ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju jednadžbu:

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13.$$

Prvo rješenje.

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $(2^a - 3) \cdot 3^b = 13 - 2^a$. (2 boda)

Budući da je $3^b > 0$, brojevi $2^a - 3$ i $13 - 2^a$ moraju biti istog predznaka, dakle $3 < 2^a < 13$. (2 boda)

To zadovoljavaju samo brojevi $a = 2$ i $a = 3$. (2 boda)

Za $a = 2$ imamo $1 \cdot 3^b = 9$, pa je $b = 2$. (2 boda)

Za $a = 3$ imamo $5 \cdot 3^b = 5$, pa je $b = 0$. (2 boda)

Dakle, jedina rješenja su parovi $(2, 2)$ i $(3, 0)$.

Drugo rješenje.

Izraz možemo zapisati u obliku $2^a \cdot 3^b - 3 \cdot 3^b + 2^a - 3 = 10$, odnosno

$$(2^a - 3)(3^b + 1) = 10. \quad \text{(2 boda)}$$

Uočimo da je $3^b + 1 > 0$, pa je i $2^a - 3 > 0$.

Broj 10 se može na četiri načina prikazati kao umnožak dvaju prirodih brojeva, pa imamo četiri slučaja:

$10 = 1 \cdot 10$.

$2^a - 3 = 1,\ 3^b + 1 = 10 \ \Rightarrow\ 2^a = 4,\ 3^b = 9 \ \Rightarrow\ a = 2,\ b = 2$ (2 boda)

$10 = 2 \cdot 5$.

$2^a - 3 = 2,\ 3^b + 1 = 5 \ \Rightarrow\ 2^a = 5,\ 3^b = 4$ nema rješenja (2 boda)

$10 = 5 \cdot 2$.

$2^a - 3 = 5,\ 3^b + 1 = 2 \ \Rightarrow\ 2^a = 8,\ 3^b = 1 \ \Rightarrow\ a = 3,\ b = 0$ (2 boda)

$10 = 10 \cdot 1$.

$2^a - 3 = 10,\ 3^b + 1 = 1 \ \Rightarrow\ 2^a = 13,\ 3^b = 0$ nema rješenja (2 boda)

Dakle, jedina rješenja su parovi $(2, 2)$ i $(3, 0)$.

Napomena. Za napisana točna rješenja, bez postupka i dokaza da su jedina, treba dati po 1 bod za svako rješenje.

Zadatak A-1.2.

Prirodni broj n je umnožak četiri različita prosta broja p_1, p_2, p_3, p_4 manja od 250. Pritom za neka tri od njih vrijedi

$$p_1p_2p_3 = 3(p_1 + p_2 + p_3),$$

a broj $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ima sve znamenke iste. Odredi sve takve brojeve n.

Rješenje.

Uočimo najprije da je jedan od brojeva p_1, p_2, p_3 jednak 3. Neka je $p_1 = 3$. (1 bod)
(poredak faktora nije bitan)

Tada vrijedi $p_2p_3 = p_2 + p_3 + 3$.

Ova jednadžba se može riješiti na razne načine. Ovdje ćemo navesti samo dva od njih.

Prvi način: Dobivena jednakost ekvivalentna je s $(p_2 - 1)(p_3 - 1) = 4$, (2 boda)

a jedini način da broj 4 prikažemo kao umnožak dvaju različitih prirodnih brojeva je $4 = 4 \cdot 1$. Zato je $p_2 = 2$ i $p_3 = 5$. (2 boda)

Drugi način: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p_2 < p_3$.

Pretpostavimo još da je $p_2 > 2$. Tada je $p_3 > 3$ i vrijedi

$$p_2p_3 = p_2 + p_3 + 3 < 3p_3 \leqslant p_2p_3. \quad \text{(2 boda)}$$

Kontradikcija. Zaključujemo da mora biti $p_2 = 2$ i sada se lako dobije $p_3 = 5$. (2 boda)

Nastavak.

Iz uvjeta da broj $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ima sve znamenke jednake, zaključujemo da je taj broj iz skupa

$$\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 111, 222\}. \quad \text{(1 bod)}$$

Prvi sljedeći broj bi bio 333, no zbog $p_1 + p_2 + p_3 = 10$ i $p_4 < 250$ to ne dolazi u obzir.

Kako je p_4 neparni prosti broj, iz ovog skupa možemo odmah izbaciti parne brojeve, pa je $p_4 + 10 \in \{11, 33, 55, 77, 99, 111\}$. (1 bod)

Direktnom provjerom, dobijemo $p_4 \in \{23, 67, 89, 101\}$. (2 boda)

Konačno, traženi brojevi su

$$n = p_1p_2p_3p_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p_4 = 30p_4 \in \{690, 2010, 2670, 3030\}. \quad \text{(1 bod)}$$

Napomena. Za rješenja napisana bez postupka i dokaza da su jedina, treba dati po 1 bod za svako točno rješenje i oduzeti po 1 bod za svako pogrešno rješenje.

Napomena. Prvi dio zadatka (određivanje brojeva p_1, p_2, p_3) može se riješiti i ovako:

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $p_1 < p_2 < p_3$.

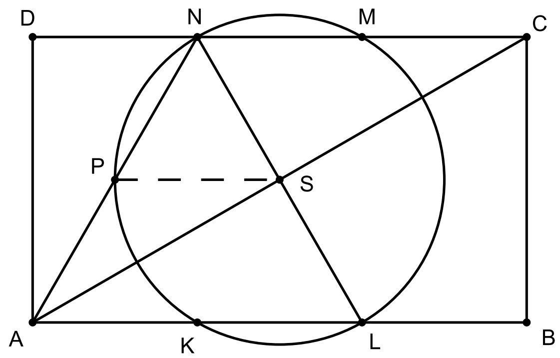
Tada je $3(p_1 + p_2 + p_3) < 9p_3$, pa slijedi $p_1p_2p_3 < 9p_3$, odnosno $p_1p_2 < 9$. (3 boda)

Kako su p_1 i p_2 prosti i različiti, imamo samo jednu mogućnost:
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, a onda je $p_3 = 5$. (2 boda)

Zadatak A-1.3.

Neka je $ABCD$ pravokutnik i k kružnica sa središtem u središtu pravokutnika. Kružnica k siječe stranicu $\overline{AB}$ u točkama K i L, a stranicu $\overline{CD}$ u točkama M i N, i pritom je $LN \perp AC$. Ako polovište dužine $\overline{AN}$ leži na kružnici k, koliki je omjer duljina stranica danog pravokutnika?

Rješenje.



Neka je S središte kružnice k i pravokutnika $ABCD$, te neka je P polovište dužine $\overline{AN}$. Neka je r polumjer kružnice k.

Jasno je da je $\overline{NL}$ promjer kružnice k. (Vidi napomenu.)

Kako je $LN \perp AC$, trokut ASN je pravokutan.

Dužina $\overline{PS}$ je težišnica tog trokuta pa vrijedi $|AP| = |PN| = |PS|$. (2 boda)

Iz $|PN| = |PS| = r = |NS|$ slijedi da je trokut NPS jednakostraničan. (1 bod)

Dužina $\overline{PS}$ je srednjica trokuta ALN (jer je $|AP| = |NP|$ i $|LS| = |SN|$)

pa je $|AL| = 2|PS| = 2r$ i trokut ANL je također jednakostraničan. (2 boda)

Trokut ADN je pravokutan, njegova hipotenuza $\overline{AN}$ je duljine $2r$
i $\sphericalangle NAD = 90^\circ - \sphericalangle LAN = 30^\circ$.

Stoga je $|DN| = \frac{1}{2}|AN| = r$ i $|DA| = |DN|\sqrt{3} = r\sqrt{3}$. (2 boda)

Četverokut $ALCN$ je romb (dijagonale su mu okomite i raspolavljaju se),
pa je $|NC| = |AN| = 2r$. (2 boda)

Prema tome, $|DC| = |DN| + |NC| = r + 2r = 3r$.

Traženi omjer je $|AD| : |CD| = \dfrac{r\sqrt{3}}{3r} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (Odnosno $|AB| : |AD| = \sqrt{3}$.) (1 bod)

Napomena. Dokaz da je $\overline{NL}$ promjer kružnice k:

Neka su G i H polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Trokuti SGL i SHN su sukladni ($\sphericalangle SGL = \sphericalangle SHN = 90^\circ$, $|SL| = |SN| = r$, $|SG| = |SH| = \frac{1}{2}|BC|$), pa je $\sphericalangle GSL = \sphericalangle HSN$. Zaključujemo da NL prolazi kroz S.

Ne zahtijeva se da učenici dokažu ovu i slične tvrdnje koje vrijede zbog simetrije!

Zadatak A-1.4.

