ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Dokažite da je za svaki cijeli broj n, broj $n(n^2+5)$ djeljiv sa 6.

Rješenje.

$n(n^2+5) = n[(n^2-1)+6] = n(n^2-1)+6n = n(n-1)(n+1)+6n$ (2 boda)

$(n-1)n(n+1)$ je umnožak tri uzastopna prirodna broja. Među njima je barem jedan broj paran, a jedan djeljiv s 3 pa je i umnožak djeljiv s $2 \cdot 3 = 6$ tj. $(n-1)n(n+1) = 6k$, $k \in \mathbf{N}$. Konačno, $n(n^2+5) = 6k + 6n = 6(k+n)$. (2 boda)

Zadatak B-1.2.

Ako se dvoznamenkastom broju dopiše znamenka 1 s lijeve i s desne strane, dobije se broj koji je 21 puta veći od prvobitnog broja. Odredite taj dvoznamenkasti broj.

Rješenje.
Neka je $\overline{xy}$ traženi broj, a $\overline{1xy1}$ novi broj.
Tada je $\overline{1xy1} = 21 \cdot \overline{xy}$. (1 bod)
$1000 + 100x + 10y + 1 = 21 \cdot (10x + y)$ (1 bod)
$10x + y = 91$ (1 bod)
$\overline{xy} = 91$ (1 bod)

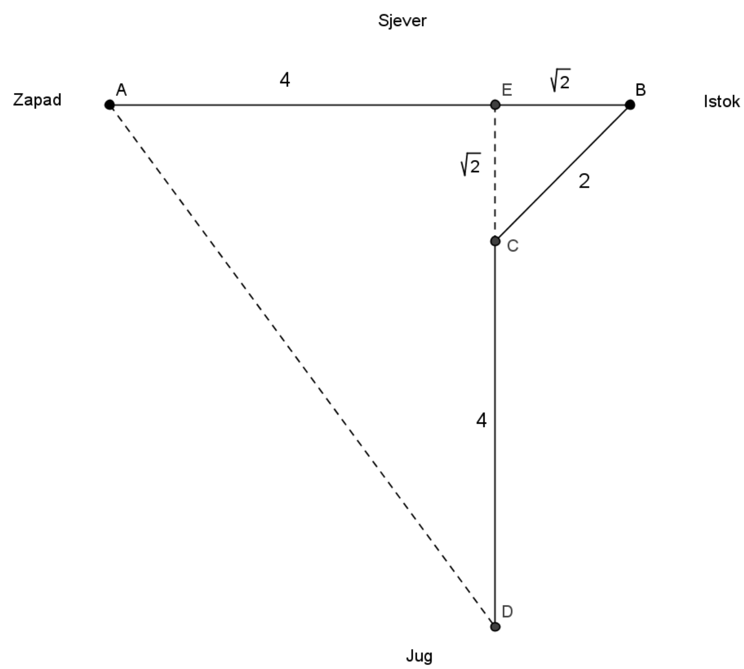
Zadatak B-1.3. Iznos od 18200 kuna treba podijeliti na tri osobe tako da svaka slijedeća osoba dobije 20% više od prethodne. Koliko će novaca dobiti svatko od njih?

Rješenje.
Ako je x iznos koji treba dobiti prva osoba, onda je
$x + 1.2x + 1.44x = 18200$ (2 boda)
$x = 5000$ kuna (1 bod)
Prvi dobije 5000 kuna, drugi 6000 kuna, a treći 7200 kuna. (1 bod)

Zadatak B-1.4.

Živahni zeko skakuće po livadi tako da se prvo pomakne 4 metra prema istoku, pa 2 metra jugozapadno, zatim 4 metra prema jugu. Koliko je zeko udaljen od početnog položaja?

Rješenje.



Za skicu. (1 bod)
Kut $\measuredangle EBC = 45°$ pa je $|EB| = |EC| = \sqrt{2}$. (1 bod)

$$
\begin{aligned}
|AE| &= 4-\sqrt{2}\ ,\ |ED| = 4+\sqrt{2} \\
|AD| &= \sqrt{|AE|^2+|ED|^2} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2+(4+\sqrt{2})^2} \\
&= \sqrt{16-8\sqrt{2}+2+16+8\sqrt{2}+2} = \sqrt{36} \\
|AD| &= 6 \text{ m}
\end{aligned}
$$
(2 boda)

Zadatak B-1.5. Odredite sve cijele brojeve x, y za koje vrijedi $y^4 + x^{2010} = 2y^2 - 1$.

