

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. ožujka 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Velika kazaljka opiše puni krug (360°) za jedan sat pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : 60 = 6^\circ$. 1 BOD
Mala kazaljka opiše puni krug (360°) za 12 sati pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : (60 \cdot 12) = 0.5^\circ$. 1 BOD
Ako s x označimo minute od 18 sati do Dorinog izlaska onda je do tada velika kazaljka opisala $(6x)^\circ$, a mala $(0.5x)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $110^\circ = 180^\circ - (6x)^\circ + (0.5x)^\circ$ 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog izlaska je prošlo $x = 12\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
Ako s y označimo minute od 18 sati do Dorinog ulaska u kuću onda je do tada velika kazaljka opisala $(6y)^\circ$, a mala $(0.5y)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $110^\circ = (6y)^\circ - 180^\circ - (0.5y)^\circ$. 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog povratka kući je prošlo $y = 52\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
 $52\frac{8}{11} - 12\frac{8}{11} = 40$ 1 BOD
Od Dorinog izlaska do povratka u kuću proteklo je 40 minuta. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Velika kazaljka opiše puni krug (360°) za jedan sat pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : 60 = 6^\circ$. 1 BOD
Mala kazaljka opiše puni krug (360°) za 12 sati pa u jednoj minuti opiše luk od $360^\circ : (60 \cdot 12) = 0.5^\circ$. 1 BOD
Ako s x označimo minute od 18 sati do Dorinog izlaska onda je do tada velika kazaljka opisala $(6x)^\circ$, a mala $(0.5x)^\circ$, pa je razlika opisanog kuta bila $(6x)^\circ - (0.5x)^\circ = (5.5x)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $180^\circ - 110^\circ = (5.5x)^\circ$. 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog izlaska je prošlo $x = 12\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
Ako s y označimo minute od 18 sati do Dorinog ulaska u kuću onda je do tada velika kazaljka opisala $(6y)^\circ$, a mala $(0.5y)^\circ$, pa je razlika opisanog kuta bila $(6y)^\circ - (0.5y)^\circ = (5.5y)^\circ$. 1 BOD
Vrijedi $180^\circ + 110^\circ = (5.5y)^\circ$. 1 BOD
Dakle, od 18 sati do Dorinog povratka kući je prošlo $y = 52\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD
 $52\frac{8}{11} - 12\frac{8}{11} = 40$ 1 BOD
Od Dorinog izlaska do povratka u kuću proteklo je 40 minuta. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Označimo s x_1 , x_2 i x_3 dio livade koji će u jednoj minuti pokositi Dinko, Hinko i Vinko redom.

Tada je:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{36} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_2 + x_3 = \frac{1}{45} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_3 + x_1 = \frac{1}{60} \quad 1 \text{ BOD}$$

Zbrajanjem svih jednadžbi dobivamo

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{15}, \text{ odnosno } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{30}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Sada je

$$x_1 = \frac{1}{30} - \frac{1}{45} = \frac{1}{90}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_2 = \frac{1}{30} - \frac{1}{60} = \frac{1}{60}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x_3 = \frac{1}{30} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dakle, za pokositi cijelu livadu Dinku je potrebno 90, Hinku 60, a Vinku 180 minuta. 1 BOD

Svatko od njih će pokositi trećinu livade, pa će Dinku za to trebati 30, Hinku 20, a Vinku 60 minuta.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je x broj kilograma riže prve klase koju je prodavač uzeo.

No, onda je prodavač uzeo $2x$ kg riže druge klase 1 BOD

i $(x + 0.8)$ kg riže treće klase. 1 BOD

Pojedinačna masa slomljenih zrna je redom:

u 1. vreći $0.006 \cdot x$ kg, 1 BOD

u 2. vreći $0.015 \cdot 2x$ kg, 1 BOD

u 3. vreći $0.08 \cdot (x + 0.8)$ kg, 1 BOD

a u smjesi $0.033 \cdot (x + 2x + x + 0.8)$. 1 BOD

Vrijedi:

$$0.006x + 0.015 \cdot 2x + 0.08 \cdot (x + 0.8) = 0.033 \cdot (4x + 0.8) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$0.132x - 0.116x = 0.064 - 0.0264 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$0.016x = 0.0376$$

$$x = 2.35 \text{ kg} \quad 1 \text{ BOD}$$

Iz vreće s prvom klasom riže prodavač je uzeo 2.35 kg riže. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je x broj kilograma riže prve klase koju je prodavač uzeo.