Neka su a i b dva različita sedmeroznamenkasta broja od kojih svaki sadrži sve znamenke od 1 do 7. Dokaži da a nije djeljiv s b.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ takav da je $a = n \cdot b$. (1 bod)

Primijetimo da svaki broj pri dijeljenju sa 9 daje isti ostatak kao i zbroj njegovih znamenki. (1 bod)

Dakle, brojevi a i b daju pri dijeljenju s 9 isti ostatak 1 (2 boda)
(suma njihovih znamenaka je $1 + 2 + \cdots + 7 = 28 = 3 \cdot 9 + 1$)

Međutim, ako b daje pri dijeljenju s 9 ostatak 1, tada $a = n \cdot b$ daje pri dijeljenju s 9 isti ostatak kao i n. (2 boda)

To znači da bi n trebao dati ostatak 1 pri dijeljenju s 9. (2 boda)

No, kako mora biti $1 < n < 10$, takvi a i b ne postoje. (2 boda)

Drugo rješenje.

Neka je $a = \overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ i $b = \overline{b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ takav da je $a = n \cdot b$. (1 bod)

Očito vrijedi $a \leqslant 7654321$, $b \geqslant 1234567$,

pa je $n \leqslant \dfrac{7654321}{1234567}$, (1 bod)

tj. $n \leqslant 6$. (1 bod)

Razmotrimo sve slučajeve:

$n = 2$. (1 bod)

Neka je k takav da je $b_k = 4$. Tada bi vrijedilo $a_k = 8$ (ako je $k = 1$ ili $b_{k-1} < 5$) ili $a_k = 9$ (za $b_{k-1} \geqslant 5$, jer se tada "prenosi" 1 iz množenja prethodne znamenke), što je nemoguće, budući da je $a_k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

$n = 3$. (1 bod)

Prvi način. Broj a nije djeljiv sa 3, jer mu zbroj znamenaka $1+2+3+4+5+6+7 = 28$ nije djeljiv s 3. Stoga n ne može biti 3.

Drugi način. U ovom slučaju iz prethodnog množenja prenosimo 0, 1 ili 2 $(3 \cdot 7 = 21)$. Neka je k takav da je $b_k = 6$. Tada bi, u ovisnosti o b_{k+1} (tj. ovisno o tome koliko prenosimo iz prethodnog množenja), a_k bilo 8, 9 ili 0, što je nemoguće.

$n = 4$. (1 bod)

Neka je k takav da je $b_k = 7$. Iz prethodnog množenja prenosi se 0, 1 ili 2 (najveći rezultat je $6 \cdot 4 = 24$). Tada bi, u ovisnosti o b_{k+1}, a_k bilo 8, 9 ili 0, što je nemoguće.

(Netočno bi bilo tvrditi da se pri množenju broja sa znamenkama od 1 do 7 brojem 4 uvijek prenosi najviše 2. Npr. pri množenju $76 \cdot 4$, imamo najprije $6 \cdot 4 = 24$, pišemo 4, prenosi se 2; zatim računamo $7 \cdot 4 + 2 = 30$, pišemo 0 i prenosi se 3.)

$n = 5$. (2 boda)

Prvi način. U ovom slučaju, rezultat množenja bilo koje znamenke brojem 5 završava znamenkom 0 ili 5, a prenosi se najviše 3, jer je $7 \cdot 5 = 35$, a čak i uz raniji prijenos $35 + 3 < 40$. Zbog toga nikako nije moguće dobiti znamenku 4, već samo 0, $0 + 1$, $0 + 2$, $0 + 3$ i 5, $5 + 1$, $5 + 2$, $5 + 3$.

Drugi način. Očito mora vrijediti $b_7 = 1$. Neka je k takav da je $b_k = 7$. U tom množenju se prenosi 3, pa je sljedeći rezultat $a_{k+1} = 3$ ili $a_{k+1} = 8$, ovisno da li je b_{k+1} paran ili neparan. Znamenke 8 nema, pa mora biti b_{k+1} paran i $a_{k+1} = 3$.
Neka je l takav da je $b_l = 6$. I ovdje se prenosi 3, pa istim zaključivanjem dobijemo $a_{l+1} = 3$, što je nemoguće (samo je jedna znamenka 3).

$n = 6$. (2 boda)

Prvi način. Broj a nije djeljiv s 3 (pa onda ni sa 6), jer mu je zbroj znamenaka 28. Stoga njegov djelitelj n ne može biti jednak 6.

Drugi način. Kako je $b \geqslant 1234567$, vrijedi $a \geqslant 6 \cdot 1234567 = 7407402$. Najmanji broj sa znamenkama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 koji to zadovoljava je broj 7412356. Dakle, $a \geqslant 7412356$.
Zato je $b \geqslant 7412356/6 > 1235392$. Najmaji broj sa znamenkama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 koji to zadovoljava je broj 1235467. Dakle, $b \geqslant 1235467$.
Nastavljamo na isti način. Oba broja će se povećavati, malo po malo, dok ne dobijemo da bi broj a trebao biti veći od 7654321. Tada možemo zaključiti da takvi brojevi ne postoje. Potrebno je 28 puta ponoviti opisani postupak!

Dakle, ne postoji takav n.

Napomena. Svaki od ovih slučajeva može se riješiti na razne načine. Bez obzira na način rješavanja, učenik treba dobiti bodove predviđene za pojedini slučaj ako ga je u potpunosti riješio.

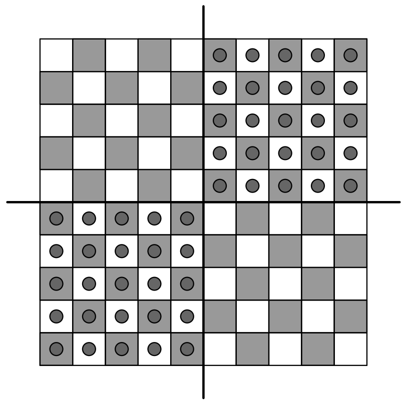
Zadatak A-1.5.

Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y.

Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?

Rješenje.

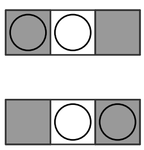
Obojimo polja ploče crnom i bijelom bojom kao na šahovskoj ploči (polje u donjem lijevom kutu je crno). (1 bod)



Tada 25 žetona u donjoj lijevoj četvrtini zauzima 12 bijelih i 13 crnih polja, a 25 žetona u gornjoj desnoj četvrtini također zauzima 12 bijelih i 13 crnih polja. (2 boda)

Primijetimo da žetoni svojim kretanjem uvijek prelaze sa crnog na crno, odnosno sa bijelog na bijelo polje, bez obzira kreću li se horizontalno, vertikalno ili dijagonalno. (2 boda)

Stoga se broj crnih (odnosno bijelih) polja koje žetoni zauzimaju ne mijenja. (2 boda)



Budući da žetoni u početku zauzimaju $12 + 12 = 24$ bijela i $13 + 13 = 26$ crnih polja, a donja polovica ploče se sastoji od 25 bijelih i 25 crnih polja, zaključujemo da je nemoguće postići da se svi žetoni nalaze na donjoj polovici ploče. (3 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$.

Dokaži da je $|z_1 + \alpha z_2| = |\alpha z_1 + z_2|$ za svaki realni broj α.

Prvo rješenje.

Neka je $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

Dani uvjet $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$ ekvivalentan je s:

$$|(a + bi) + 2(c + di)| = |2(a + bi) + (c + di)|,$$

$$|(a + 2c) + (b + 2d)i| = |(2a + c) + (2b + d)i|,$$

$$(a + 2c)^2 + (b + 2d)^2 = (2a + c)^2 + (2b + d)^2, \qquad \text{(2 boda)}$$

$$a^2 + 4ac + 4c^2 + b^2 + 4bd + 4d^2 = 4a^2 + 4ac + c^2 + 4b^2 + 4bd + d^2,$$

$$3c^2 + 3d^2 = 3a^2 + 3b^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \qquad \text{(3 boda)}$$

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Množenjem gornje jednakosti s $1 - \alpha^2$ dobivamo

$$(1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \alpha^2)b^2 = (1 - \alpha^2)c^2 + (1 - \alpha^2)d^2,$$

$$a^2 + \alpha^2 c^2 + b^2 + \alpha^2 d^2 = \alpha^2 a^2 + c^2 + \alpha^2 b^2 + d^2.$$

Sada na obje strane jednakosti dodamo $2\alpha ac + 2\alpha bd$:

$$a^2 + 2\alpha ac + \alpha^2 c^2 + b^2 + 2\alpha bd + \alpha^2 d^2 = \alpha^2 a^2 + 2\alpha ac + c^2 + \alpha^2 b^2 + 2\alpha bd + d^2,$$

$$(a + \alpha c)^2 + (b + \alpha d)^2 = (\alpha a + c)^2 + (\alpha b + d)^2. \qquad \text{(4 boda)}$$

