ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi zbroj svih znamenaka dekadskog zapisa broja $(10^{2020} + 2020)^2$.

Rješenje.

Raspisivanjem kvadrata zbroja imamo

$(10^{2020} + 2020)^2 = (10^{2020})^2 + 2 \cdot 10^{2020} \cdot 2020 + 2020^2 = 10^{4040} + 404 \cdot 10^{2021} + 4080400.$ 2 boda

Broj 10^{4040} sastoji se od jedne znamenke 1 nakon koje slijedi 4040 znamenki 0. 1 bod

Broj $404 \cdot 10^{2021}$ sastoji se od znamenki $4, 0, 4$ nakon kojih slijedi 2021 znamenka 0. 1 bod

Prema tome, broj $10^{4040} + 404 \cdot 10^{2021} + 4080400$ izgleda ovako:

$$1\,\underbrace{00\ldots0}_{\text{2016 puta}}\,404\,\underbrace{00\ldots0}_{\text{2014 puta}}\,4080400.$$

Dakle, zbroj svih znamenaka je $1 + 4 + 4 + 4 + 8 + 4 = 25$. 2 boda

Zadatak A-1.2.

Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi $x + y = 1$ i $x^3 + y^3 = 13$. Koliko je $x^2 + y^2$?

Prvo rješenje.

Iz formule za kub zbroja

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

slijedi

$$3xy(x + y) = (x + y)^3 - (x^3 + y^3).$$ 2 boda

Uvrštavanjem $x + y = 1$ i $x^3 + y^3 = 13$ imamo

$$3xy = 1^3 - 13 = -12,$$

odnosno $xy = -4$. 2 boda

Sada iz formule za kvadrat zbroja $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ uvrštavanjem $x + y = 1$ i $xy = -4$ imamo

$$1^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot (-4) = x^2 + y^2 - 8,$$

odnosno $x^2 + y^2 = 1 + 8 = 9$. 2 boda

Drugo rješenje.

Iz formule za zbroj kubova

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

i uvjeta zadatka slijedi

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \cdot (x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 = 13.$$ 2 boda

Kvadriranjem uvjeta $x + y = 1$ slijedi

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1,$$

pa oduzimanjem slijedi $3xy = -12$, tj. $xy = -4$. 3 boda

Sada iz $x^2 - xy + y^2 = 13$ dobivamo $x^2 + y^2 = 13 + xy = 13 - 4 = 9$. 1 bod

Napomena: Nije potrebno izračunati vrijednosti x i y. Budući da je $x+y = 1$ i $xy = -4$, te vrijednosti su rješenja jednadžbe $t^2 - t - 4 = 0$, a iznose $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Zadatak A-1.3.

Dino, Pino i Tino idu u isti vrtić. Za igru svaki dječak treba dvije kockice iste boje, ali nije nužno da kockice koje imaju različiti dječaci budu različite boje. Odgojiteljica u jednoj ladici ima crvene, plave i zelene kockice. Ako izvlači bez gledanja, koliko najmanje kockica treba izvući iz ladice da bi bila sigurna da će od tih kockica svaki dječak moći uzeti dvije istobojne kockice?

Prvo rješenje.

Svake dvije kockice iste boje čine *par*. Stoga u svakoj boji odgojiteljica izvlači neki broj parova i najviše još jednu kockicu. Ako bi odgojiteljica izvukla kockice među kojima nema tri para, onda bi broj parova mogao biti najviše dva, te bi uz ta dva para mogla biti najviše po jedna kockica u svakoj boji. Dakle, najveći mogući broj kockica među kojima nema tri para je 7. To znači da ako odgojiteljica izvuče 8 kockica, među njima će sigurno biti tri para. 4 boda

Također, ako odgojiteljica izvuče 7 ili manje kockica, moguće je da neće imati tri para. Na primjer, mogla bi izvući 3 crvene, 3 plave i 1 zelenu kockicu. 2 boda

Dakle, odgovor je 8.

Napomena: Ovaj način razmišljanja pokazuje da bi u slučaju da je broj djece n, a broj boja k, bilo potrebno izvući $2(n-1)+k+1$ kockica kako bismo bili sigurni da će svako dijete moći uzeti par istobojnih kockica.

Napomena: Samo rezultat, tj. odgovor bez obrazloženja vrijedi 0 bodova. Dokaz da za 8 kockica sigurno možemo naći tri para vrijedi 4 boda. Primjer kada za 7 kockica ne možemo naći tri para vrijedi 2 boda.

Potrebno je navesti primjer za 7 kockica među kojima nema tri para istobojnih kockica. Drugi takav primjer je 5 kockica u jednoj boji, te po jedna kockica u druge dvije boje.

Drugo rješenje.

Točan odgovor je 8.

Ako odgojiteljica izvuče sedam kockica, one mogu biti raspoređene tako da su po tri kockice u prvoj i drugoj boji, a jedna kockica u trećoj. U tom slučaju odgojiteljica može spojiti samo dva istobojna para kockica, ali ne i tri. 2 boda

Pretpostavimo da je odgojiteljica izvukla osam kockica i dokažimo da tada sigurno postoje tri istobojna para. Označimo s n broj kockica u najzastupljenijoj boji (pri čemu je moguće da su dvije boje jednako zastupljene). Razlikujemo slučajeve:

1. Ako je $n = 3$, onda je jedini mogući raspored kockica po bojama $3 + 3 + 2$ pa postoji po jedan par svake boje. 1 bod
2. Ako je $n = 4$ ili $n = 5$, onda postoje dva para u toj boji. Prema Dirichletovom principu, od preostale četiri ili tri kockice u dvije boje sigurno postoji barem jedan istobojni par. 1 bod
3. Ako je $n = 6$ ili više, onda postoje tri para kockica u toj boji. 1 bod

U svakom slučaju, vidimo da za osam ili više kockica sigurno postoje tri istobojna para. 1 bod

Zadatak A-1.4.

U posudi A nalazi se četiri kilograma grickalica, od čega je 45% kikiriki. U posudi B nalazi se pet kilograma grickalica, od čega je 48% kikiriki. U posudi C se nalazi jedan kilogram grickalica. Iz te posude se određeni dio prebaci u posudu A, a ostatak u posudu B, i to tako da je udio kikirikija u oba dijela jednak i iznosi $k\%$. Nakon toga je i u posudi A i u posudi B točno 50% kikirikija. Odredi k.

Rješenje.

Ukupna količina kikirikija u posudi A je $45\% \cdot 4 = 0.45 \cdot 4 = 1.8$ kilograma.

Ukupna količina kikirikija u posudi B je $48\% \cdot 5 = 0.48 \cdot 5 = 2.4$ kilograma. 1 bod

Ukupna količina kikirikija u posudi C je $k\% \cdot 1 = \frac{k}{100}$ kilograma.

Neka je x količina grickalica koja je iz posude C prebačena u posudu A. Tada se nakon prebacivanja u posudi A nalazi $50\% \cdot (4 + x) = 2 + 0.5x$ kilograma kikirikija. 1 bod

U posudu B je prebačen ostatak, odnosno $1-x$ kilograma grickalica iz posude C, pa se nakon prebacivanja u posudi B nalazi $50\% \cdot (5+1-x) = 3 - 0.5x$ kilograma kikirikija. 1 bod

Budući da je ukupna količina kikirikija jednaka prije i nakon prebacivanja, vrijedi

$$1.8 + 2.4 + \frac{k}{100} = 2 + 0.5x + 3 - 0.5x,$$ 2 boda

odnosno

$$4.2 + \frac{k}{100} = 5.$$

Iz toga slijedi $\frac{k}{100} = 0.8$, pa vrijedi $k = 80$. 1 bod

Napomena: Rješenje se može zapisati bez uvođenja nepoznanice x. Naime, ukupna količina grickalica je 10 kilograma, te je na kraju 50% te količine kikiriki. Dakle, ukupna količina kikirikija je 5 kilograma. Taj zaključak nosi 3 boda. Po 1 bod nose izračun količina kikirikija u pojedinoj posudi prije prebacivanja, izjednačavanje količina kikirikija prije i poslije prebacivanja, te određivanje broja k.

