Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

1. Odredi zbroj svih znamenaka dekadskog zapisa broja $(10^{2020} + 2020)^2$.

2. Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi $x + y = 1$ i $x^3 + y^3 = 13$. Koliko je $x^2 + y^2$?

3. Dino, Pino i Tino idu u isti vrtić. Za igru svaki dječak treba dvije kockice iste boje, ali nije nužno da kockice koje imaju različiti dječaci budu različite boje. Odgojiteljica u jednoj ladici ima crvene, plave i zelene kockice. Ako izvlači bez gledanja, koliko najmanje kockica treba izvući iz ladice da bi bila sigurna da će od tih kockica svaki dječak moći uzeti dvije istobojne kockice?

4. U posudi A nalazi se četiri kilograma grickalica, od čega je 45% kikiriki. U posudi B nalazi se pet kilograma grickalica, od čega je 48% kikiriki. U posudi C se nalazi jedan kilogram grickalica. Iz te posude se određeni dio prebaci u posudu A, a ostatak u posudu B, i to tako da je udio kikirikija u oba dijela jednak i iznosi k%. Nakon toga je i u posudi A i u posudi B točno 50% kikirikija. Odredi k.

5. Neka je $ABCDE$ pravilni peterokut i neka je F točka unutar njega takva da je trokut ABF jednakostraničan. Odredi kutove trokuta DEF.

* * *

6. Na dvije nasuprotne strane kocke dimenzija $1 \times 1 \times 1$ nalazi se po jedna točka, na druge dvije nasuprotne strane po dvije točke, a na preostale dvije strane po tri točke. Od osam takvih identičnih kocki napravljena je kocka dimenzija $2 \times 2 \times 2$. Matija je izbrojio ukupan broj točaka na svakoj od strana te kocke i zaključio "dobili smo šest uzastopnih prirodnih brojeva". Je li Matija u pravu? Obrazloži odgovor.

7. Duljine kateta pravokutnog trokuta su a i b, a duljina njegove hipotenuze je c. Ako su sve tri duljine prirodni brojevi, te a k tome neparan prost broj, dokaži da je broj $2(a + b + 1)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

1. Odredi sve prirodne brojeve k za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2 - 63x + k = 0$ prosti brojevi.

2. Unutar kružnice k polumjera 20 nalaze se kružnica k_1 polumjera 5 i kvadrat $ABCD$. Pritom se kružnice k i k_1 diraju u točki P, točke A i B leže na kružnici k, a pravac CD dira kružnicu k_1 u točki Q takvoj da je $\overline{PQ}$ promjer te kružnice.

Odredi duljinu stranice kvadrata $ABCD$.

3. Svaki od četiri zida sobe potrebno je obojiti jednom bojom tako da susjedni zidovi ne budu iste boje. Ako na raspolaganju imamo tri različite boje, na koliko je načina moguće obojiti sobu? Nije nužno upotrijebiti sve boje.

4. Odredi najveći prirodni broj n takav da $n + 10$ dijeli $n^3 + 100$.

5. Upiši u prazna polja tablice brojeve tako da u svakom retku, stupcu i dijagonali broj u sredini bude aritmetička sredina druga dva broja. Obrazloži!

	8	
11		
		29

* * *

6. Trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ima opisanu kružnicu k. Njegove dijagonale međusobno su okomite i sijeku se u točki S. Odredi omjer površine kruga omeđenog kružnicom k i zbroja površina trokuta ABS i CDS.

7. Dvije ekipe igraju rukomet. Nijedna ekipa nije postigla 30 ili više pogodaka. Zapisničar na početku utakmice i nakon svakog postignutog pogotka zapisuje rezultat te izračuna zbroj svih znamenaka u rezultatu. Na primjer, kod rezultata 15 : 6 zbroj znamenaka iznosi 12. Koliko je najviše puta tijekom utakmice zapisničar mogao zapisati rezultat u kojem je ukupan zbroj znamenaka jednak 10?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

1. Odredi najmanju i najveću vrijednost koju izraz $\sin^2 x \cos 2x$ postiže za $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Koliko ima četveroznamenkastih prirodnih brojeva u čijem su zapisu točno dvije različite znamenke od kojih se svaka pojavljuje dvaput?

3. Trapezu s krakovima duljina 4 i 5 može se upisati kružnica, a zbroj veličina kutova uz dulju osnovicu iznosi $120°$. Izračunaj površinu tog trapeza.

4. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\log_2 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_8 x + \cdots + \log_{2^{2019}} x \cdot \log_{2^{2020}} x = \frac{2019}{2020}.$$

5. Za prirodni broj $n \geqslant 2$ neka je $D(n)$ najveći prirodni djelitelj broja n različit od n. Na primjer, $D(12) = 6$ i $D(13) = 1$.

Odredi najveći prirodni broj n takav da je $D(n) = 35$.

* * *

6. Posuda oblika uspravnog stošca sadrži određenu količinu vode. Kada je stožac postavljen osnovkom na ravnu površinu vrhom prema gore, razina vode je 8 cm ispod vrha stošca. Ako stožac preokrenemo, razina vode je 2 cm ispod osnovke stošca.

Kolika je visina posude?

7. Dani su prosti brojevi p, q, r i s takvi da je $5 < p < q < r < s < p + 10$.

Dokaži da je zbroj tih četiriju brojeva djeljiv sa 60.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

1. Odredi argument kompleksnog broja z ako vrijedi

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \operatorname{Im}\frac{1}{z} = 2020.$$

2. Zadan je niz (a_n) takav da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ i

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2},$$

za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$.

Dokaži da su svi članovi niza (a_n) kvadrati prirodnih brojeva.

3. Igraća kockica bačena je triput zaredom. Odredi vjerojatnost da je pri svakom bacanju (nakon prvog) pao broj koji nije manji od prethodnog.

4. Odredi skup svih vrijednosti koje postiže funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2020x}{x^2 + x + 1}.$$

5. Odredi zbroj svih prirodnih brojeva n manjih od 1000 za koje je $2^n + 1$ djeljivo s 11.

* * *

6. Odredi točke A i B na paraboli $y^2 = x$ tako da točka $(2, 1)$ pripada dužini $\overline{AB}$, a da polovište dužine $\overline{AB}$ bude što je moguće bliže osi y.

7. Odredi sve prirodne brojeve n koji imaju točno 12 pozitivnih djelitelja

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{12} = n$$

za koje vrijedi $d_4 = 5$ i $d_5^2 + 1 = d_7$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.