Konačno,

$$|(a + \alpha c) + (b + \alpha d)i| = |(\alpha a + c) + (\alpha b + d)i|,$$

$$|(a + bi) + \alpha(c + di)| = |\alpha(a + bi) + (c + di)|, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno $|z_1 + \alpha z_2| = |\alpha z_1 + z_2|$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Za bilo koji realni broj α vrijedi:

$$\begin{aligned}
&|z_1 + \alpha z_2|^2 - |\alpha z_1 + z_2|^2 \\
&\qquad = (z_1 + \alpha z_2)(\overline{z_1 + \alpha z_2}) - (\alpha z_1 + z_2)(\overline{\alpha z_1 + z_2}) \\
&\qquad = (z_1 + \alpha z_2)(\overline{z_1} + \alpha \overline{z_2}) - (\alpha z_1 + z_2)(\alpha \overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&\qquad = |z_1|^2 + \alpha^2 |z_2|^2 + \alpha(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) - \alpha^2 |z_1|^2 - |z_2|^2 - \alpha(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \\
&\qquad = (1 - \alpha^2)(|z_1|^2 - |z_2|^2).
\end{aligned}$$

(5 bodova)

Kako je $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$, odnosno $|z_1 + 2z_2|^2 - |2z_1 + z_2|^2 = 0$,

i kako je (prema gornjoj formuli)

$$|z_1 + 2z_2|^2 - |2z_1 + z_2|^2 = (1 - 2^2)(|z_1|^2 - |z_2|^2),$$

vrijedi $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 0$. (2 boda)

Zato je (opet prema gornjoj formuli) $|z_1 + \alpha z_2|^2 - |\alpha z_1 + z_2|^2 = 0$, za sve $\alpha \in \mathbb{R}$

odnosno $|z_1 + \alpha z_2| = |\alpha z_1 + z_2|$. (3 boda)

Napomena. Ako učenik gornju formulu $|z_1+\alpha z_2|^2 - |\alpha z_1 + z_2|^2 = (1-\alpha^2)(|z_1|^2 - |z_2|^2)$ izvede samo za $\alpha = 2$, za to treba dobiti 3 boda.

Zadatak A-2.2.

Neka su O i P redom opseg i površina pravokutnika. Dokaži da vrijedi

$$O \geqslant \frac{24P}{O + P + 1}.$$

Prvo rješenje.

Ako duljine stranica pravokutnika označimo s a i b, onda je $O = 2a + 2b$ i $P = ab$

pa je dana nejednakost ekvivalentna s $2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geqslant 24ab$. (1 bod)

Iz A-G nejednakosti slijedi $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ i (2 boda)

$$a + a + b + b + ab + 1 \geqslant 6\sqrt[6]{a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot ab \cdot 1},$$

odnosno $2a + 2b + ab + 1 \geqslant 6\sqrt{ab}$. (6 bodova)

Stoga je

$$2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geqslant 2 \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 6\sqrt{ab} = 24ab$$ (1 bod)

Time je nejednakost dokazana.

Drugo rješenje.

Ako duljine stranica pravokutnika označimo s a i b, onda je $O = 2a + 2b$ i $P = ab$ pa je dana nejednakost ekvivalentna s $2(a+b)(2a+2b+ab+1) \geqslant 24ab$. (1 bod)

Sređivanjem dobivamo $2(a+b)^2 + ab(a+b) + a + b \geqslant 12ab$,

odnosno $2a^2 + 2b^2 - 8ab + a^2b + ab^2 + a + b \geqslant 0$. (1 bod)

To možemo dalje transformirati na razne načine.

Prvi način.

$$2(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2b - 2ab + b) + (ab^2 - 2ab + a) \geqslant 0,$$

$$2(a-b)^2 + (a-1)^2\, b + a\,(b-1)^2 \geqslant 0. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Posljednja nejednakost očito vrijedi jer su a i b pozitivni brojevi, a kvadrati su uvijek nenegativni. (3 boda)

Drugi način.

$$2(a-b)^2 + ab^2 + a^2b + a + b - 4ab \geqslant 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

$$2(a-b)^2 + ab\big(b + a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - 4\big) \geqslant 0.$$

$$2(a-b)^2 + ab\left(\big(a + \frac{1}{a} - 2\big) + \big(b + \frac{1}{b} - 2\big)\right) \geqslant 0. \qquad \text{(3 boda)}$$

Uočimo da je $x + \dfrac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$ za sve $x > 0$. (2 boda)

Stoga je $2(a-b)^2 \geqslant 0$, $ab > 0$, $a + \dfrac{1}{a} - 2 \geqslant 0$ i $b + \dfrac{1}{b} - 2 \geqslant 0$,
pa je nejednakost dokazana. (2 boda)

Treće rješenje.

Dana nejednakost ekvivalentna je s

$$O^2 + OP + O \geqslant 24P. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zbog A-G nejednakosti vrijedi $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ (a i b su duljine stranica pravokutnika).

Zato je $\dfrac{O}{2} \geqslant 2\sqrt{P}$, odnosno $O \geqslant 4\sqrt{P}$. (3 boda)

Odmah vidimo da je $O^2 \geqslant 16P$. $\quad (*)$ (1 bod)

Primjenom A-G nejednakosti dobijamo $OP + O \geqslant 2\sqrt{OP \cdot O}$, (2 boda)
pa je (zbog $O \geqslant 4\sqrt{P}$)

$$OP + O \geqslant 2\sqrt{OP \cdot O} = 2O\sqrt{P} \geqslant 2 \cdot 4\sqrt{P} \cdot \sqrt{P} = 8P. \qquad (**) \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno, zbrajanjem $(*)$ i $(**)$ dobivamo

$$O^2 + (OP + O) \geqslant 16P + 8P = 24P. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak A-2.3.

Odredi sve proste brojeve p za koje je $2^p + p^2$ također prost broj.

Rješenje.

Za $p = 2$, $2^p + p^2 = 8$. (1 bod)

Za $p = 3$, $2^p + p^2 = 17$. (1 bod)

Za svaki neparni prosti broj p, broj 2^p daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. (3 boda)
$(2^p \equiv (3-1)^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3)$

Za svaki prosti $p > 3$, njegov kvadrat p^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. (3 boda)
$(p \equiv \pm 1 \pmod 3 \;\Rightarrow\; p^2 \equiv 1 \pmod 3)$

Dakle, za svaki prosti $p > 3$, broj $2^p + p^2$ je djeljiv s 3
$(2^p + p^2 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3)$

pa ne može biti prost. (1 bod)

Stoga je jedini prosti broj koji zadovoljava uvjet zadatka $p = 3$. (1 bod)

Zadatak A-2.4.

Točka S je središte trokutu ABC upisane kružnice, a simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Dokaži da je $|AS| : |SD| = 2 : 1$ ako i samo ako vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$.

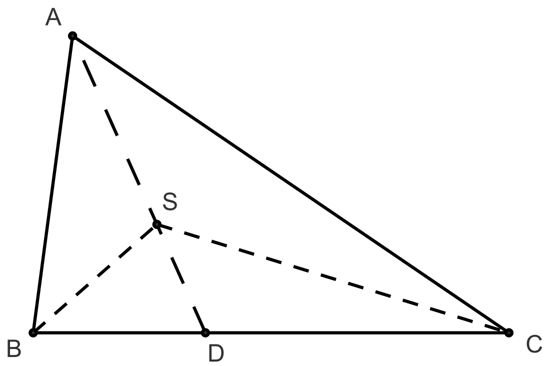
Rješenje.

Označimo s a, b, c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom.

U zadatku treba dokazati dvije tvrdnje:

A. Ako je $|AS| : |SD| = 2 : 1$, onda vrijedi $b + c = 2a$.

B. Ako je $b + c = 2a$, onda vrijedi $|AS| : |SD| = 2 : 1$.



Prvo rješenje.

Površinu trokuta XYZ označavat ćemo $P(XYZ)$. Neka je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC. Uočimo da je udaljenost točke S od svih stranica trokuta jednaka r.

*Dokaz tvrdnje **A**.*

Neka je $|AS| : |SD| = 2 : 1$.

Trokuti ASB i DSB imaju jednake visine iz vrha B,
pa je $P(ASB) : P(BSD) = |AS| : |SD| = 2$, odnosno $P(ASB) = 2P(BSD)$.

Na isti način se pokaže $P(ASC) = 2P(CSD)$. (2 boda)

Zato vrijedi

$$P(ASC) + P(ASB) = 2(P(CSD) + P(BSD)) = 2P(BSC), \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = 2 \cdot \frac{a \cdot r}{2}$$

i konačno $b + c = 2a$. (2 boda)

Dokaz tvrdnje $\boldsymbol{B}$.

Neka vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$, tj. $b + c = 2a$.

