……………. UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x nabavna cijena tenisica, izražena u kunama. Budući da je zarada 20%, tj. $0.2x$, slijedi da je prodajna cijena $1.2x$ kn. 1 BOD
Nabavna cijena 20% niža od trenutne bila bi $0.8x$. 1 BOD
Tada bi zarada od 40% na tu nabavnu cijenu bila $0.8x \cdot 0.4 = 0.32x$ kn, 1 BOD
a to znači da bi prodajna cijena uz navedene uvjete bila $0.8x + 0.32x = 1.12x$ kn.
2 BODA
Budući da bi uz navedene uvjete prodajna cijena tenisica bila 30 kn manja, vrijedi jednadžba $1.12x = 1.2x – 30$. 2 BODA
Rješenje navedene jednadžbe je $x = 375$ kn. 1 BOD
Prema tome, prodajna cijena tenisica je 375 + 20%(375) = 375 + 75 = 450 kn.
2 BODA
…………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

3. Zadanu jednadžbu $15x + 3y = 2010$ možemo pisati u obliku $5x + y = 670$. 1 BOD
Tada je $y = 670 – 5x$, pri čemu je $100 \le x < 1000$ i $100 \le y < 1000$, 2 BODA
tj. $100 \le x < 1000$ i $100 \le 670 – 5x < 1000$. 2 BODA
Iz drugog uvjeta dobivamo da je $–570 \le –5x < 330$, tj. $114 \ge x > 66$. 2 BODA
Zbog prvog uvjeta zaključujemo da je $100 \le x \le 114$. 1 BOD
Prema tome, postoji točno 15 parova troznamenkastih prirodnih brojeva ((100, 170), (101, 165), (102, 160), … ,(113, 105) i (114, 100)) koji zadovoljavaju postavljeni zahtjev. 2 BODA
……………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

4. S x označimo broj stranica mnogokuta, a vanjski kut s γ. Tada možemo pisati:
$(x-2)\cdot 180° + \gamma = 2010°$ 3 BODA

odnosno $\begin{aligned} 180x - 360 + \gamma &= 2010° \\ 180x + \gamma &= 2370 \end{aligned}$ 1 BOD

Vanjski kut γ manji je od 180°. Budući da je x prirodan broj, onda je i γ prirodan broj.
2 BODA

Zadnji zapis možemo pročitati na sljedeći način: Pri dijeljenju 2370 sa 180 količnik je x, a ostatak γ. 2 BODA

Prema tome, x =13, γ = 30° 1 BOD

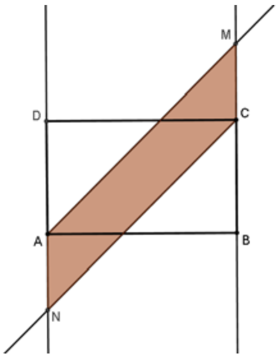
Mnogokut ima 13 stranica 1 BOD

………………………………………………..…………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Kako je $ABCD$ pravokutnik i AM simetrala kuta $\sphericalangle DAB$, onda je $|\sphericalangle MAB| = 45°$ pa je trokut ΔABM jednakokračan pravokutan. 2 BODA

Zato je $|MC| = |BM| - |BC| = 5 - 3 = 2$cm. 1 BOD

Analogno se pokaže da je ΔCDN jednakokračan pravokutan i $|AN| = 2$cm. 1 BOD



S obzirom da je $|AB| = |CD| = 5, |\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle CDN| = 90°$ i $|BM| = |DN| = 5$, prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABM \cong \Delta CDN$. 2 BODA

Iz sukladnosti slijedi $|AM| = |CN|$ pa četverokut $ANCM$ ima oba para nasuprotnih stranica jednakih duljina što znači da je paralelogram. 2 BODA

Zato za površinu P paralelograma $ANCM$ vrijedi $P = |AN| \cdot |AB| = 2 \cdot 5 = 10$ cm^2.
2 BODA

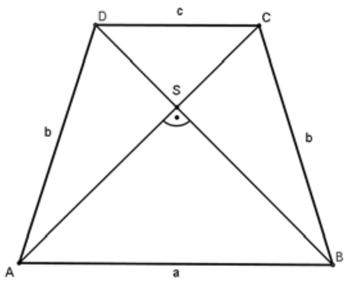
……………………………………………………………..……… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. ožujka 2010.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $10000 = 10^4 =$ 3 BODA
   $= (2 \cdot 5)^4 =$ 3 BODA
   $= 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625$ 4 BODA
   ………………………………………………………………. UKUPNO 10 BODOVA
2. Neka je x najmanji od 10 uzastopnih brojeva.
   Tada je x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)+(x+8)+(x+9)-(x+y)=2009, pri čemu je (x+y) izbrisani broj i $0 \leq y \leq 9$. 2 BODA
   Sređivanjem slijedi 9x-y=1964 odnosno 9x=1964+y. 3 BODA
   Kako je $9 \cdot 219 = 1964 + 7$, onda je x=219 i y=7. 3 BODA
   Izbrisani broj je 219+7 odnosno 226. 2 BODA
   ………………………………………………..…………… UKUPNO 10 BODOVA
3. Kako je trapez jednakokračan, onda je $|AD| = |BC|$ i $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC|$. S obzirom da je stranica $\overline{AB}$ zajednička trokutima ΔABD i ΔABC, prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta BAC$. To znači da je $|AC| = |BD|$ i $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BAC|$. Dakle, trokut ΔABS je jednakokračan pravokutan. 3 BODA