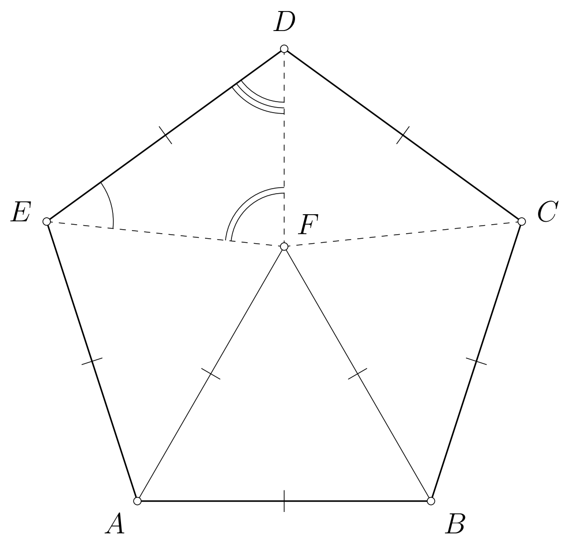
Zadatak A-1.5.

Neka je $ABCDE$ pravilni peterokut i neka je F točka unutar njega takva da je trokut ABF jednakostraničan. Odredi kutove trokuta DEF.

Rješenje.

Zbroj veličina svih kutova pravilnog peterokuta je $(5-2) \cdot 180° = 540°$. Prema tome, svaki unutarnji kut u pravilnom peterokutu je veličine $108°$. 1 bod

Budući da je trokut ABF jednakostraničan, vrijedi $\sphericalangle EAF = \sphericalangle EAB - \sphericalangle FAB = 108° - 60° = 48°$. 1 bod



Nadalje, zbog $|AE| = |AB| = |AF|$ vrijedi da je trokut AEF jednakokračan, pa vrijedi $\sphericalangle AEF = \sphericalangle AFE = \frac{180°-48°}{2} = 66°$. Slijedi

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEA - \sphericalangle AEF = 108° - 66° = 42°.$$ 1 bod

Trokuti DEF i DCF su osnosimetrični s obzirom na pravac DF, pa su sukladni. 1 bod

Slijedi $2\sphericalangle FDE = \sphericalangle FDE + \sphericalangle FDC = \sphericalangle CDE = 108°$, odnosno $\sphericalangle FDE = 54°$. 1 bod

Preostaje izračunati $\sphericalangle DFE = 180° - \sphericalangle DEF - \sphericalangle FDE = 180° - 42° - 54° = 84°$. 1 bod

Kutovi trokuta DEF su $54°$, $42°$ i $84°$.

Napomena: Umjesto sukladnosti trokuta DEF i DCF može se argumentirati da je pravac DF simetrala kuta $\sphericalangle AFB$, te onda izračunati $\sphericalangle DFE = 180° - 66° - 30°$, a na kraju odrediti $\sphericalangle FDE$.

Zadatak A-1.6.

Na dvije nasuprotne strane kocke dimenzija $1 \times 1 \times 1$ nalazi se po jedna točka, na druge dvije nasuprotne strane po dvije točke, a na preostale dvije strane po tri točke. Od osam takvih identičnih kocki napravljena je kocka dimenzija $2 \times 2 \times 2$. Matija je izbrojio ukupan broj točaka na svakoj od strana te kocke i zaključio "dobili smo šest uzastopnih prirodnih brojeva". Je li Matija u pravu? Obrazloži odgovor.

Rješenje.

Svaka manja kocka se nalazi na rubu veće kocke, odnosno svakoj manjoj kocki su u većoj kocki vidljive točno tri strane koje se sastaju u jednom vrhu. Prema tome, svaka manja kocka ima vidljivu po jednu stranu s jednom, dvije i tri točke. 3 boda

Svaka od osam manjih kocaka doprinosi s $1+2+3=6$ točaka, pa je ukupan broj točaka na stranama veće kocke jednak $8 \cdot (1+2+3) = 48$. 2 boda

Pretpostavimo da je Matija u pravu. Neka je n najmanji od šest uzastopnih prirodnih brojeva na stranama veće kocke. Tada su brojevi na stranama kocke n, $n+1$, $\ldots$, $n+5$. Njihov zbroj je

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) = 6n + 15.$$ 2 boda

Slijedi $6n + 15 = 48$, odnosno $6n = 33$, što nije moguće. 3 boda

Dakle, Matija nije u pravu.

Napomena: Odgovor bez obrazloženja vrijedi 0 bodova.

Zadatak A-1.7.

Duljine kateta pravokutnog trokuta su a i b, a duljina njegove hipotenuze je c. Ako su sve tri duljine prirodni brojevi, te a k tome neparan prost broj, dokaži da je broj $2(a+b+1)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje.

Prema Pitagorinom poučku vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, 1 bod
odnosno $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$. 1 bod

Budući da je a prost broj i $c + b > c - b$, mora vrijediti $c + b = a^2$ i $c - b = 1$. 3 boda

Oduzimanjem te dvije jednakosti imamo

$$(c+b) - (c-b) = a^2 - 1,$$

odnosno $2b = a^2 - 1$. 3 boda

Dodavanjem $2a + 2$ s obje strane dobivamo

$$2a + 2b + 2 = a^2 + 2a - 1 + 2,$$

odnosno $2(a+b+1) = (a+1)^2$, što dokazuje tvrdnju zadatka. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve prirodne brojeve k za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2 - 63x + k = 0$ prosti brojevi.

Rješenje.

Označimo s x_1 i x_2 rješenja dane jednadžbe. Tada vrijedi

$$x_1 + x_2 = 63, \qquad x_1 x_2 = k.$$ 2 boda

Budući da je 63 neparan broj, jedini način da bude zbroj dva prosta broja je da je jedan od tih brojeva 2, a drugi onda mora biti 61. 2 boda

U svakom slučaju, slijedi $k = x_1 x_2 = 2 \cdot 61 = 122$. 2 boda

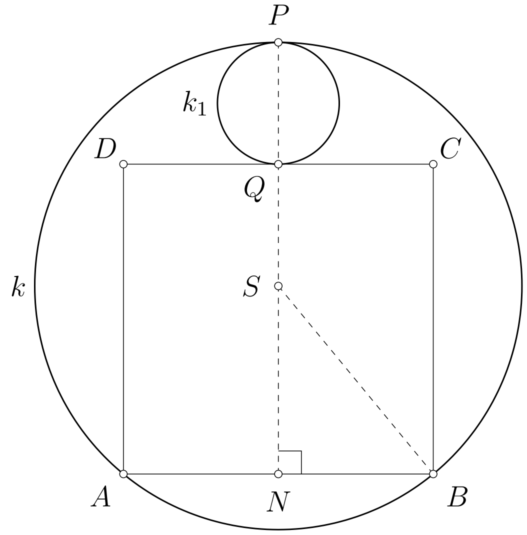
Zadatak A-2.2.