No, onda je prodavač uzeo $2x$ kg riže druge klase 1 BOD

i $(x + 0.8)$ kg riže treće klase. 1 BOD

Pojedinačna masa čitavih zrna je redom:

u 1. vreći $0.994 \cdot x$ kg, 1 BOD

u 2. vreći $0.985 \cdot 2x$ kg, 1 BOD

u 3. vreći $0.92 \cdot (x + 0.8)$ kg, 1 BOD

a u smjesi $0.967 \cdot (x + 2x + x + 0.8)$ kg. 1 BOD

Vrijedi:

$$0.994x + 0.985 \cdot 2x + 0.92 \cdot (x + 0.8) = 0.967 \cdot (4x + 0.8) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$3.884x - 3.868x = 0.7736 - 0.736$$

1 BOD

$$0.016x = 0.0376$$

$$x = 2.35 \text{ kg}$$

1 BOD

Iz vreće s prvom klasom riže prodavač je uzeo 2.35 kg riže.

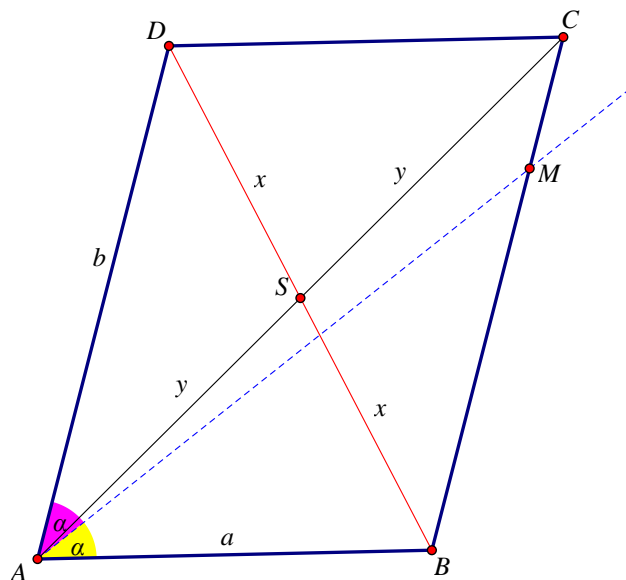
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju, pa možemo označiti

$|SB| = |SD| = x$ i $|SA| = |SC| = y$.

Ako je opseg trokuta $\triangle CDS$ za 5.6 cm manji od opsega trokuta $\triangle BCS$, vrijedi jednakost

$$x + y + b = x + y + a + 5.6,$$

1 BOD

tj. $b = a + 5.6$.

1 BOD

Razmjer $|BM| : |MC| = 7 : 4$ možemo zapisati kao $|BM| = 7k$, $|MC| = 4k$, pa je

$$b = |BM| + |MC| = 11k.$$

1 BOD

Označimo li $|\angle BAD| = 2\alpha$, onda je $|\angle BAM| = \alpha$, jer je AM simetrala kuta $\angle BAD$.

Susjedni kutovi u paralelogramu su suplementarni, pa je $|\angle MBA| = 180^\circ - 2\alpha$.

1 BOD

Iz navedenog slijedi da je mjera trećeg kuta $\triangle ABM$, $|\angle AMB| = \alpha$.

Stoga je $\triangle ABM$ jednakokrakan s duljinama krakova $|AB| = |BM| = a = 7k$.

1 BOD

Uvrštavanjem u jednakost $b = a + 5.6$ dobijemo $11k = 7k + 5.6$, tj. $k = 1.4$.

1 BOD

Slijedi:

$$a = 7k = 9.8 \text{ cm},$$

1 BOD

$$b = 11k = 15.4 \text{ cm}.$$

1 BOD

Opseg paralelograma $ABCD$ je

$$o = 2a + 2b = 19.6 + 30.8 = 50.4 \text{ cm}.$$

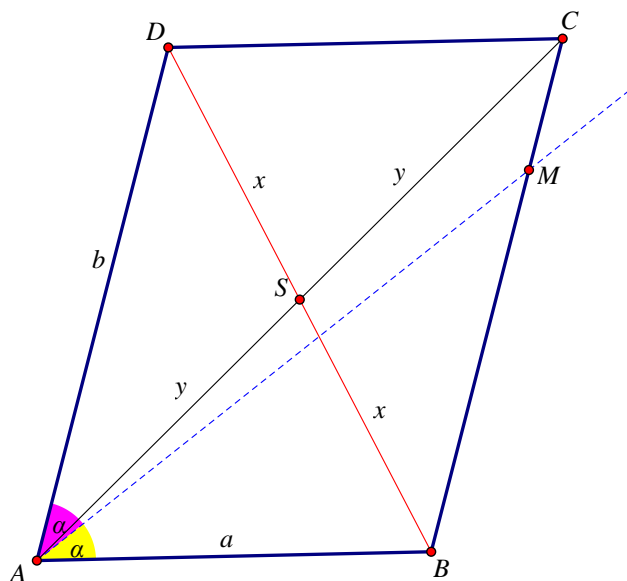
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:

1 BOD



Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$.

Dijagonale paralelograma se raspolavljaju, pa možemo označiti

$|SB| = |SD| = x$ i $|SA| = |SC| = y$.