Rješenje.
$y^4 + x^{2010} = 2y^2 - 1$
$y^4 - 2y^2 + 1 + x^{2010} = 0$
$(y^2-1)^2 + x^{2010} = 0$ (1 bod)
Kvadrat svakog realnog broja je nenegativan tj. $(y^2-1)^2 \geq 0$ i $x^{2010} \geq 0$. (1 bod)
Zaključujemo da je $(y^2-1)^2 = 0$ i $x^{2010} = 0$ odnosno $y_{1,2} = \pm 1$ i $x = 0$. (1 bod)
Rješenja su: $(0,-1)$ i $(0,1)$. (1 bod)

Zadatak B-1.6. Profesor Algebrić i profesor Korijenko razgovaraju. Prof Algebrić: kako godine brzo prolaze,... ja već imam 25% više godina, nego si imao ti kada sam ja imao godina koliko sada imaš ti. Prof. Korijenko: eee... ako nas zdravlje posluži, kada ja budem imao godina koliko sada imaš ti, zajedno ćemo imati 168 godina. Koliko je kojem profesoru godina?

Rješenje.
Neka prof. Algebrić ima x godina, a prof Korijenko y godina.
Prof. Algebrić je od prof. Korijenka stariji $x - y$ godina, pa je prof. Algebrić imao y godina prije $x - y$ godina. Prof. Korijenko je tada imao $y - (x - y) = 2y - x$ godina.

$$x = 1.25(2y - x) \qquad \text{(3 boda)}$$

Kada prof. Korijenko bude imao x godina, prof. Algebrić će imati $x + x - y = 2x - y$ godina, pa vrijedi:

$$x + 2x - y = 168\ . \qquad \text{(3 boda)}$$

Imamo sustav jednadžbi:

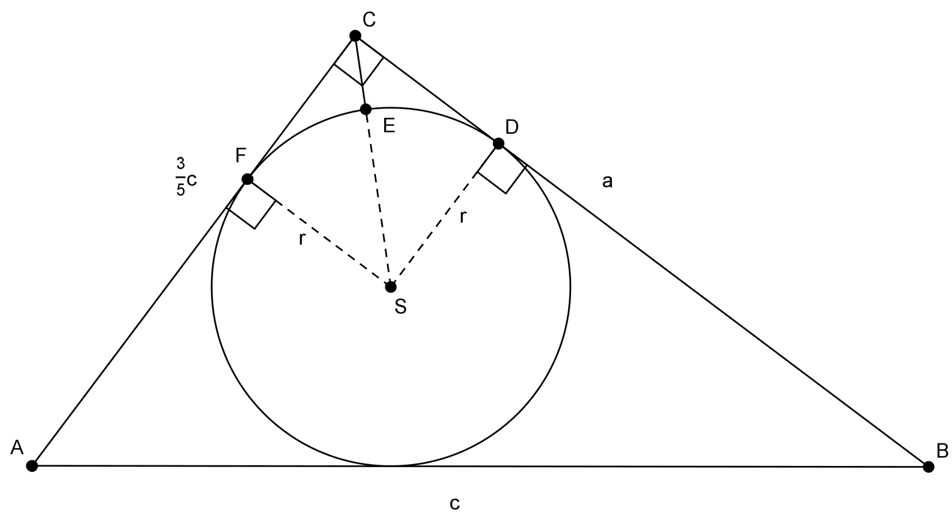
$$\begin{cases} y &= 0.9x \\ 3x - y &= 168 \end{cases} \qquad \text{(2 boda)}$$

čija su rješenja $x = 80$, $y = 72$.

Prof. Algebrić ima 80 godina, a prof. Korijenko 72. (2 boda)

Zadatak B-1.7. U pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ duljina hipotenuze je $|AB| = c$, a katete $|AC| = \frac{3}{5}c$. Nađite udaljenost vrha C od kružnice upisane tom trokutu.

Rješenje.



Precizno nacrtana slika. (1 bod)

Udaljenost vrha C, od trokutu upisane kružnice, jednaka je udaljenosti vrha C od točke E. Točka E je sjecište upisane kružnice i simetrale pravog kuta. (1 bod)

Ako označimo s D i F dirališta kružnice i kateta, onda je četverokut $CFSD$ očigledno kvadrat. (1 bod)

Njegova dijagonala je $|CS| = r\sqrt{2}$, a $|CE| = r\sqrt{2} - r = r(\sqrt{2} - 1)$. $(*)$ (2 boda)

Kateta a je duljine

$$a = |BC| = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{3}{5}c\right)^2} = \frac{4}{5}c\ . \qquad \text{(1 bod)}$$