Tada vrijedi i $\dfrac{b \cdot r}{2} + \dfrac{c \cdot r}{2} = 2 \cdot \dfrac{a \cdot r}{2}$, odnosno

$$P(ASC) + P(ASB) = 2P(BCS). \qquad \text{(1 bod)}$$

Toj jednakosti je ekvivalentno:

$$P(ASC) + P(ASB) = 2(P(SDC) + P(SDB)),$$

$$\frac{1}{2}|AS|v_c + \frac{1}{2}|AS|v_b = 2\left(\frac{1}{2}|DS|v_c + \frac{1}{2}|DS|v_b\right), \qquad \text{(2 boda)}$$

gdje smo s v_b, v_c označili udaljenosti vrhova B, C od pravca AD.

Dalje dobivamo

$$|AS|(v_b + v_c) = 2|DS|(v_b + v_c), \qquad \text{(1 bod)}$$

i konačno $|AS| = 2|SD|$, što je i trebalo dokazati. (1 bod)

Drugo rješenje.

U ovom rješenju koristimo teorem o simetrali kuta: Ako simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, onda je $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$.

Kako je pravac CS simetrala kuta $\sphericalangle ACD$ u trokutu ADC, vrijedi
$|AS| : |SD| = |AC| : |CD|$. (1 bod)

Analogno, BS je simetrala kuta $\sphericalangle ABD$ trokuta ADB, pa vrijedi
$|AS| : |SD| = |AB| : |BD|$. (1 bod)

Dokaz tvrdnje $\boldsymbol{A}$.

Neka vrijedi $|AS| : |SD| = 2 : 1$. Tada je $|AC| = 2|CD|$ i $|AB| = 2|BD|$. (2 boda)

Zbrajanjem dobivamo $|CA| + |AB| = 2|BC|$. (2 boda)

Dokaz tvrdnje $\boldsymbol{B}$.

Neka vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$.

Relacije koje vrijede zbog teorema o simetrali kuta možemo zapisati u obliku

$$|CA| = \frac{|AS| \cdot |CD|}{|SD|} \quad \text{i} \quad |AB| = \frac{|AS| \cdot |BD|}{|SD|}.$$

Zbrajanjem dobivamo:

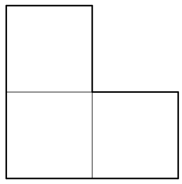
$$\begin{aligned} 2|BC| = |CA| + |AB| &= \frac{|AS| \cdot |CD|}{|SD|} + \frac{|AS| \cdot |BD|}{|SD|} \qquad \text{(2 boda)} \\ &= \frac{|AS|}{|SD|}\big(|CD| + |BD|\big) = \frac{|AS|}{|SD|} \cdot |BC|, \end{aligned}$$

pa je $|AS| : |SD| = 2 : 1$. (2 boda)

Zadatak A-2.5.

Kvadratna ploča podijeljena je na 5×5 jediničnih kvadrata (polja). Na nju postavljamo osam triomina, tako da samo jedno polje ploče ostane neprekriveno.

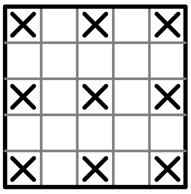
Triomino je lik sastavljen od tri jedinična kvadrata kao na slici:



Odredi koja sve polja dane kvadratne ploče mogu ostati neprekrivena pri takvom popločavanju.

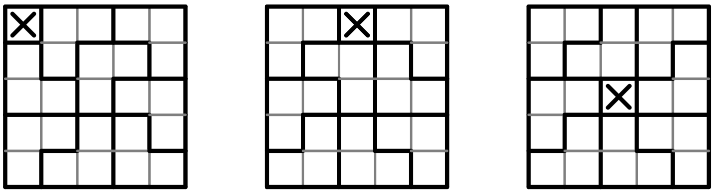
Prvo rješenje.

Neprekriveno može ostati jedno od 9 polja označenih na slici:



(1 bod)

Primjeri takvih prekrivanja dani su na sljedećim slikama



(3 boda)

Dokažimo da neprekriveno polje mora biti jedno od navedenih 9 polja.

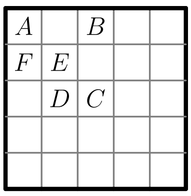
Svaki triomino postavljen na ploču prekriva najviše jedno od tih polja. No, polja ima 9, a triomina samo 8, pa će (po Dirichletovom principu) jedno od tih polja ostati neprekriveno.

(6 bodova)

Drugo rješenje.

Zbog simetrije ploče, možemo uočiti šest različitih tipova polja.

Označimo ih slovima A, B, C, D, E i F, kao na slici:



Polja tipa A, B i C prilikom prekrivanja danim triominima mogu ostati prazna.

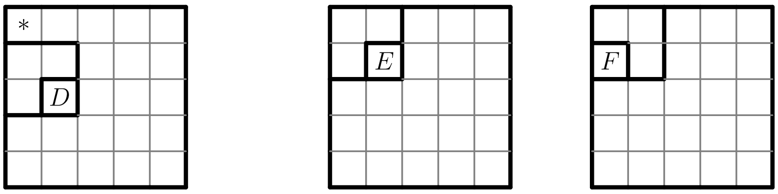
(1 bod)

Primjeri takvih prekrivanja su dani na slikama uz prvo rješenje. (3 boda)

Polja tipa D, E i F ne mogu ostati neprekrivena.

Kad bi polje tipa D ostalo neprekriveno, jedan triomino morao bi biti postavljen u položaj na lijevoj slici (ili njemu simetričan).

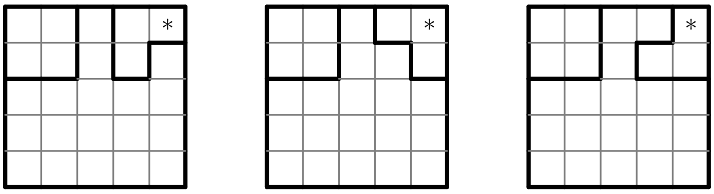
No, tada bi polje označeno zvjezdicom ($*$) bilo nemoguće prekriti. (1 bod)



Kad bi polje tipa E ili F ostalo neprekriveno, jedan triomino morao bi biti postavljen u položaj na slici (gore; sredina i desno). (1 bod)

U oba slučaja dalje nastavljamo na isti način.

Polje sa zvjezdicom može biti prekriveno jedino na sljedeća tri načina:

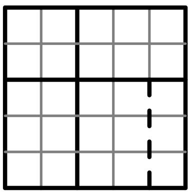


(1 bod)

U prvom slučaju prekrivanje očito nije moguće dovršiti,

a u drugom i trećem slučaju položaj još jednog triomina je određen. (1 bod)

U tim slučajevima, postavljanjem prva tri triomina prekrili smo 3 od 4 polja lijevog gornjeg kvadrata 2×2, i sva polja gornjeg desnog pravokutnika 2×3 na slici.



Sličnim zaključivanjem kao prije vidimo da dva triomina treba upotrijebiti da bismo prekrili donji lijevi pravokutnik 3×2. (1 bod)

No, istim zaključivanjem dolazimo do zaključka da dva triomina trebaju prekriti pravokutnik 3×2 u sredini dolje,

ali onda ostaje pravokutnik 3×1 koji je nemoguće prekriti triominom. (1 bod)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

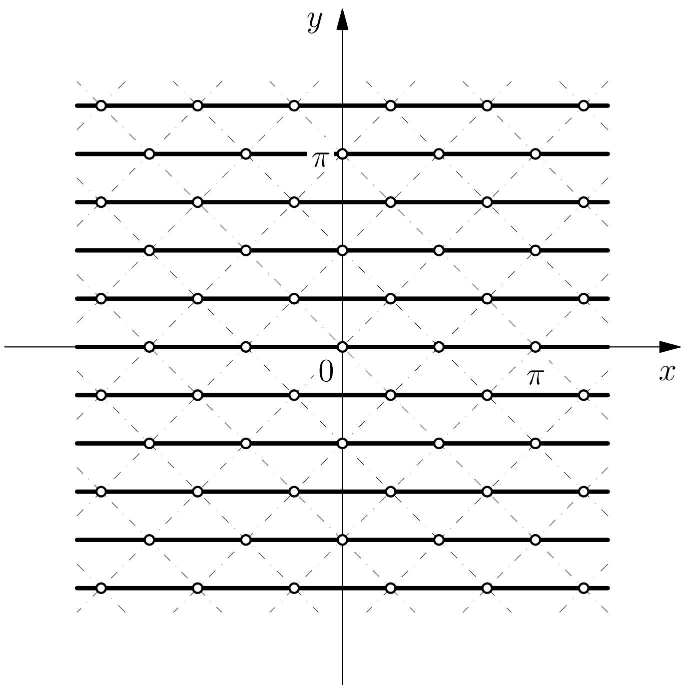
Zadatak A-3.1.

Riješi jednadžbu

$$\operatorname{tg}(x+y)+\operatorname{ctg}(x-y)=\operatorname{tg}(x-y)+\operatorname{ctg}(x+y)$$

i skiciraj u ravnini skup svih njenih rješenja.

Rješenje.



Skup svih rješenja je

$$\left\{ \left(x, \frac{k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{l\pi}{2} \,\middle|\, l \in \mathbb{Z} \right\} \right\}$$

$$\bigcup$$

$$\left\{ \left(x, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2} \,\middle|\, l \in \mathbb{Z} \right\} \right\}$$

Prvo rješenje.

Da bi $\operatorname{tg}(x+y)$ i $\operatorname{tg}(x-y)$ bili definirani, ne smije biti $x \pm y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ni za koji $k \in \mathbb{Z}$.

Da bi $\operatorname{ctg}(x+y)$ i $\operatorname{ctg}(x-y)$ bili definirani, ne smije biti $x \pm y = k\pi$ ni za koji $k \in \mathbb{Z}$.

Odavde je $x \pm y \neq \dfrac{k\pi}{2}$, za sve $k \in \mathbb{Z}$, odnosno $x \neq \pm y + \dfrac{k\pi}{2}$, za sve $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Zadanu jednadžbu možemo transformirati na sljedeći način:

$$\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{ctg}(x-y) = \operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{ctg}(x+y)$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) - \operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{ctg}(x+y) - \operatorname{tg}(x+y)$$

$$\frac{\cos(x-y)}{\sin(x-y)} - \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} - \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$$

$$\frac{\cos^2(x-y) - \sin^2(x-y)}{\sin(x-y)\cos(x-y)} = \frac{\cos^2(x+y) - \sin^2(x+y)}{\sin(x+y)\cos(x+y)} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{\cos(2x-2y)}{\frac{1}{2}\sin(2x-2y)} = \frac{\cos(2x+2y)}{\frac{1}{2}\sin(2x+2y)} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\operatorname{ctg}(2x-2y) = \operatorname{ctg}(2x+2y) \qquad \text{(1 bod)}$$

Ovu jednadžbu lagano rješavamo:

$$2x + 2y = 2x - 2y + m\pi, \qquad \text{za } m \in \mathbb{Z},$$

odnosno $y = \dfrac{m\pi}{4}$, $m \in \mathbb{Z}$. (2 boda)

Uvjet koji smo odredili na početku prelazi u $x \neq \pm\dfrac{m\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$,

odnosno $x \neq (\pm m + 2k)\dfrac{\pi}{4}$, $m, k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

$\Big($Drugim riječima, za parno m, $x \neq \dfrac{l\pi}{2}$ $(l \in \mathbb{Z})$; a za neparno m, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}$ $(l \in \mathbb{Z})$.$\Big)$

Skup rješenja zadane jednadžbe prikazan je na slici. (2 boda)

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, ne smije biti $x \pm y = \dfrac{k\pi}{2}$ ni za koji $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{ctg}(x-y) &= \operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{ctg}(x+y) \\ \operatorname{tg}(x+y) + \frac{1}{\operatorname{tg}(x-y)} &= \operatorname{tg}(x-y) + \frac{1}{\operatorname{tg}(x+y)} \end{aligned}$$

Množeći s $\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)$ dobivamo

$$\operatorname{tg}(x+y)(\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)+1) = \operatorname{tg}(x-y)(\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)+1) \qquad \text{(2 boda)}$$

Odavde slijedi

$$\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}(x-y) \qquad \text{ili} \qquad \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y) = -1.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $x+y = x-y+m\pi$, za $m \in \mathbb{Z}$, odnosno $y = \dfrac{m\pi}{2}$, za $m \in \mathbb{Z}$.

Zbog uvjeta mora biti $x \neq \pm\dfrac{m\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{2}$, tj. $x \neq \dfrac{l\pi}{2}$ za sve $l \in \mathbb{Z}$. (2 boda)

Druga jednadžba $\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y) = -1$, redom je ekvivalentna s

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x+y) &= -\operatorname{ctg}(x-y), \\ \operatorname{tg}(x+y) &= \operatorname{ctg}(y-x), \\ \operatorname{tg}(x+y) &= \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - (y-x)). \end{aligned}$$

Sada slijedi $x+y = \dfrac{\pi}{2} - y + x + m\pi$, za neki $m \in \mathbb{Z}$ i konačno $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2}$, za $m \in \mathbb{Z}$.

Zbog uvjeta vrijedi $x \neq \pm\dfrac{m\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, odnosno $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}$, za sve $l \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Rješenja zadane jednadžbe su sva rješenja prve i sva rješenja druge dobivene jednadžbe.

Skup rješenja zadane jednadžbe prikazan je na slici. (2 boda)

Napomena. Zadatak se može riješiti na mnogo načina. Pri bodovanju se treba držati ovih principa:

- određivanje uvjeta (kada su sve funkcije definirane): 1 bod
- transformacija jednadžbe i rješavanje dobivenih jednadžbi: ukupno 6 bodova

  (za transformaciju 2, 3, 4 boda, a za rješavanje jednadžbi preostalih 4, 3, 2 boda, ovisno o složenosti dobivenih jednadžbi - usporediti dana rješenja)
- uvažavanje uvjeta nakon rješavanja jednadžbi: 1 bod
- skica: 2 boda

Učenik koji uopće ne vodi računa o uvjetima može dobiti najviše 7 bodova
(6 bodova za transformaciju i rješavanje jednadžbi te 1 bod za skicu).

Zadatak A-3.2.

Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $4 \cdot 3^{2m} + 5 = n^2$.

Prvo rješenje.

Uočimo da za $m < 0$ broj $4 \cdot 3^{2m}$ nije cijeli broj, dok $n^2 - 5$ jest, pa u ovom slučaju jednadžba nema rješenje. (2 boda)

Za $m = 0$ imamo $n^2 = 4 \cdot 1 + 5 = 9$, odakle slijedi $n = 3$ ili $n = -3$.

U ovom slučaju imamo dva rješenja: $(0, 3)$ i $(0, -3)$. (2 boda)

Za $m \geqslant 1$, broj $4 \cdot 3^{2m}$ je djeljiv s 3

pa broj $n^2 = 4 \cdot 3^{2m} + 5$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, (3 boda)

no to nije moguće, budući da kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 3 može dati samo ostatke 0 ili 1. Dakle, za $m \geqslant 1$ jednadžba nema rješenja. (3 boda)

Drugo rješenje.

Iz početne jednadžbe slijedi $n^2 - (2 \cdot 3^m)^2 = 5$, odnosno

$$(n - 2 \cdot 3^m)(n + 2 \cdot 3^m) = 5. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako su n^2 i 5 cijeli brojevi, da bi jednadžba bila zadovoljena i $4 \cdot 3^{2m}$ mora biti cijeli broj, a iz toga slijedi $m \geqslant 0$. (2 boda)

Stoga su $n - 2 \cdot 3^m$ i $n + 2 \cdot 3^m$ cijeli brojevi. (1 bod)

Nadalje, vrijedi $n - 2 \cdot 3^m < n + 2 \cdot 3^m$ pa stoga imamo samo dvije mogućnosti: (2 boda)

$$\begin{aligned} n - 2 \cdot 3^m &= 1 \\ n + 2 \cdot 3^m &= 5 \end{aligned}$$

čije je rješenje $n = 3$, $m = 0$ (2 boda)

i

$$\begin{aligned} n - 2 \cdot 3^m &= -5 \\ n + 2 \cdot 3^m &= -1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $n = -3$, $m = 0$. (2 boda)

Napomena. Za točna rješenja bez postupka treba dati po 1 bod za svako rješenje.

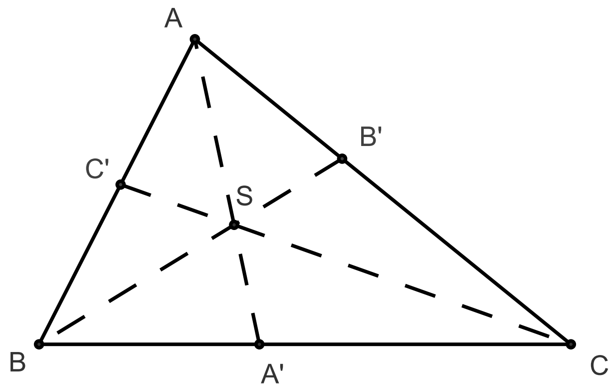
Zadatak A-3.3.

Neka su A', B', C' točke u kojima simetrale kutova trokuta ABC sijeku nasuprotne stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom i neka je S središte upisane kružnice trokuta ABC.

Ako je $|AS| : |SA'| = 3 : 2$, $|BS| : |SB'| = 4 : 3$ i ako je $|AB| = 12$, odredi duljine ostalih stranica trokuta.

Rješenje.

Neka su a, b i c redom duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$.



Koristeći teorem o simetrali kuta za trokut ABA' dobivamo

$|AB| : |A'B| = |AS| : |A'S| = 3 : 2$, a iz toga slijedi $|A'B| = \dfrac{2c}{3}$. (2 boda)

Slično, za trokut ABB' dobivamo $|AB| : |AB'| = |BS| : |B'S| = 4 : 3$,

a iz toga slijedi $|AB'| = \dfrac{3c}{4}$. (2 boda)

Za trokut ACA' dobivamo $|AC| : |A'C| = |AS| : |A'S| = 3 : 2$,

a iz toga slijedi $b : \left(a - \dfrac{2c}{3}\right) = 3 : 2$, odakle je $3a - 2c = 2b$. (2 boda)

Slično, za trokut BCB' imamo $|BC| : |B'C| = |BS| : |B'S| = 4 : 3$,

odakle je $a : \left(b - \dfrac{3c}{4}\right) = 4 : 3$, tj. $4b - 3c = 3a$. (2 boda)

Uvažavajući $c = 12$, rješavanjem sustava

$$
\begin{aligned}
3a - 2c &= 2b \\
4b - 3c &= 3a
\end{aligned}
$$

dobivamo $a = 28$, $b = 30$. (2 boda)

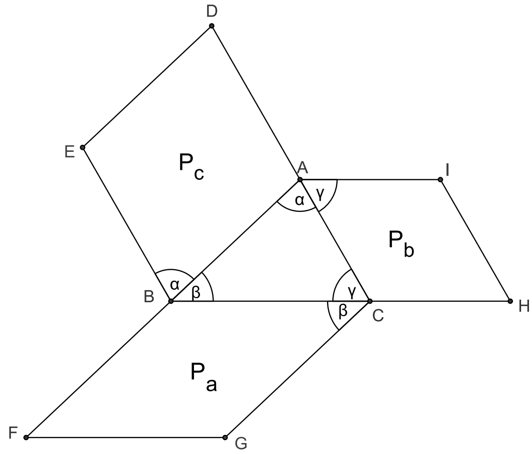
Zadatak A-3.4.

Nad stranicama trokuta ABC površine P nalaze se rombovi $ABED$, $BCGF$ i $CAIH$ tako da je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BCG = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CAI = \sphericalangle ACB$.

Dokaži da je zbroj površina triju rombova veći ili jednak $6P$.
Dokaži da se jednakost postiže ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

Prvo rješenje.

Označimo redom površine rombova $BCGF$, $CAIH$, $ABED$ s P_a, P_b, P_c, a kutove trokuta ABC s α, β, γ.



Tada je

$$P_a = a^2 \sin \beta, \qquad P_b = b^2 \sin \gamma, \qquad P_c = c^2 \sin \alpha. \tag{2 boda}$$

Koristeći sinusov poučak $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma} = 2R$, pri čemu je R polumjer kružnice opisane trokutu ABC, dobivamo

$$\begin{aligned} P_a + P_b + P_c &= a^2 \sin \beta + b^2 \sin \gamma + c^2 \sin \alpha \\ &= \frac{a^2 b}{2R} + \frac{b^2 c}{2R} + \frac{c^2 a}{2R} \qquad \text{(2 boda)} \\ &= \frac{1}{2R}(a^2 b + b^2 c + c^2 a) \end{aligned}$$

Iz A-G nejednakosti slijedi

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \geqslant 3\sqrt[3]{a^2 b \cdot b^2 c \cdot c^2 a} = 3abc \tag{2 boda}$$

a odatle slijedi tvrdnja

$$P_a + P_b + P_c = \frac{1}{2R}(a^2 b + b^2 c + c^2 a) \geqslant \frac{1}{2R} \cdot 3abc = \frac{3abc}{2R} = 6P. \tag{1 bod}$$

Jednakost se u korištenoj A-G nejednakosti postiže ako i samo ako je $a^2 b = b^2 c = c^2 a$. (1 bod)

Ako je $a^2 b = b^2 c = c^2 a$, onda vrijedi $a^2 = bc$ i $ab = c^2$. Množenjem tih uvjeta dobivamo $a^3 b = bc^3$, odakle slijedi $a = c$, a onda lako zaključujemo $a = b = c$. (1 bod)

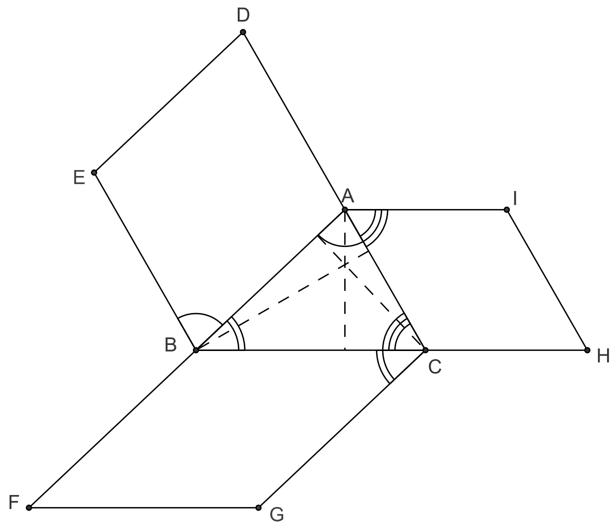
Obratno, ako je $a = b = c$, onda je $a^2 b = b^2 c = c^2 a$, pa je $P_a + P_b + P_c = 6P$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Označimo površine rombova s P_a, P_b, P_c kao u prvom rješenju.

Vrijedi $P_a = P(BCGF) = |BF| \cdot v_c$, gdje je v_c visina iz vrha C u trokutu ABC.

Osim toga, $|BF| = |BC| = a$, pa je $P_a = av_c$.



Na sličan način je $P_b = bv_a$, $P_c = cv_b$. (2 boda)

Koristeći $av_a = bv_b = cv_c = 2P$ dobivamo

$$\begin{aligned} P_a + P_b + P_c &= av_c + bv_a + cv_b \\ &= a \cdot \frac{2P}{c} + b \cdot \frac{2P}{a} + c \cdot \frac{2P}{b} \\ &= 2P\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$ (2 boda)

Iz A-G nejednakosti slijedi:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}} = 3,$$ (2 boda)

a odatle slijedi tvrdnja

$$P_a + P_b + P_c = 2P\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geqslant 2P \cdot 3 = 6P.$$ (1 bod)

Jednakost se u korištenoj A-G nejednakosti postiže ako i samo ako je $\frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. (1 bod)

Odatle slijedi $a^2 = bc$ i $ab = c^2$, pa množenjem dobivamo $a^3b = bc^3$, odakle slijedi $a = c$, i dalje lako zaključujemo $a = b = c$. (1 bod)

Obratno, ako je $a = b = c$, onda je $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = 3$, pa je

$$P_a + P_b + P_c = av_c + bv_a + cv_b = 2P\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) = 6P.$$ (1 bod)

Napomena. Postoje mnogi načini da se nejednakost $P_a + P_b + P_c \geqslant 6P$ svede na nejednakost $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geqslant 3$ ili njoj ekvivalentnu $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3abc$. Npr.

$$\begin{aligned} P_a + P_b + P_c &= a^2 \sin\beta + b^2 \sin\gamma + c^2 \sin\alpha = \sin\alpha \left(a^2 \cdot \frac{b}{a} + b^2 \cdot \frac{c}{a} + c^2 \right) \\ &= bc \sin\alpha \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right) = 2P \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{P_a + P_b + P_c}{P} = \frac{P_a}{P} + \frac{P_b}{P} + \frac{P_c}{P} = \frac{a^2 \sin\beta}{\frac{1}{2}ac \sin\beta} + \frac{b^2 \sin\gamma}{\frac{1}{2}ab \sin\gamma} + \frac{c^2 \sin\alpha}{\frac{1}{2}bc \sin\alpha} = 2 \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right)$$

Zadatak A-3.5.

Neka je n prirodni broj, $n > 1$. Kvadratići ploče $2n \times 2n$ obojani su plavom ili crvenom bojom tako da za svaka dva retka postoji točno n stupaca sa svojstvom da su dva kvadratića na presjeku tog stupca i promatranih dvaju redaka obojana istom bojom. Dokaži da broj n mora biti paran.

Rješenje.

Najprije uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prvi redak cijeli obojan plavom bojom, jer ako na nekom mjestu nije plava boja, možemo u odgovarajućem stupcu zamijeniti boje.

Dodatno, možemo pretpostaviti da je prvih n mjesta u drugom retku obojano plavom bojom, a zadnjih n mjesta crvenom bojom. Naime, znamo da se na n mjesta boja prvog i drugog retka podudara, pa je n mjesta u drugom retku obojano plavom bojom. Ako to nije prvih n mjesta, onda permutiramo stupce. (3 boda)

Označimo s x broj plavih kvadratića među prvih n u trećem retku.

Da bi prvi i treći redak zadovoljavali uvjete zadatka, u trećem retku mora biti točno n plavih kvadratića, pa je od zadnjih n mjesta u trećem retku točno $n - x$ plavih, dok je preostalih x crveno. (3 boda)

Drugi i treći redak su obojani na $2x$ mjesta istom bojom, točnije, na x mjesta među prvih n (plavom bojom) i na x mjesta među zadnjih n (crvenom bojom). (3 boda)

Stoga je $n = 2x$, tj. n je paran. (1 bod)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

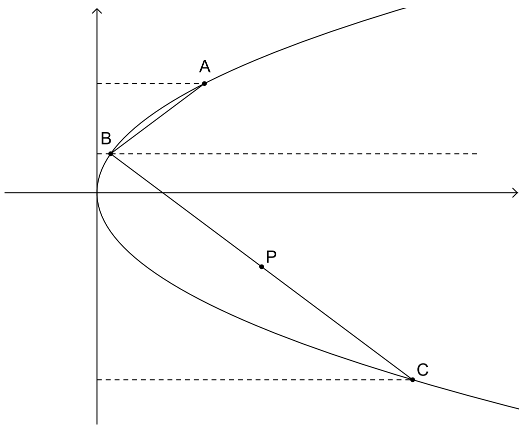
15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Dana je parabola $y^2 = 2px$, $p > 0$. Na paraboli su dane točke A, B i C (A ima najveću, a C najmanju ordinatu) tako da je simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ paralelna s x-osi. Ako je duljina projekcije dužine $\overline{AC}$ na y-os jednaka $4p$, odredi **ordinatu** polovišta dužine $\overline{BC}$.

Rješenje.



Označimo koordinate točaka A, B, C redom s $(\frac{y_A^2}{2p}, y_A)$, $(\frac{y_B^2}{2p}, y_B)$, $(\frac{y_C^2}{2p}, y_C)$. (1 bod)

Budući da pravci AB i BC zatvaraju sukladne kutove s x-osi, slijedi da su koeficijenti smjera tih pravaca suprotni. (2 boda)

Raspisivanjem uvjeta $k_{AB} = -k_{BC}$ dobivamo: $\dfrac{y_A - y_B}{\frac{y_A^2}{2p} - \frac{y_B^2}{2p}} = -\dfrac{y_B - y_C}{\frac{y_B^2}{2p} - \frac{y_C^2}{2p}}$,

odnosno $\dfrac{y_A - y_B}{y_A^2 - y_B^2} = -\dfrac{y_B - y_C}{y_B^2 - y_C^2}$. (2 boda)

Primjenom formule za razliku kvadrata dobivamo $y_A + y_B = -(y_B + y_C)$ pa vrijedi

$$y_A + 2y_B + y_C = 0. \qquad (*)$$ (1 bod)

Uvjet "duljina projekcije dužine $\overline{AC}$ na y-os iznosi $4p$", zbog $y_A > y_C$, može se zapisati u obliku

$$y_A - y_C = 4p. \qquad (**)$$ (1 bod)

Oduzimanjem $(**)$ od $(*)$ dobit ćemo $2y_B + 2y_C = -4p$. (2 boda)

Dakle, ordinata polovišta P dužine $\overline{BC}$ je $y_P = \dfrac{y_B + y_C}{2} = -p$. (1 bod)

Zadatak A-4.2.

Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Prvo rješenje.

Primjetimo da m ne može biti negativni cijeli broj jer tada lijeva strana jednadžbe ne bi bila cijeli broj. (1 bod)

Ako je $m = 0$ onda je $n = \pm 2$. (1 bod)

Neka je $m > 0$. Ako je (m, n) rješenje onda je i $(m, -n)$ rješenje pa ćemo najprije pronaći rješenja za koja je $n \geqslant 0$.

Danu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$(n-1)(n+1) = 3 \cdot 2^m. \qquad \text{(1 bod)}$$

Brojevi $n-1$ i $n+1$ su iste parnosti pa oba moraju biti parna.
Osim toga, kako je $n \geqslant 0$, oba moraju biti pozitivna.

Zato imamo dvije mogućnosti:

1. slučaj: $n - 1 = 2^k$, $n + 1 = 3 \cdot 2^l$, pri čemu je $k, l \geqslant 1$, $k + l = m$.

Imamo $2 = (n+1) - (n-1) = 3 \cdot 2^l - 2^k = 2 \cdot (3 \cdot 2^{l-1} - 2^{k-1})$.

Izraz u zagradi jednak je 1, dakle neparan, a to je moguće samo ako je $l = 1$ ili $k = 1$. (1 bod)

Ako je $l = 1$, slijedi $3 - 2^{k-1} = 1$, dakle $k = 2$ i dalje $m = 3$, $n = 5$. (1 bod)

Ako je $k = 1$, imamo $3 \cdot 2^{l-1} - 1 = 1$, a to je nemoguće. (1 bod)

2. slučaj: $n - 1 = 3 \cdot 2^k$, $n + 1 = 2^l$, pri čemu je $k, l \geqslant 1$, $k + l = m$.

Sada je $2 = (n+1) - (n-1) = 2^l - 3 \cdot 2^k = 2 \cdot (2^{l-1} - 3 \cdot 2^{k-1})$.

Izraz u zagradi jednak je 1, dakle neparan, a to je moguće samo ako je $l = 1$ ili $k = 1$. (1 bod)

Ako je $l = 1$, slijedi $1 - 3 \cdot 2^{k-1} = 1$, a to je nemoguće. (1 bod)

Ako je $k = 1$, slijedi $2^{l-1} - 3 = 1$, dakle $l = 3$ i dalje $m = 4$, $n = 7$. (1 bod)

Sva rješenja su $(m, n) \in \{(0, 2), (0, -2), (4, 7), (4, -7), (3, 5), (3, -5)\}$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Primjetimo da m ne može biti negativni cijeli broj jer tada lijeva strana jednadžbe ne bi bila cijeli broj. (1 bod)

Nadalje, ako je (m, n) rješenje onda je i $(m, -n)$ rješenje pa ćemo najprije pronaći rješenja za koja je $n \geqslant 0$.

Budući da lijeva strana nije djeljiva s 3 zaključujemo da n nije djeljiv s 3. (2 boda)

Razlikujemo dva slučaja.

1. slučaj: Neka je $n = 3k + 1$.

Tada je $2^m = k(3k + 2)$ te su k i $3k + 2$ potencije broja 2.

Ako je $k = 1$ onda nema rješenja (jer ne postoji m takav da je $2^m = 5$), a ako je $k = 2$ dobivamo $n = 7$, $m = 4$. (1 bod)

Za $k > 2$ nema rješenja jer je $4k > 3k + 2 > 2k$ pa bi činjenica da je $k = 2^p$ potencija broja 2 bila u kontradikciji s činjenicom da je $3k + 1$ potencija broja 2, jer bismo imali $2^{p+2} > 3k + 1 > 2^{p+1}$. (2 boda)

2. slučaj: Neka je $n = 3k + 2$.

Tada je $2^m = (3k + 1)(k + 1)$ te su $k + 1$ i $3k + 1$ potencije broja 2.

Za $k = 0$ dobivamo $m = 0$ i tada je $n = 2$.
Za $k = 1$ dobivamo rješenje $m = 3$, $n = 5$. (1 bod)

Za $k > 1$ nema rješenja jer je $4(k+1) > 3k+1 > 2(k+1)$ pa bi činjenica da je $k+1 = 2^p$ potencija broja 2 bila u kontradikciji s činjenicom da je $3k+1$ potencija broja 2, jer bismo imali $2^{p+2} > 3k + 1 > 2^{p+1}$. (2 boda)

Sva rješenja su $(m, n) \in \{(0, 2), (0, -2), (4, 7), (4, -7), (3, 5), (3, -5)\}$. (1 bod)

Napomena: Nepostojanje rješenja za veće k može se pokazati i na sljedeći način:

1. slučaj: $M(3k + 2, k) = M(2, k)$, a to je 1 ili 2, pa mora biti $k = 1$ ili $k = 2$.

2. slučaj: $M(3k + 1, k + 1) = M(2k, k + 1) = M(k - 1, k + 1) = M(k + 1, 2)$, što iznosi 1 ili 2, pa mora biti $k + 1 = 1$ ili $k + 1 = 2$, odnosno $k = 0$ ili $k = 1$.

Zadatak A-4.3.