Ako je opseg trokuta $\triangle CDS$ za 5.6 cm manji od opsega trokuta $\triangle BCS$, vrijedi jednakost

$$x + y + b = x + y + a + 5.6,$$

1 BOD

tj. $b = a + 5.6$.

1 BOD

Razmjer $|BM| : |MC| = 7 : 4$ možemo zapisati kao $|BM| = \frac{7}{11}b$, $|MC| = \frac{4}{11}b$.

1 BOD

Označimo li $|\angle BAD| = 2\alpha$, onda je $|\angle BAM| = \alpha$, jer je AM simetrala kuta $\angle BAD$.

Susjedni kutovi u paralelogramu su suplementarni, pa je $|\angle MBA| = 180^\circ - 2\alpha$.

1 BOD

Iz navedenog slijedi da je mjera trećeg kuta $\triangle ABM$, $|\angle AMB| = \alpha$.

Stoga je $\triangle ABM$ jednakokrakan s duljinama krakova $|AB| = |BM| = a$.

1 BOD

Kako je $|BM| = \frac{7}{11}b$, slijedi $a = \frac{7}{11}b$.

1 BOD

Uvrštavanjem u jednakost $b = a + 5.6$ dobijemo $b = \frac{7}{11}b + 5.6$, odnosno $b = 15.4$ cm.

1 BOD

Slijedi $a = \frac{7}{11}b = \frac{7}{11} \cdot 15.4 = 9.8$ cm.

1 BOD

Opseg paralelograma $ABCD$ je

$$o = 2a + 2b = 19.6 + 30.8 = 50.4 \text{ cm.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Na kuglicama su svi prirodni brojevi $b \leq 10\,000$, pa ćemo prebrojati jednoznamenaste, dvoznamenkaste, troznamenkaste, četveroznamenaste i peteroznamenaste brojeve s traženim svojstvom.

Broj je djeljiv s 5 ako mu je znamenka jedinica 5 ili 0.

- a) Ako je $1 \leq b \leq 9$, onda samo broj 5 zadovoljava uvjete pa imamo samo 1 jednoznamenasti broj s traženim svojstvom.

1 BOD

- b) Ako je $10 \leq b \leq 99$, onda je $b = \overline{x0}$ ili $b = \overline{x5}$. Ako je broj dvoznamenkast, onda je $x \neq 0$, a kako

znamenke moraju biti različite, dvoznamenkastih brojeva oblika $\overline{x0}$ ima 9, 1 BOD

a dvoznamenkastih brojeva oblika $\overline{x5}$ ima 8. 1 BOD

Ukupno je 17 dvoznamenkastih brojeva koji ispunjavaju zadane uvjete.

c) Ako je $100 \leq b \leq 999$, onda je $b = \overline{xy0}$ ili $b = \overline{xy5}$.

Za troznamenkaste brojeve oblika $\overline{xy0}$ stoticu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$, a desetice iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez odabrane znamenke stotica, pa troznamenkastih brojeva oblika $\overline{xy0}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $9 \cdot 8 = 72$. 1 BOD

Za troznamenkaste brojeve oblika $\overline{xy5}$ stoticu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5, a desetice iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5 i odabrane znamenke stotica, pa troznamenkastih brojeva oblika $\overline{xy5}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $8 \cdot 8 = 64$. 1 BOD

Ukupno je $72 + 64 = 136$ troznamenkastih brojeva koji ispunjavaju zadane uvjete.

d) Ako je $1000 \leq b \leq 9999$, onda je $b = \overline{xyz0}$ ili $b = \overline{xyz5}$.

Za četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{xyz0}$ tisućicu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$, stoticu iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez odabrane znamenke tisućica, a desetice iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez odabranih znamenki tisućica i stotica pa četveroznamenkastih brojeva oblika $\overline{xyz0}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. 1 BOD

Analogno, za četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{xyz5}$ tisućicu biramo iz skupa $\{1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5, stoticu iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5 i odabrane znamenke tisućica, a desetice iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$ bez znamenke 5 i odabranih znamenki tisućica i stotica, pa četveroznamenkastih brojeva oblika $\overline{xyz5}$ koji ispunjavaju zadane uvjete ima $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$. 1 BOD

Ukupno je $504 + 448 = 952$ četveroznamenkastih brojeva koji ispunjavaju zadane uvjete.

e) Jedini peteroznamenkasti broj 10 000 ne zadovoljava uvjete zadatka. 1 BOD

Dakle, povoljnih ishoda događaja je $1 + 9 + 8 + 72 + 64 + 504 + 448 = 1106$, 1 BOD
pa je vjerojatnost da je od mogućih 10 000 kuglica izvučena kuglica s traženim svojstvom jednaka

$$p = \frac{1106}{10\,000} = \frac{553}{5\,000} = 0.1106 = 11.06\% . \quad 1 \text{ BOD}$$

Napomena: Vjerojatnost može biti izražena u bilo kojem od navedenih oblika zapisa.

..... UKUPNO 10 BODOVA