Polumjer pravokutnom trokutu upisane kružnice je

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{\frac{4}{5}c + \frac{3}{5}c - c}{2} = \frac{1}{5}c\ \ . \ (**) \qquad \text{(2 boda)}$$

Sada iz $(*)$ i $(**)$ proizlazi $|CE| = r(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{5}(\sqrt{2} - 1)c$. (2 boda)

Zadatak B-1.8. Zmaj ima 2010 glava. Vitez može jednim udarcem mača odsjeći 2, 17, 21 ili 33 glave, ali nakon toga zmaju redom izraste novih 9, 10, 0 ili 47 glava. Može li u nekom trenutku vitez odsjeći sve zmajeve glave?

Rješenje.
Ako vitez odsječe x puta po dvije glave, zmaj će imati $2010 - x(2-9) = 2010 + 7x$ glava. (1 bod)
Slično, odsjecanjem y puta po 17 glava, broj glava će se smanjiti za $7y$.
Odsjecanjem z puta po 21 glavu, broj se smanji za $21z$, a odsjecanjem v puta po 33 glave, broj se poveća za $14v$.
Dakle, broj glava je $2010 + 7x - 7y - 21z + 14v$. (4 boda)
Treba vidjeti može li taj broj biti jednak 2, 17, 21 ili 33. (1 bod)
Provjerom imamo, npr.

$$2010 + 7x - 7y - 21z + 14v = 2$$

$$2008 + 7x - 7y - 21z + 14v = 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako 2008 nije djeljivo sa 7 (a ostali pribrojnici jesu), nije moguće da zmaj nakon nekog vremena ima 2 glave. (2 boda)
Analogno se vidi za ostale slučajeve. Zato vitez ne može odsjeći zmaju sve glave. (1 bod)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$z \cdot (4+i) + \bar{z} \cdot (2-3i) = 1 - i^{11} .$$

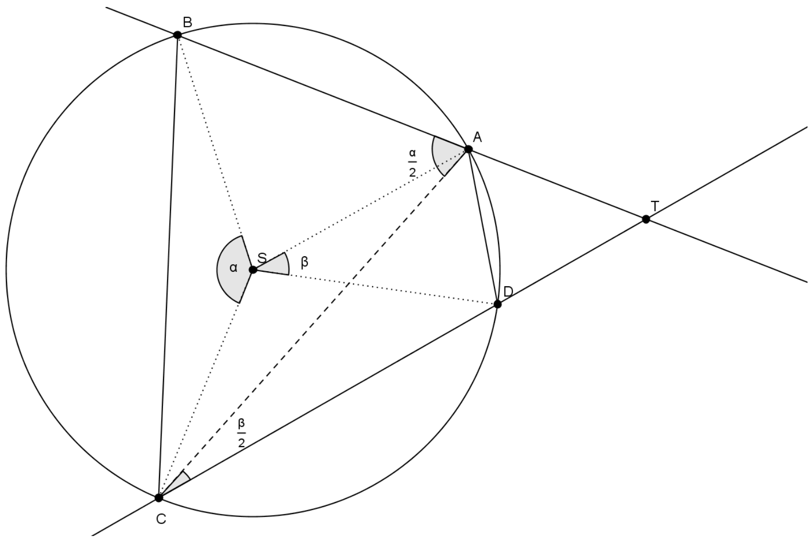
Rješenje.
Označimo $z = x + yi$. Tada dana jednadžba ima oblik
$(x+yi)(4+i) + (x-yi)(2-3i) = 1+i$ tj. $6x - 4y + i(-2x+2y) = 1+i$. (1 bod)
Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 1 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases}$$ (1 bod)

Rješenje sustava je $x = \frac{3}{2}$, $y = 2$. (1 bod)
Traženi broj je $z = \frac{3}{2} + 2i$. (1 bod)

Zadatak B-2.2. Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Pravci AB i CD na kojima leže stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki T ($A \in \overline{BT}$, a $D \in \overline{CT}$). Mjera kuta ATC jednaka je polovini razlike mjera središnjih kutova koji pripadaju tetivama $\overline{BC}$ odnosno $\overline{DA}$. Dokažite!

Rješenje.