Unutar kružnice k polumjera 20 nalaze se kružnica k_1 polumjera 5 i kvadrat $ABCD$. Pritom se kružnice k i k_1 diraju u točki P, točke A i B leže na kružnici k, a pravac CD dira kružnicu k_1 u točki Q takvoj da je $\overline{PQ}$ promjer te kružnice.

Odredi duljinu stranice kvadrata $ABCD$.

Rješenje.

Označimo s a duljinu stranice kvadrata $ABCD$, sa S središte kružnice k, te s N nožište visine iz S na $\overline{AB}$.



Kako je S središte kružnice polumjera 20, vrijedi $|SP| = |SB| = 20$.

Zbog simetrije, vrijedi $|BN| = \frac{a}{2}$. 1 bod

Budući da je $|PQ| = 10$, vrijedi $|SQ| = |SP| - |PQ| = 10$ i $|SN| = |QN| - |SQ| = a - 10$. 1 bod

Trokut BSN je pravokutan s pravim kutom pri vrhu N, pa prema Pitagorinom poučku imamo

$$(a-10)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 20^2, \qquad \text{2 boda}$$

$$a^2 - 20a + 100 + \frac{a^2}{4} = 400,$$

$$a^2 - 16a - 240 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$\frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 4 \cdot 240}}{2} = \frac{16 \pm 8\sqrt{19}}{2} = 8 \pm 4\sqrt{19}. \qquad \text{1 bod}$$

Kako je $4\sqrt{19}$ veće od 8, a a je duljina stranice pa mora biti pozitivan broj, jedino rješenje zadatka je $a = 8 + 4\sqrt{19}$. 1 bod

Zadatak A-2.3.

Svaki od četiri zida sobe potrebno je obojiti jednom bojom tako da susjedni zidovi ne budu iste boje. Ako na raspolaganju imamo tri različite boje, na koliko je načina moguće obojiti sobu? Nije nužno upotrijebiti sve boje.

Rješenje.

Označimo zidove redom s A, B, C i D u kružnom poretku (A je susjedan B i D itd.).

Zadano bojenje možemo napraviti tako da iskoristimo ili dvije ili tri boje.

Ako koristimo samo dvije boje, tada možemo odabrati jednu od tri boje kojom ćemo obojiti zid A, a potom jednu od preostale dvije boje kojom ćemo obojiti zid B. Boje preostalih zidova su tada jednoznačno određene: zid C moramo obojiti isto kao A, a D isto kao B. 1 bod

Dakle, postoji $3 \cdot 2 = 6$ načina na koje možemo obojiti zidove u dvije boje. 1 bod

Ako koristimo sve tri boje, slično možemo odabrati jednu od tri boje kojom ćemo obojiti zid A te potom jednu od preostale dvije boje kojom ćemo obojiti zid B. Razlikujemo dva slučaja: zid C je iste boje kao zid A, a treću boju koristimo na zidu D ili zid D je iste boje kao zid B i treću boju koristimo na zidu C. 2 boda

Dakle, postoji $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ načina na koje možemo obojiti zidove u tri boje. 1 bod

Ukupno, postoji $6 + 12 = 18$ različitih bojenja. 1 bod

Napomena: Samo rezultat, tj. odgovor bez obrazloženja vrijedi 1 bod.

Zadatak A-2.4.

Odredi najveći prirodni broj n takav da $n+10$ dijeli n^3+100.

Rješenje.

Uočimo da je n^3+1000 zbroj kubova pa vrijedi $n^3+1000=(n+10)(n^2-10n+100)$. 2 boda

Sada imamo

$$\begin{aligned}\frac{n^3+100}{n+10}=\frac{n^3+1000-900}{n+10}&=\frac{(n+10)(n^2-10n+100)-900}{n+10}\\&=n^2-10n+100-\frac{900}{n+10}.\end{aligned}$$ 1 bod

Prema tome, ako je $n+10$ djelitelj od n^3+100, mora biti djelitelj od 900, i obratno. 1 bod

Kako je najveći djelitelj od 900 broj 900, tako je najveći mogući prirodni broj koji zadovoljava tvrdnju zadatka $n=900-10=890$. 2 boda

Napomena: Do jednakosti $\frac{n^3+100}{n+10}=n^2-10n+100-\frac{900}{n+10}$ moguće je doći i na neki drugi način, npr. dijeljenjem polinoma. Svaki (ispravan) izvod vrijedi 3 boda.

Zadatak A-2.5.

Upiši u prazna polja tablice brojeve tako da u svakom retku, stupcu i dijagonali broj u sredini bude aritmetička sredina druga dva broja. Obrazloži!

	8	
11		
		29

Rješenje.

Označimo s a broj u gornjem lijevom kutu, b broj u gornjem desnom kutu te c broj u donjem lijevom kutu.

a	8	b
11		
c		29

Iz gornjeg retka tada slijedi $8=\frac{a+b}{2}$, odnosno $a+b=16$.

Iz lijevog stupca slijedi $11=\frac{a+c}{2}$, odnosno $a+c=22$. 1 bod

Budući da za obje dijagonale vrijedi da je aritmetička sredina prvog i trećeg broja jednaka broju u sredini, slijedi da su i zbrojevi prvog i trećeg broja na obje dijagonale jednaki, odnosno $a+29=b+c$. 1 bod

Dobili smo sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice. Uvrštavanjem npr. $b=16-a$ i $c=22-a$ iz prve dvije jednadžbe u treću jednadžbu, imamo

$$a+29=16-a+22-a,$$

odnosno $3a = 38 - 29 = 9$, tj. $a = 3$.

Iz toga slijedi $b = 16 - 3 = 13$, $c = 22 - 3 = 19$. 2 boda

Preostaje popuniti preostale vrijednosti u tablici. Broj u sredini je aritmetička sredina brojeva 3 i 29 (ili 13 i 19), pa iznosi 16. 1 bod

Preostala dva broja su 21 i 24. Konačno rješenje:

3	8	13
11	$\underline{16}$	$\underline{21}$
19	$\underline{24}$	29

1 bod

Zadatak A-2.6.

Trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ima opisanu kružnicu k. Njegove dijagonale međusobno su okomite i sijeku se u točki S. Odredi omjer površine kruga omeđenog kružnicom k i zbroja površina trokuta ABS i CDS.

Prvo rješenje.

Budući da je upisan u kružnicu, trapez $ABCD$ je jednakokračan. 1 bod

Zbog simetrije slijedi da su trokuti ABS i CDS jednakokračni. 1 bod

Neka je $|AS| = |BS| = p$ i $|CS| = |DS| = q$. Tada je

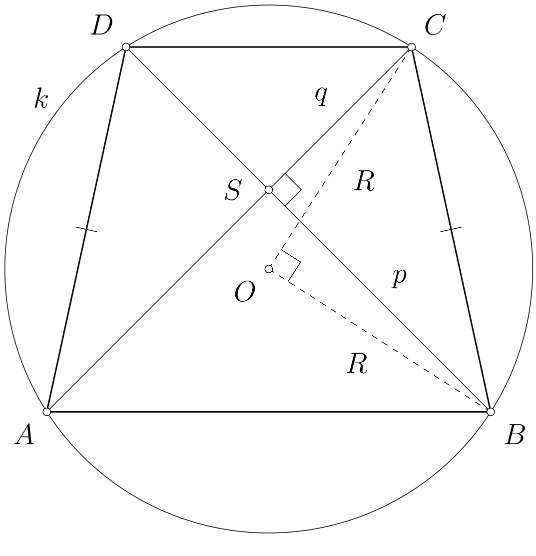
$$P(ABS) + P(CDS) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}.$$

1 bod

Budući da je trokut BSC pravokutan, vrijedi $p^2 + q^2 = |BC|^2$. 1 bod

Neka je O središte, a R polumjer kružnice k.