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. U kružnicu je upisan n-terokut $A_1A_2\ldots A_n$. Dokaži da postoje tri vrha $A, B, C \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ za koje vrijedi

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \geqslant |A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + \ldots + |A_iA_{i+1}|^2 + \ldots + |A_nA_1|^2.$$

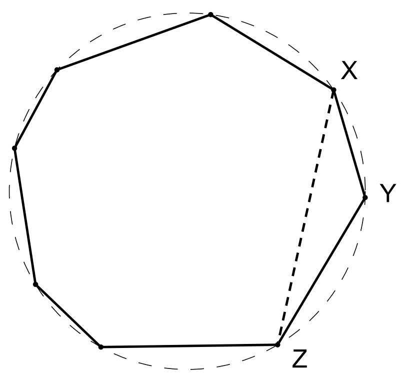
Rješenje.

Ako je $n = 3$ tvrdnja je trivijalna.

Neka je $n \geqslant 4$. Svaki konveksni n-terokut ima barem jedan unutrašnji kut koji nije manji od $90°$. (1 bod)

Naime, suma unutrašnjih kutova n-terokuta je $(n-2)\cdot 180°$ pa postoji barem jedan kut koji nije manji od $\frac{n-2}{n}\cdot 180° = (1-\frac{2}{n})\cdot 180° \geqslant (1-\frac{1}{2})\cdot 180° = 90°$. (2 boda)

Neka je to kut $\sphericalangle XYZ$. Tada možemo reducirati dani n-terokut na $(n-1)$-terokut spajanjem vrhova X i Z, tj. odbacivanjem trokuta XYZ. (1 bod)



Tvrdimo da suma kvadrata duljina stranica novonastalog $(n-1)$-terokuta nije manja od sume kvadrata duljina stranica polaznog n-terokuta. (1 bod)

Naime, budući da je kut pri vrhu Y pravi ili tupi, iz teorema o kosinusu dobivamo:

$$|XZ|^2 = |XY|^2 + |YZ|^2 - 2|XY||YZ|\underbrace{\cos(\sphericalangle XYZ)}_{\leqslant 0} \geqslant |XY|^2 + |YZ|^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Postupak nastavljamo na isti način s novonastalim mnogokutom, izbacujući svaki put po jedan vrh, sve dok ne dođemo do nekog trokuta ABC. Njegovi vrhovi A, B, C zadovoljavaju nejednakost iz zadatka. (3 boda)

Napomena. Uvjet da je n-terokut upisan u kružnicu nije nužan, dovoljno je npr. da promatrani n-terokut bude konveksan.

Zadatak A-4.4.

Neka su n i k prirodni brojevi te $S = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ pri čemu su $A_i, i = 1, \ldots, k$ u parovima disjunktni podskupovi od S takvi da je $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$.

b) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ pri čemu su $A_i, i = 1, \ldots, k$ podskupovi (ne nužno disjunktni) od S takvi da je $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$.

Rješenje. **a)** dio zadatka vrijedi 3 boda, a **b)** dio 7 bodova

a) Svaki od elemenata skupa S nalazi se u jednom i samo jednom od skupova A_i, $i = 1, \ldots, k$. (1 bod)

Dakle, podskup u kojem će se pojedini element nalaziti možemo odabrati na k načina. (1 bod)

Budući da skup S ima n elemenata, traženi broj je k^n. (1 bod)

b) *1. način*

Pridružimo svakom skupu A_i binarni niz duljine n koji na mjestu l ima 1 ako je $l \in A_i$ odnosno 0 ako $l \notin A_i$. (2 boda)

Formirajmo matricu $k \times n$ čiji su retci binarni nizovi pridruženi skupovima A_1, A_2,...,A_k. (1 bod)

Zbog uvjeta $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$ u svakom stupcu te matrice nalazi se barem jedna jedinica. (1 bod)

Obrnuto, svaka binarna matrica $k \times n$ u čijem se svakom stupcu nalazi barem jedna jedinica određuje jednu k-torku podskupova koja zadovoljava dani uvjet. (1 bod)

Takvih matrica ima $(2^k - 1)^n$, budući da svaki stupac možemo odabrati na $2^k - 1$ načina (sve osim $0\ 0\ 0\ \ldots\ 0$). (2 boda)

b) *2. način*

Definirajmo skupove $T_1, \ldots, T_n$ tako da se u T_i nalaze sve uređene k-torke $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ podskupova od $S \setminus \{i\}$ (bez ikakvih drugih uvjeta na uniju). (1 bod)

Traženi broj je broj elemenata skupa $T_1^c \cap T_2^c \cap \cdots \cap T_n^c$. Izračunat ćemo ga po formuli uključivanja-isključivanja

$$|T_1^c \cap T_2^c \cap \ldots \cap T_n^c| = |T| - \sum_{i=1}^{n} |T_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |T_i \cap T_j| - \ldots + (-1)^n |T_1 \cap \ldots \cap T_n|,$$

pri čemu je T skup svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ podskupova od S, bez ikakvih dodatnih uvjeta. (1 bod)

Jasno je da je $|T| = (2^n)^k$ jer biramo k podskupova n-članog skupa.
Skup $S \setminus \{i\}$ sadrži $n-1$ članova, pa je $|T_i| = (2^{n-1})^k$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.
Skup $S \setminus \{i, j\}$ sadrži $n-2$ članova, pa je $|T_i \cap T_j| = (2^{n-2})^k$, itd. (3 boda)
Uvrstimo li ovo sve u formulu, koristeći binomni poučak dobivamo da je traženi broj

$$\begin{aligned}
|T_1^c \cap T_2^c \cap \ldots \cap T_n^c| &= 2^{kn} - \sum_{i=1}^{n} 2^{k(n-1)} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^{k(n-2)} - \ldots + (-1)^n 2^0 \\
&= 2^{kn} - n \cdot 2^{k(n-1)} + \binom{n}{2} 2^{k(n-2)} - \ldots + (-1)^n 2^0 \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^{n-r} (2^k)^r = (2^k - 1)^n.
\end{aligned}$$

(2 boda)

Zadatak A-4.5.

Dokaži da je $\displaystyle\sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} = 2^{2010}$.

Prvo rješenje.

Razvijemo li izraz $(1 + i\sqrt{3})^{2010}$ po binomnom poučku dobivamo

$$(1 + i\sqrt{3})^{2010} = \sum_{k=0}^{2010} (i\sqrt{3})^k \binom{2010}{k}.$$

(3 boda)

Sumu možemo rastaviti po parnim i neparnim indeksima:

$$(1 + i\sqrt{3})^{2010} = \sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} + i\sqrt{3} \sum_{k=0}^{1004} (-3)^k \binom{2010}{2k+1}.$$

Odavde vidimo da je tražena suma zapravo realni dio broja $z = (1 + i\sqrt{3})^{2010}$. (2 boda)

Budući da je $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$, (2 boda)

slijedi

$$z = 2^{2010}(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})^{2010} = 2^{2010}\underbrace{\left(\cos\tfrac{2010\pi}{3} + i\sin\tfrac{2010\pi}{3}\right)}_{=1+i\cdot 0} = 2^{2010}.$$

(2 boda)

Dakle z je realni broj, a njegov realni dio (tj. tražena suma) je upravo 2^{2010}. (1 bod)

Drugo rješenje.

Razvijemo li izraze $(1+i\sqrt{3})^{2010}$ i $(1-i\sqrt{3})^{2010}$ po binomnom poučku dobivamo

$$(1-i\sqrt{3})^{2010} = \sum_{k=0}^{2010} (-i\sqrt{3})^k \binom{2010}{k}.$$

$$(1+i\sqrt{3})^{2010} = \sum_{k=0}^{2010} (i\sqrt{3})^k \binom{2010}{k}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Zbrajanjem tih dviju jednakosti pribrojnici s neparnim indeksom u sumi se poništavaju i dobivamo

$$(1-i\sqrt{3})^{2010} + (1+i\sqrt{3})^{2010} = 2\sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Tražena suma iznosi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} &= \frac{1}{2}\left[(1-i\sqrt{3})^{2010} + (1+i\sqrt{3})^{2010}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2^{2010}\left(\cos\tfrac{-\pi}{3} + i\sin\tfrac{-\pi}{3}\right)^{2010} + 2^{2010}\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right)^{2010}\right] \\
&\qquad \text{(2 boda)} \\
&= \frac{1}{2}\left[2^{2010}\left(\cos\tfrac{-2010\pi}{3} + i\sin\tfrac{-2010\pi}{3}\right) + 2^{2010}\left(\cos\tfrac{2010\pi}{3} + i\sin\tfrac{2010\pi}{3}\right)\right] \\
&\qquad \text{(2 boda)} \\
&= \frac{1}{2}\left[2^{2010}(1+i\cdot 0) + 2^{2010}(1+i\cdot 0)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(2^{2010} + 2^{2010}\right) = 2^{2010}. \qquad \text{(1 bod)}
\end{aligned}$$