   Zato možemo pisati $|AS| = |BS| = 17x$, $|CS| = |DS| = 7x, x \in \mathbb{R}^+$. Prema Pitagorinom poučku slijedi $a^2 = (17x)^2 + (17x)^2$ odnosno $a = 17x\sqrt{2}$ mm. Slično slijedi $c = 7x\sqrt{2}$ mm i $b = 13x\sqrt{2}$ mm. 3 BODA
   Budući da je opseg trapeza $O = 50\sqrt{2}$, onda je $17x\sqrt{2} + 2 \cdot 13x\sqrt{2} + 7x\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$ odnosno $x = 1$. 2 BODA
   Dalje je $|AC| = |BD| = 17x + 7x = 24x = 24$.
   Dijagonale trapeza su duljine 24 mm. 2 BODA
   ………………………………………………..……………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je *C* mjesto u kojem je autobus susreo automobil, a *D* mjesto u kojem je automobil sustigao autobus. Tada je $|AC| = 10$ km i $|BD| = 20$ km. 1 BOD

Neka je $x = |CD|$. Put od *C* do *D* autobus je prešao za $\frac{x}{40}$ h. Za to vrijeme je automobil prešao put od *C* do *A* i put od *A* do *D* odnosno put duljine $(10 + 10 + x)$ km, a za to mu je trebalo $\left(\frac{x+20}{50} + \frac{1}{4}\right)$ h. 3 BODA

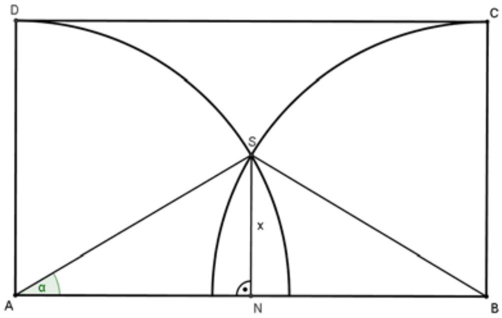
Zato vrijedi jednadžba $\frac{x+20}{50} + \frac{1}{4} = \frac{x}{40}$. 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe slijedi $x = 130$. 2 BODA

Udaljenost mjesta *A* i mjesta *B* je 10+130+20 odnosno 160 km. 2 BODA

…………………………………………………………………. UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je a duljina ,a b visina prednjeg stakla autobusa. Tada je $a = 1.5\sqrt{3}, b = 1.5$. Budući da je $\sqrt{3} < 2$, onda je $a < 2b$. 1 BOD



Neka su oznake kao na slici

Kako je $|AS| = |BS| = b$, onda je ΔABS jednakokračan pa je $|\sphericalangle NBS| = |\sphericalangle SAN|$ i visina $\overline{SN}$ na osnovicu $\overline{AB}$ raspolavlja tu osnovicu, tj, $|AN| = |BN| = \frac{a}{2}$. 2 BODA

S obzirom da je ΔANS pravokutan, prema Pitagorinom poučku vrijedi $|AN|^2 + |NS|^2 = |AS|^2$ pa je $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 = b^2$ odnosno $\left(\frac{1.5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2 = 1.5^2$.

Slijedi $x = \frac{1.5}{2}$ odnosno $x = \frac{b}{2}$ što znači da je ΔANS polovica jednakostraničnog trokuta. Dakle, $\alpha = 30°$. 3 BODA

Neka je P_1 površina kružnog isječka u krugu polumjera $\overline{AS}$ sa središnjim kutom α, P_2 površina kružnog isječka u krugu polumjera $\overline{AD}$ sa središnjim kutom $\sphericalangle DAN$ i P površina stakla kojeg brišu brisači. Tada je $P = 2 \cdot P_2 - 2 \cdot (P_1 - P_{\Delta ANS})$.

Vrijedi $P_1 = \frac{b^2\pi\alpha}{360°} = \frac{2.25\pi}{12}$, $P_2 = \frac{b^2\pi 90°}{360°} = \frac{2.25\pi}{4}$, $P_{\Delta ANS} = \frac{|AN|\cdot|NS|}{2} = \frac{ab}{8} = \frac{2.25\sqrt{3}}{8}$ pa je $P = \frac{2.25\pi}{3} + \frac{2.25\sqrt{3}}{4}$. 2 BODA

Dalje je $\frac{P}{P_{ABCD}} = \frac{2.25\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{2.25\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{4} \approx 85\%$. Brisači brišu približno 85% površine stakla. 2 BODA

…………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA