Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

1. Odredi sve parove nenegativnih cijelih brojeva (a, b) koji zadovoljavaju jednadžbu:

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13.$$

2. Prirodni broj n je umnožak četiri različita prosta broja p_1, p_2, p_3, p_4 manja od 250. Pritom za neka tri od njih vrijedi

$$p_1 p_2 p_3 = 3(p_1 + p_2 + p_3),$$

a broj $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ ima sve znamenke iste. Odredi sve takve brojeve n.

3. Neka je $ABCD$ pravokutnik i k kružnica sa središtem u središtu pravokutnika. Kružnica k siječe stranicu $\overline{AB}$ u točkama K i L, a stranicu $\overline{CD}$ u točkama M i N, i pritom je $LN \perp AC$. Ako polovište dužine $\overline{AN}$ leži na kružnici k, koliki je omjer duljina stranica danog pravokutnika?

4. Neka su a i b dva različita sedmeroznamenkasta broja od kojih svaki sadrži sve znamenke od 1 do 7. Dokaži da a nije djeljiv s b.

5. Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y.

   Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

1. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z_1 + 2z_2| = |2z_1 + z_2|$.

   Dokaži da je $|z_1 + \alpha z_2| = |\alpha z_1 + z_2|$ za svaki realni broj α.

2. Neka su O i P redom opseg i površina pravokutnika. Dokaži da vrijedi

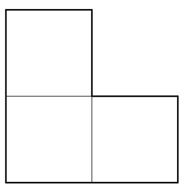
$$O \geqslant \frac{24P}{O+P+1}.$$

3. Odredi sve proste brojeve p za koje je $2^p + p^2$ također prost broj.

4. Točka S je središte trokutu ABC upisane kružnice, a simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Dokaži da je $|AS| : |SD| = 2 : 1$ ako i samo ako vrijedi $|CA| + |AB| = 2|BC|$.

5. Kvadratna ploča podijeljena je na 5×5 jediničnih kvadrata (polja). Na nju postavljamo osam triomina, tako da samo jedno polje ploče ostane neprekriveno.

   Triomino je lik sastavljen od tri jedinična kvadrata kao na slici:



   Odredi koja sve polja dane kvadratne ploče mogu ostati neprekrivena pri takvom popločavanju.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

1. Riješi jednadžbu

$$\operatorname{tg}(x+y)+\operatorname{ctg}(x-y)=\operatorname{tg}(x-y)+\operatorname{ctg}(x+y)$$

i skiciraj u ravnini skup svih njenih rješenja.

2. Odredi sve parove cijelih brojeva (m,n) takvih da je $4\cdot 3^{2m}+5=n^2$.

3. Neka su A', B', C' točke u kojima simetrale kutova trokuta ABC sijeku nasuprotne stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom i neka je S središte upisane kružnice trokuta ABC.

   Ako je $|AS|:|SA'|=3:2$, $|BS|:|SB'|=4:3$ i ako je $|AB|=12$, odredi duljine ostalih stranica trokuta.

4. Nad stranicama trokuta ABC površine P nalaze se rombovi $ABED$, $BCGF$ i $CAIH$ tako da je $\sphericalangle ABE=\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle BCG=\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CAI=\sphericalangle ACB$.

   Dokaži da je zbroj površina triju rombova veći ili jednak $6P$.
   Dokaži da se jednakost postiže ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

5. Neka je n prirodni broj, $n>1$. Kvadratići ploče $2n\times 2n$ obojani su plavom ili crvenom bojom tako da za svaka dva retka postoji točno n stupaca sa svojstvom da su dva kvadratića na presjeku tog stupca i promatranih dvaju redaka obojana istom bojom. Dokaži da broj n mora biti paran.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

15. ožujka 2010.

1. Dana je parabola $y^2 = 2px$, $p > 0$. Na paraboli su dane točke A, B i C (A ima najveću, a C najmanju ordinatu) tako da je simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ paralelna s x-osi. Ako je duljina projekcije dužine $\overline{AC}$ na y-os jednaka $4p$, odredi **ordinatu** polovišta dužine $\overline{BC}$.

2. Odredi sve parove cijelih brojeva (m, n) takvih da je $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

3. Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. U kružnicu je upisan n-terokut $A_1A_2\dots A_n$. Dokaži da postoje tri vrha $A, B, C \in \{A_1, \dots, A_n\}$ za koje vrijedi

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \geqslant |A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + \dots + |A_iA_{i+1}|^2 + \dots + |A_nA_1|^2.$$

4. Neka su n i k prirodni brojevi te $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

   a) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ pri čemu su $A_i, i = 1, \dots, k$ u parovima disjunktni podskupovi od S takvi da je $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$.

   b) Odredi broj svih uređenih k-torki $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ pri čemu su $A_i, i = 1, \dots, k$ podskupovi (ne nužno disjunktni) od S takvi da je $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$.

5. Dokaži da je $\displaystyle\sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} = 2^{2010}$.