Budući da je pravokutni trokut ABS jednakokračan, slijedi $\sphericalangle CAB = \sphericalangle SAB = 45°$, pa je središnji kut $\sphericalangle BOC$ nad tetivom $\overline{BC}$ pravi. 2 boda



Dakle, trokut BOC je pravokutan i slijedi $|BC|^2 = 2R^2$. 1 bod

Sada zaključujemo da je

$$P(ABS) + P(CDS) = \frac{p^2 + q^2}{2} = \frac{|BC|^2}{2} = \frac{2R^2}{2} = R^2.$$ 2 boda

Stoga je traženi omjer π. 1 bod

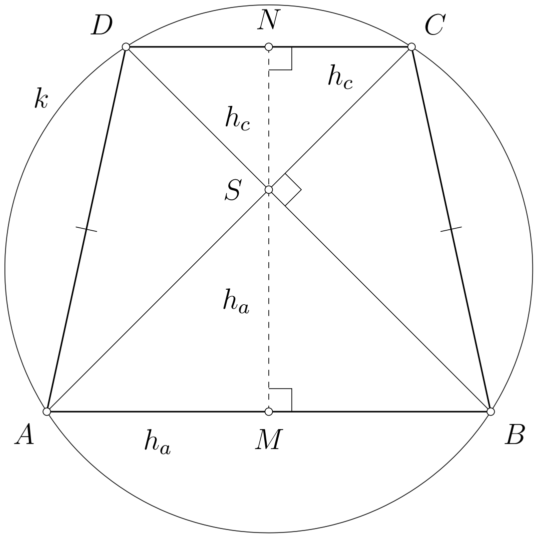
Drugo rješenje.

Označimo $|AB| = a$ i $|CD| = c$. Neka su M i N redom nožišta visina iz vrha S u trokutima ABS i CDS. Označimo i $|SM| = h_a$, $|SN| = h_c$.

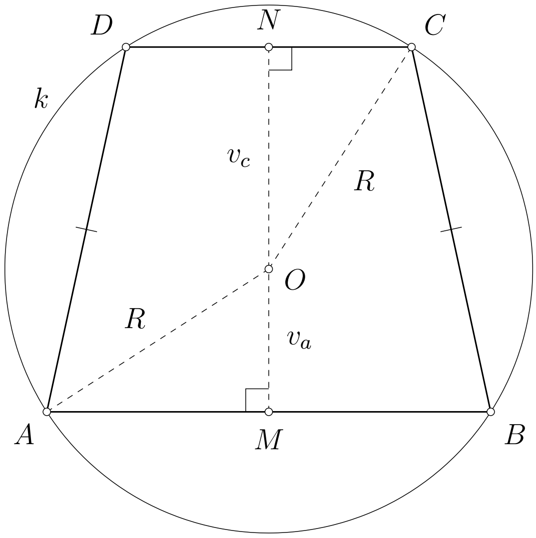
Budući da je upisan u kružnicu, trapez $ABCD$ je jednakokračan. 1 bod

Zbog simetrije slijedi da su trokuti ABS i CDS jednakokračni. 1 bod

Budući da je pravokutni trokut ABS jednakokračan, slijedi da je $|AM| = |SM| = h_a$, tj. $h_a = \dfrac{a}{2}$. Analogno slijedi $h_c = \dfrac{c}{2}$. 1 bod



S druge strane, označimo s O središte, a s R polumjer kružnice k. Nadalje, označimo s $v_a = |OM|$ duljinu visine iz O na $\overline{AB}$, te s $v_c = |ON|$ duljinu visine iz O na $\overline{CD}$.



Iz pravokutnih trokuta AMO i CNO imamo

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_a^2 &= R^2\\ \left(\frac{c}{2}\right)^2 + v_c^2 &= R^2.\end{aligned}$$

1 bod

Oduzimanjem slijedi

$$v_a^2 - v_c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0,$$

odnosno

$$(v_a - v_c)(v_a + v_c) = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{c-a}{2}.$$

1 bod

Uočimo da je $v_a + v_c$ duljina visine trapeza, pa vrijedi $v_a + v_c = h_a + h_c = \frac{a+c}{2}$. 1 bod

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu i dijeljenjem s $\frac{a+c}{2}$ slijedi $v_a - v_c = \frac{c-a}{2}$. 1 bod

Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}v_a - v_c &= \frac{c-a}{2}\\ v_a + v_c &= \frac{a+c}{2}\end{aligned}$$

dobivamo $v_a = \frac{c}{2}$ i $v_c = \frac{a}{2}$. 1 bod

Sada imamo $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. 1 bod

Zbroj površina trokuta ABS i CDS iznosi

$$\frac{a \cdot h_a}{2} + \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} = R^2,$$

pa je traženi omjer jednak π. 1 bod

Zadatak A-2.7.

Dvije ekipe igraju rukomet. Nijedna ekipa nije postigla 30 ili više pogodaka. Zapisničar na početku utakmice i nakon svakog postignutog pogotka zapisuje rezultat te izračuna zbroj svih znamenaka u rezultatu. Na primjer, kod rezultata 15 : 6 zbroj znamenaka iznosi 12. Koliko je najviše puta tijekom utakmice zapisničar mogao zapisati rezultat u kojem je ukupan zbroj znamenaka jednak 10?

Rješenje.

Pri svakoj promjeni rezultata točno jedan od brojeva $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ se uveća za 1, a drugi ostaje nepromijenjen.

Promotrimo neke (fiksne) a i c. Neka su b i d takvi da vrijedi $a+b+c+d=10$. Pri svakoj sljedećoj promjeni rezultata, jedan od njih će se uvećati, a drugi se neće smanjiti. Zato zbroj $a+b+c+d$ raste sve dok su a i c nepromijenjeni. Drugim riječima, za svaki zadani par brojeva a i c, u istoj utakmici može postojati najviše jedan rezultat koji zadovoljava uvjete zadatka. 4 boda

Iz teksta zadatka vidimo da znamenke a i c mogu biti samo 0, 1 i 2.

Broj a na početku ima vrijednost 0, a kasnije se može samo povećati s 0 na 1 te s 1 na 2. Isto vrijedi i za broj c.

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je a prvi od ta dva broja koji se uvećao s 0 na 1. Tada u toj utakmici možemo imati najviše pet različitih parova (a, c):

$$(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,2)$$

ili

$$(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2)$$

ili

$$(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (2,0) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,2).$$

Prema tome, zbroj može biti jednak 10 najviše pet puta. 4 boda

Preostaje pokazati da su ti rezultati zaista i mogući. Rješavanjem jednadžbe $a+b+c+d=10$ za svaki od parova (a, c) te uzimajući u obzir da se rezultat pojedine ekipe ne može smanjiti tijekom utakmice, vidimo da je jedan mogući niz rezultata npr.

$$06:04, \quad 13:06, \quad 21:07, \quad 22:15, \quad 25:21.$$ 2 boda

Napomena: Samo rezultat, tj. odgovor bez obrazloženja, vrijedi 0 bodova. 8 bodova vrijedi dokaz da je moguće najviše pet različitih rezultata, a preostala 2 boda vrijedi primjer jednog takvog niza.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi najmanju i najveću vrijednost koju izraz $\sin^2 x \cos 2x$ postiže za $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje.

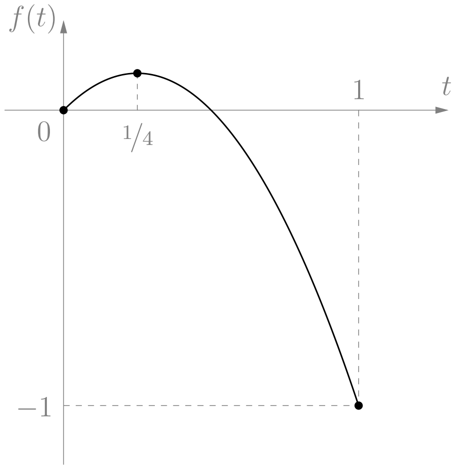
Budući da je $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, vrijedi

$$\sin^2 x \cos 2x = \sin^2 x(1 - 2\sin^2 x).$$ 2 boda

Uz supstituciju $t = \sin^2 x$ tražimo minimum i maksimum kvadratne funkcije

$$f(t) = t(1 - 2t),$$ 1 bod

pri čemu je $t \in [0, 1]$ jer je $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. 1 bod



Maksimum iznosi $\frac{1}{8}$ (nultočke su 0 i $\frac{1}{2}$, pa je tjeme u $t = \frac{1}{4}$), 1 bod
a minimum iznosi -1 i postiže se na rubu za $t = 1$. 1 bod

Napomena: Analogno treba bodovati rješenje u kojem se koristi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, te se promatra izraz $(1 - \cos^2 x)(2\cos^2 x - 1)$.

Napomena: Ako učenik iz $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ i $-1 \leqslant \cos 2x$ zaključi da je $\sin^2 x \cos 2x \geqslant -1$ i da se vrijednost -1 postiže (za $x = \frac{\pi}{2}$), treba dobiti 2 boda. Za određivanje maksimuma bodove se dodjeljuje kao u rješenju, pri čemu ne treba dodatno isticati da se promatra $t \in [0, 1]$ i zaključak za minimum (što zajedno vrijedi 2 boda).

Zadatak A-3.2.

Koliko ima četveroznamenkastih prirodnih brojeva u čijem su zapisu točno dvije različite znamenke od kojih se svaka pojavljuje dvaput?

Prvo rješenje.

Prvu znamenku možemo odrediti na 9 načina (bilo koja osim nule). 1 bod

Na 3 načina možemo odrediti na kojem se mjestu drugi put pojavljuje ta ista znamenka. 2 boda

Na preostala dva mjesta se mora pojaviti ista znamenka, i tu znamenku možemo odabrati na 9 načina jer ne smijemo ponoviti prvu znamenku broja. 2 boda

Ukupan broj takvih brojeva je $9 \cdot 3 \cdot 9 = 243$. 1 bod

Napomena: Posljednji bod treba dodijeliti bez obzira zapiše li učenik rezultat u obliku $9 \cdot 3 \cdot 9$ ili 3^5 ili 243.

Drugo rješenje.

Pozicije znamenki u dva para možemo grupirati na 3 načina ($\overline{aabb}$, $\overline{abab}$ i $\overline{abba}$). 1 bod

Dvije različite znamenke možemo odabrati na $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ načina. 1 bod

Za svaki odabir dviju znamenki (npr. 2 i 5) i grupiranje pozicija (npr. $\overline{abab}$) imamo 2 tražena niza četiriju znamenki (npr. 2525 i 5252). 1 bod

Time smo dobili $3 \cdot 45 \cdot 2 = 270$ mogućnosti. 1 bod

Od tog broja treba oduzeti broj nizova koji počinju znamenkom 0. 1 bod

Takvih nizova je $3 \cdot 9 = 27$ jer na 3 načina možemo odabrati poziciju na kojoj se ponavlja znamenka 0, a na 9 načina možemo odabrati znamenku koja se pojavljuje na druge dvije pozicije. Dakle, traženi broj je $270 - 27 = 243$. 1 bod

Zadatak A-3.3.

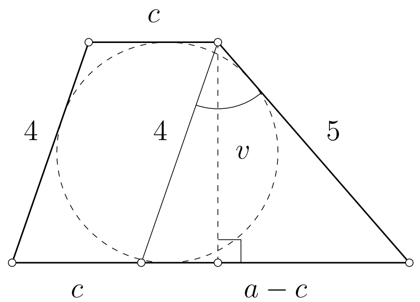
Trapezu s krakovima duljina 4 i 5 može se upisati kružnica, a zbroj veličina kutova uz dulju osnovicu iznosi 120°. Izračunaj površinu tog trapeza.

Rješenje.

Neka su a i c duljine osnovica ($a > c$), a v duljina visine trapeza.

Budući da se trapezu može upisati kružnica, vrijedi $a + c = 4 + 5 = 9$. 1 bod

Povucimo paralelu s jednim krakom kroz vrh u kojem se sijeku drugi krak i kraća osnovica. Dobivamo trokut koji ima stranice duljina $a-c$, 4 i 5, a veličina kuta između stranica duljina 4 i 5 je $180° - 120° = 60°$. 1 bod



Prema poučku o kosinusu slijedi

$$(a-c)^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 25 - 20 = 21,$$

tj. $a - c = \sqrt{21}$. 1 bod

Izražavanjem površine na dva načina dobivamo

$$\frac{(a-c)v}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ}{2}.$$ 1 bod

Uvrštavanjem $a - c = \sqrt{21}$ slijedi $v = \dfrac{10\sqrt{7}}{7}$. 1 bod

Konačno, površina trapeza iznosi

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{45\sqrt{7}}{7}.$$ 1 bod

Zadatak A-3.4.

Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\log_2 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_8 x + \cdots + \log_{2^{2019}} x \cdot \log_{2^{2020}} x = \frac{2019}{2020}.$$

Rješenje.

Za sve $n \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ imamo

$$\begin{aligned} \log_{2^n} x \cdot \log_{2^{n+1}} x &= \frac{\log_2 x}{\log_2 2^n} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} (\log_2 x)^2 && \text{2 boda} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) (\log_2 x)^2, && \text{1 bod} \end{aligned}$$

pa zadana jednadžba postaje

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) (\log_2 x)^2 = \frac{2019}{2020},$$

odnosno

$$\left(1 - \frac{1}{2020}\right) (\log_2 x)^2 = \frac{2019}{2020},$$

odakle dobivamo $(\log_2 x)^2 = 1$. 1 bod

Odavde slijedi $\log_2 x = 1$ ili $\log_2 x = -1$ pa su sva realna rješenja zadane jednadžbe

$$x_1 = 2 \qquad \text{i} \qquad x_2 = \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Napomena: Ako učenik napravi transformaciju

$$\log_{2^n} x \cdot \log_{2^{n+1}} x = \frac{1}{n(n+1)} (\log_2 x)^2$$

samo u nekoliko konkretnih slučajeva, npr. za $n = 1$, treba dobiti 1 bod.

Napomena: Ako učenik izostavi jedno rješenje, npr. $x = \frac{1}{2}$, treba mu oduzeti 1 bod.

Napomena: Pogađanje pojedinačnih rješenja ne nosi bodove. No, ako učenik pokaže da $x = 2$ (ili $x = \frac{1}{2}$) zadovoljava jednadžbu te pritom koristi formule za promjenu baze logaritma i zbroj

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2019 \cdot 2020} = \frac{2019}{2020},$$

treba dobiti 3 boda. Čak i ako učenik na taj način provjeri da su i $x = 2$ i $x = \frac{1}{2}$ rješenja, treba dobiti najviše 3 boda ako nije pokazano da ne postoje druga rješenja.

Zadatak A-3.5.

Za prirodni broj $n \geqslant 2$ neka je $D(n)$ najveći prirodni djelitelj broja n različit od n. Na primjer, $D(12) = 6$ i $D(13) = 1$.

Odredi najveći prirodni broj n takav da je $D(n) = 35$.

Rješenje.

Označimo s $P(n)$ najmanji prirodni djelitelj od n različit od 1. Tada je

$$n = P(n) \cdot D(n) = 35P(n).$$ 2 boda

Također, $P(n)$ je prost broj.

Budući da je 35 djelitelj od n, 5 je jedan od prostih faktora broja n, pa je $P(n)$ manji od ili jednak 5, tj. jedan od brojeva 2, 3 ili 5. 3 boda

Najveći n dobivamo za $P(n) = 5$, tj. za $n = 35 \cdot 5 = 175$. 1 bod

Napomena: Odgovor $n = 175$ bez dodatnog objašnjenja zašto je najveći takav broj nosi 1 bod.

Napomena: Prva 2 boda se ne dodjeljuje za tvrdnju da je n višekratnik od 35, tj. $n = 35k$ za neki k. Potrebno je još istaknuti da je k upravo najmanji prirodni djelitelj od n različit od 1, tj. iskoristiti da djelitelji dolaze u parovima.

Zadatak A-3.6.

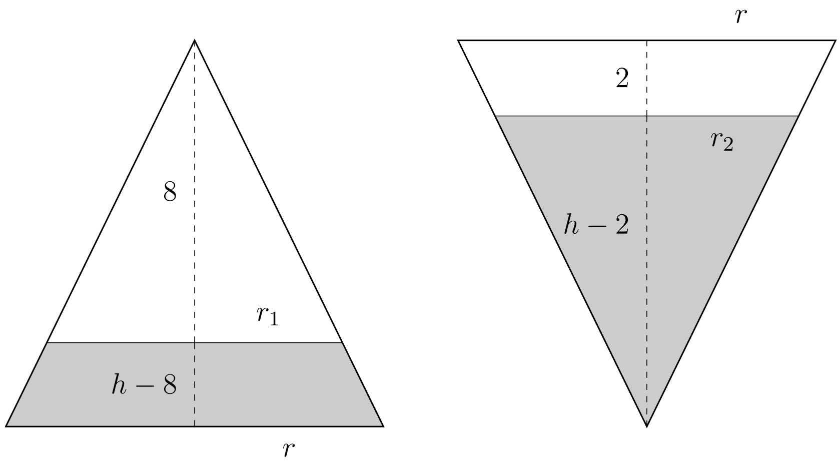
Posuda oblika uspravnog stošca sadrži određenu količinu vode. Kada je stožac postavljen osnovkom na ravnu površinu vrhom prema gore, razina vode je 8 cm ispod vrha stošca. Ako stožac preokrenemo, razina vode je 2 cm ispod osnovke stošca.

Kolika je visina posude?

Rješenje.

Neka je duljina visine posude h cm, a polumjer osnovke r cm.

Promotrimo poprečni presjek posude kada je postavljena vrhom prema gore.



Neka je polumjer osnovke stošca unutar posude koji nije ispunjen vodom r_1 cm. Tada zbog sličnosti vrijedi

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{r_1}.$$ 1 bod

Također, ako je polumjer osnovke stošca koji je ispunjen vodom kada je posuda okrenuta vrhom prema dolje r_2 cm, onda je

$$\frac{h}{r} = \frac{h-2}{r_2}.$$ 1 bod

Obujam vode V (u cm^3) možemo izraziti na dva načina. Kao obujam krnjeg stošca kojem je duljina visine $(h-8)$ cm, a osnovke imaju polumjere r cm i r_1 cm:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h - \frac{1}{3} \cdot r_1^2\pi \cdot 8,$$ 2 boda

te kao obujam stošca duljine visine $(h-2)$ cm i osnovke polumjera r_2 cm:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r_2^2\pi \cdot (h-2).$$ 1 bod

Izjednačavanjem formula za V i dijeljenjem s $\frac{\pi}{3}$ slijedi

$$hr^2 - 8r_1^2 = (h-2)r_2^2,$$ 1 bod

pa uvrštavanjem $r_1 = \dfrac{8r}{h}$ i $r_2 = \dfrac{r(h-2)}{h}$ dobivamo

$$hr^2 - 8 \cdot \frac{64r^2}{h^2} = (h-2) \cdot \frac{(h-2)^2r^2}{h^2}.$$ 2 boda

Dijeljenjem s r^2, množenjem s h^2 i sređivanjem dobivamo

$$h^3 - 512 = (h-2)^3,$$
$$h^2 - 2h - 84 = 0,$$ 1 bod

odakle dobivamo $h_{1,2} = 1 \pm \sqrt{85}$.

Jedino pozitivno rješenje je $1 + \sqrt{85}$, pa je visina posude $(1 + \sqrt{85})\,\mathrm{cm}$. 1 bod

Zadatak A-3.7.

Dani su prosti brojevi p, q, r i s takvi da je $5 < p < q < r < s < p + 10$.

Dokaži da je zbroj tih četiriju brojeva djeljiv sa 60.

Rješenje.

Brojevi p, q, r i s su neparni, pa moraju biti u skupu $\{p, p+2, p+4, p+6, p+8\}$. 1 bod

Brojevi p i $p+6$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, pa $p+6$ nije djeljiv s 3. Također, $p+2$ i $p+8$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, te ne mogu biti djeljivi s 3 jer barem jedan od njih mora biti prost. Konačno, zaključujemo da je $p+4$ djeljiv s 3, te nije prost. Dakle, $q = p+2$, $r = p+6$ i $s = p+8$. 3 boda

Zbroj tih četiriju brojeva je $p + q + r + s = 4(p+4)$. Očito je taj broj djeljiv s 4 i 3, pa preostaje pokazati da je djeljiv s 5. 2 boda

Među pet uzastopnih neparnih brojeva $p, p+2, p+4, p+6, p+8$, točno jedan od njih je djeljiv s 5. 2 boda

No, pokazali smo da jedino $p+4$ nije prost, a ostali su prosti brojevi veći od 5, pa zaključujemo da 5 dijeli $p+4$, odakle slijedi tvrdnja zadatka. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Odredi argument kompleksnog broja z ako vrijedi

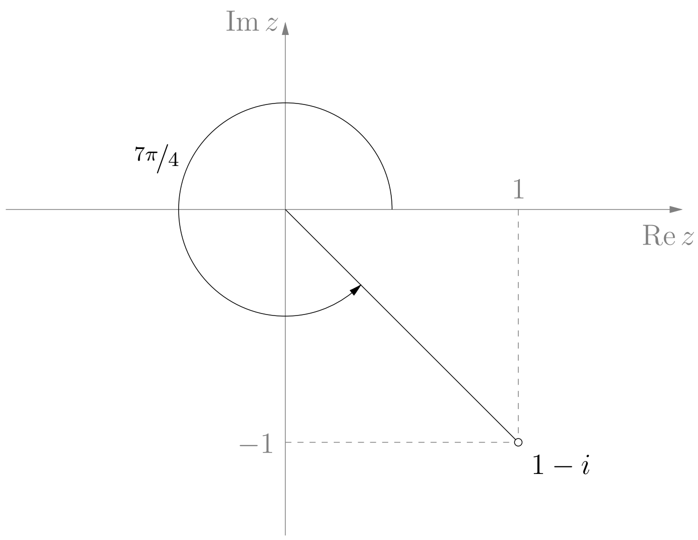
$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \operatorname{Im}\frac{1}{z} = 2020.$$

Prvo rješenje.

Iz uvjeta zadatka imamo $\frac{1}{z} = 2020 + 2020i$. 1 bod

Slijedi da je

$$z = \frac{1}{2020 + 2020i} = \frac{1}{2020} \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1}{4040}(1-i).$$ 3 boda



Argument broja z je isti kao argument broja $1-i$, što možemo odrediti crtajući u kompleksnoj ravnini. Traženi kut iznosi $\varphi = 315° = \frac{7\pi}{4}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Zapišimo kompleksni broj z u obliku $z = x + yi$, gdje su x i y realni brojevi. Tada je

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$ 1 bod

Vidimo da je $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ i $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, odnosno

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = 2020,$$ 1 bod

iz čega slijedi da je $x = -y$ i $x = 2020(x^2 + y^2)$. 1 bod

Budući da je $x \neq 0$, rješavanjem tog sustava dobivamo $x = \frac{1}{4040}$ i $y = -\frac{1}{4040}$. 1 bod

Tada je $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x} = -1$. 1 bod

Slijedi da je argument $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. 1 bod

Zadatak A-4.2.

Zadan je niz (a_n) takav da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ i

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2},$$

za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$.

Dokaži da su svi članovi niza (a_n) kvadrati prirodnih brojeva.

Rješenje.

Primijetimo da je $a_0 = 1 = 2^{2 \cdot 0}$, $a_1 = 4 = 2^{2 \cdot 1}$, $a_2 = 16 = 2^{2 \cdot 2}$ itd.

Tvrdimo da je $a_n = 2^{2n} = (2^n)^2$ za svaki nenegativni cijeli broj n. 2 boda

Tvrdnju ćemo dokazati koristeći matematičku indukciju.

Već smo uočili da tvrdnja vrijedi za $n = 0$ i $n = 1$. 1 bod

Pretpostavimo da za neki prirodni broj $n \geqslant 2$ vrijedi da je

$$a_{n-2} = 2^{2(n-2)} \qquad \text{i} \qquad a_{n-1} = 2^{2(n-1)}.$$ 1 bod

Tada je

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3 \cdot 2^{2n-2} + 4 \cdot 2^{2n-4} = 3 \cdot 2^{2n-2} + 2^{2n-2} = 4 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n}.$$ 1 bod

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da je uistinu $a_n = 2^{2n}$ za svaki nenegativni cijeli broj n, čime je tvrdnja zadatka dokazana. 1 bod

Napomena: Učenik ne mora eksplicitno napisati pretpostavku dok provodi korak indukcije, ali je bitno da je indukcija dvokoračna. Ukoliko učenik u bazi provjeri tvrdnju samo za jednu vrijednost broja n, treba mu oduzeti 1 bod. Ukoliko učenik ne provede bazu, ali u pretpostavci istakne dvije vrijednosti, treba mu oduzeti 1 bod za bazu. Ako pak učenik niti ne provjeri bazu, niti nema jasno zapisanu pretpostavku iz koje je vidljivo da je indukcija dvokoračna, treba mu oduzeti 2 boda.

Zadatak A-4.3.

Igraća kockica bačena je triput zaredom. Odredi vjerojatnost da je pri svakom bacanju (nakon prvog) pao broj koji nije manji od prethodnog.

Prvo rješenje.

Tri uzastopna bacanja kockice određuju uređenu trojku (a, b, c) brojeva a, b i c iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Broj a je broj koji je pao pri prvom bacanju, broj b je broj koji je pao pri drugom, a broj c je onaj koji je pao pri trećem bacanju kockice. Ono što moramo odrediti je vjerojatnost da je $a \leqslant b \leqslant c$.

Za svaki od brojeva a, b i c imamo 6 mogućnosti, stoga je svih mogućih ishoda bacanja kockice triput zaredom

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$ 1 bod

Prebrojimo sada povoljne ishode. Ako je pri prvom bacanju pao broj 1, tj. ako je $a = 1$, onda b može biti bilo koji broj s kockice, a c mora biti iz skupa $\{b, b+1, \dots, 6\}$. 1 bod

Dakle, ako je $a = 1$, onda za $b = 1$ imamo 6 mogućnosti za c, za $b = 2$ imamo 5 mogućnosti za c itd., a za $b = 6$ imamo 1 mogućnost za c. Dakle, za $a = 1$ imamo ukupno

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

dobar ishod. 1 bod

Sličnim razmišljanjem zaključujemo da za

$$\begin{aligned}
a &= 2 \quad \text{imamo } 5+4+3+2+1 = 15 \text{ dobrih ishoda,}\\
a &= 3 \quad \text{imamo } 4+3+2+1 = 10 \text{ dobrih ishoda,}\\
a &= 4 \quad \text{imamo } 3+2+1 = 6 \text{ dobrih ishoda,}\\
a &= 5 \quad \text{imamo } 2+1 = 3 \text{ dobra ishoda,}\\
a &= 6 \quad \text{imamo } 1 = 1 \text{ dobar ishod.}
\end{aligned}$$ 1 bod

Dakle, ukupno imamo $21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$ dobrih ishoda. 1 bod

Konačno, tražena vjerojatnost je

$$\frac{56}{216} = \frac{7}{27}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, ishod bacanja kockice triput zaredom možemo prezentirati uređenom trojkom (a, b, c) brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Za svaki od brojeva a, b i c imamo 6 mogućnosti, stoga je svih mogućih ishoda bacanja kockice triput zaredom

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$ 1 bod

Želimo odrediti broj ishoda bacanja za koja vrijedi da je $a \leqslant b \leqslant c$. Neka su takvi ishodi *dobri* ishodi. Za svaki dobar ishod, promatrajmo trojku $(a, b+1, c+2)$. Primijetimo da je to uvijek trojka međusobno različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$. 2 boda

Primijetimo također da za bilo koja tri međusobno različita broja iz skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ dobijemo dobar ishod (a, b, c), gdje je c za 2 manji od najvećeg, b za 1 manji od srednjeg po veličini i a jednak najmanjem od ta tri broja. 1 bod

Zaključujemo da je dobrih ishoda $\binom{8}{3} = 56$. 1 bod

Konačno, tražena vjerojatnost je $\frac{56}{216} = \frac{7}{27}$. 1 bod

Zadatak A-4.4.

Odredi skup svih vrijednosti koje postiže funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2020x}{x^2 + x + 1}.$$

Rješenje.

Skup svih vrijednosti koje postiže funkcija f je skup svih realnih brojeva a za koje postoji realan broj x takav da je $f(x) = a$. 1 bod

Dakle, moramo odrediti sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$\frac{2020x}{x^2 + x + 1} = a$$

u varijabli x ima barem jedno realno rješenje. 1 bod

Zapišimo tu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + (a - 2020)x + a = 0.$$ 1 bod

Njezina diskriminanta je $D = (a - 2020)^2 - 4a^2$ i ta jednadžba ima realna rješenja ako i samo ako je $D \geqslant 0$. 1 bod

Rješenja kvadratne jednadžbe $-3a^2 - 4040a + 2020^2 = (a - 2020)^2 - 4a^2 = 0$ su $a_1 = -2020$ i $a_2 = \frac{2020}{3}$. 1 bod

Zato skup svih rješenja nejednadžbe $(a - 2020)^2 - 4a^2 \geqslant 0$, pa tako i skup vrijednosti koje postiže funkcija f glasi

$$\left[-2020, \frac{2020}{3}\right].$$ 1 bod

Zadatak A-4.5.

Odredi zbroj svih prirodnih brojeva n manjih od 1000 za koje je $2^n + 1$ djeljivo s 11.

Rješenje.

Treba odrediti zbroj svih prirodnih brojeva $n < 1000$ takvih da broj 2^n pri dijeljenju s 11 daje ostatak 10. 1 bod

Promotrimo ostatke koje brojevi 2^n daju pri dijeljenju s 11:

2^n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	...
ostatak	2	4	8	5	$\boxed{10}$	9	7	3	6	1	2	...

1 bod

Dakle, zaključujemo da prirodni broj 2^n daje ostatak 10 pri dijeljenju s 11 ako i samo ako je $n = 10k + 5$, za neki cijeli broj $k \geqslant 0$. 2 boda

Moramo odrediti zbroj

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + \cdots + 5 \cdot 197 + 5 \cdot 199.$$ 1 bod

No, taj zbroj je jednak

$$5 \cdot (1 + 3 + 5 + \cdots + 197 + 199) = 5 \cdot 100^2 = 50000.$$ 1 bod

Zadatak A-4.6.

Odredi točke A i B na paraboli $y^2 = x$ tako da točka $(2, 1)$ pripada dužini $\overline{AB}$, a da polovište dužine $\overline{AB}$ bude što je moguće bliže osi y.

Rješenje.

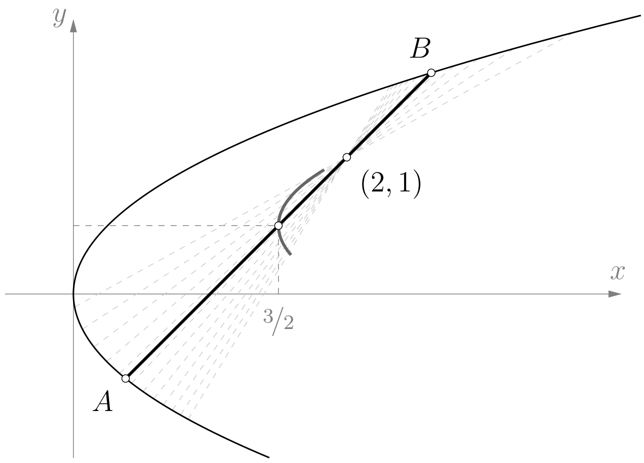
Pravcu koji prolazi točkom $(2, 1)$ pripada jednadžba $y = a(x - 2) + 1$, za neki realni parametar a. Stoga su koordinate krajnjih točaka dužine iz zadatka rješenja sustava

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ y &= a(x-2) + 1. \end{aligned}$$ 1 bod

Ordinate tih točaka su rješenja kvadratne jednadžbe

$$ay^2 - y + (1 - 2a) = 0.$$ 1 bod

Primijetimo da je apscisa polovišta dužine iz zadatka uvijek pozitivan broj, stoga upravo vrijednost te apscise trebamo minimizirati. 1 bod



Ako točke A i B imaju koordinate (x_1, y_1) i (x_2, y_2), onda je vrijednost koju želimo minimizirati jednaka

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} = \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2}{2}$$ 2 boda

$$= \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1-2a}{a}}{2}$$ 1 bod

$$= \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{a} + 2,$$

pri čemu smo u prvom retku koristili činjenicu da su y_1 i y_2 rješenja dobivene kvadratne jednadžbe, te iskoristili Vièteove formule.

Neka je $t = \frac{1}{a}$, kvadratna jednadžba $\frac{1}{2}t^2 - t + 2$ postiže minimum u točki $t = 1$. 2 boda

Dakle, traženu minimalnu udaljenost postižemo za realni parametar $a = 1$. 1 bod

Ta minimalna udaljenost iznosi $\frac{3}{2}$, a točke za koje se postiže su

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$ 1 bod

Zadatak A-4.7.

Odredi sve prirodne brojeve n koji imaju točno 12 pozitivnih djelitelja

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{12} = n$$

za koje vrijedi $d_4 = 5$ i $d_5^2 + 1 = d_7$.

Rješenje.

Kako je $d_4 = 5$, vidimo da točno jedan od brojeva 1, 2, 3, 4 i 5 nije djelitelj broja n. 1 bod

Brojevi 1 i 5 su očito djelitelji broja n. Ako broj 2 nije djelitelj broja n, onda nije ni broj 4, što je nemoguće. Dakle, broj 2 je također djelitelj broja n. 1 bod

Sada imamo dvije mogućnosti. Prva mogućnost je da je $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ i $d_4 = 5$. Primijetimo da je tada i broj 6 djelitelj broja n, pa zaključujemo da je nužno $d_5 = 6$. 1 bod

Iz drugog uvjeta imamo da je $d_7 = d_5^2 + 1 = 37$, pa broj n ima barem četiri različita prosta faktora $(2, 3, 5, 37)$, što znači da ima barem 16 djelitelja, što je kontradikcija. 1 bod

Druga mogućnost je da je $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 4$ i $d_4 = 5$. Vidimo da je tada i broj 10 djelitelj broja n, što znači da je $d_5 \leqslant 10$. 1 bod

Budući da 3 nije djelitelj od n, d_5 ne može biti ni 6 ni 9. 1 bod

Preostaje provjeriti mogućnosti d_5 je 7, 8 ili 10.

Ako je $d_5 = 7$, onda je $d_7 = 7^2 + 1 = 50$, pa bi između d_5 i d_7 trebali biti i drugi djelitelji od 50 poput 10 i 25, što je nemoguće. Ako je $d_5 = 8$, onda je $d_7 = 8^2 + 1 = 65$, pa analogno dobivamo kontradikciju jer bi između d_5 i d_7 trebao biti i broj 13 i broj 26. 1 bod

Ako je $d_5 = 10$, onda bi trebalo vrijediti $d_7 = 10^2 + 1 = 101$, što je prost broj. Budući da je n djeljiv s 4 i 5, jedina mogućnost bi bila $d_6 = 20$. 1 bod

Djelitelje broja n možemo upariti tako da im umnožak bude jednak n, tj. vrijedi $d_i \cdot d_{13-i} = n$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$. Posebno, mora biti $n = d_6 \cdot d_7 = 2020$. 1 bod

Preostaje provjeriti da broj $n = 2020$ zaista zadovoljava sve uvjete zadatka, tj. da između 20 i 101 nema drugih djelitelja i da ima točno 12 djelitelja. Oba uvjeta možemo jednostavno provjeriti ispisujući sve djelitelje broja 2020. To su redom

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20,\ 101,\ 202,\ 404,\ 505,\ 1010,\ 2020.$$ 1 bod

Napomena: Jednom kad se zaključi da je $d_5 \leqslant 10$, onda je moguće zaključivati i na sljedeći način. Primijetimo da je i broj 20 djelitelj broja n. Ako pretpostavimo da je $d_5 < 10$, onda je $d_6 \leqslant 10$ te $d_7 \leqslant 20$ (1 bod). Imamo da je $d_5^2 + 1 = d_7 \leqslant 20$, iz čega slijedi da je $d_5 \leqslant 4$, što je kontradikcija s činjenicom da je $d_5 > d_4 = 5$. Dakle, nužno je $d_5 = 10$. (1 bod)