Za skicu (1 bod)

Kut $\measuredangle CAB$ je vanjski kut trokuta $\triangle CAT$ i jednak je zbroju unutarnjih nesusjednih kutova. Zbog poučka o obodnom i središnjem kutu, kut $\measuredangle CAB$ jednak je polovici kuta $\measuredangle CSB$, a kut $\measuredangle DCA$ jednak je polovici kuta $\measuredangle DSA$. Pišemo:

$$\measuredangle CAB = \frac{\alpha}{2}\,, \quad \measuredangle DCA = \frac{\beta}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\measuredangle CAB = \measuredangle CTA + \measuredangle DCA \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\measuredangle CTA = \measuredangle CAB - \measuredangle DCA = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-2.3. Ako je $3x + 2y = 1$, odredite minimalnu vrijednost izraza $x^2 + y^2$.

Rješenje.

Iz $3x + 2y = 1$ slijedi da je

$$y = \frac{1-3x}{2}\,. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je

$$x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{1-3x}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \qquad \text{(1 bod)}$$

kvadratna funkcija po x koja ima minimum

$$y_T = \frac{4 \cdot \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right)^2}{4 \cdot \frac{13}{4}} = \frac{1}{13} \qquad \text{(1 bod)}$$

Dakle, $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{13}$ (najmanja vrijednost izraza je $\frac{1}{13}$). (1 bod)

Zadatak B-2.4. Odredite sve parove cijelih brojeva x, y za koje je

$$x^{2010} = y^{2010} + 2010 \ .$$

Rješenje.
Zapišimo danu jednadžbu na sljedeći način

$$x^{2010} - y^{2010} = 2010 \ .$$

Kako je 2010 paran broj, razlika na lijevoj strani mora biti paran broj. (1 bod)
To znači da su brojevi x i y iste parnosti (oba parna ili oba neparna). (1 bod)
Napišemo lijevu stranu kao razliku kvadrata.

$$(x^{1005} - y^{1005})(x^{1005} + y^{1005}) = 2010 \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako su x i y iste parnosti, obje zagrade su djeljive s 2, a njihov umnožak s 4. S druge strane, broj 2010 nije djeljiv s 4 pa zaključujemo da takvi x i y ne postoje. (1 bod)

Zadatak B-2.5. U paralelogramu $ABCD$ je duljina stranice $|AB| = 8$ cm, a duljina dijagonale $|AC| = 8\sqrt{3}$ cm. Ako je kut $\measuredangle CAB = 30°$, izračunajte površinu tog paralelograma.

Rješenje.
Iz vrha B spustimo okomicu na dijagonalu AC. Nožište okomice označimo sa S. Trokut $\triangle ABS$ je pravokutan pa je $|AS| = |AB| \cos 30°$, $|AS| = 4\sqrt{3}$cm. (1 bod)
Zaključujemo da je točka S polovište dijagonala, te je dani četverokut romb. (1 bod)
Površina je

$$P = a^2 \sin 60° = 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2 \ . \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.6. Za koje vrijednosti pozitivnog realnog parametra m jednadžba

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=m$$

ima rješenja?

Prvo rješenje.
Dana jednadžba ima smisla ako je $5+x \geq 0$ i $3+x \geq 0$, odnosno ako je $x \geq -3$. (1 bod)
Ako jednadžbu napišemo u obliku

$$\sqrt{5+x}=m-\sqrt{3+x}\ , \qquad \text{(1 bod)}$$

desna strana mora zadovoljavati sljedeći uvjet

$$m-\sqrt{3+x} \geq 0\ . \qquad \text{(1 bod)}$$

U tom slučaju kvadriranjem dobivamo

$$5+x=m^2-2m\sqrt{3+x}+3+x \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi

$$\sqrt{3+x}=\frac{m^2-2}{2m} \quad (*)\ . \qquad \text{(1 bod)}$$

Da bi jednadžba imala smisla, mora vrijediti

$$\frac{m^2-2}{2m} \geq 0$$

što uz činjenicu da je m pozitivan daje $m \geq \sqrt{2}$. (2 boda)
Treba još samo provjeriti uvjet

$$m-\sqrt{3+x} \geq 0\ . \qquad \text{(1 bod)}$$

$$m-\frac{m^2-2}{2m} \geq 0\ , \quad \frac{m^2+2}{2m} \geq 0\ ,$$

a to vrijedi za sve pozitivne realne brojeve m. (1 bod)
Iz $(*)$ slijedi

$$x=\left(\frac{m^2-2}{2m}\right)^2-3\ ,$$

što je sigurno ≥ -3 pa je ispunjen i početni uvjet $x \geq -3$. (1 bod)
Dakle , rješenje zadatka je $m \in [\sqrt{2},+\infty\rangle$.

Drugo rješenje.

Nakon kvadriranja dane jednadžbe dobije se:
$(*)$ $2\sqrt{x^2+8x+15} = m^2 - 2x - 8$ odakle slijedi (2 boda)

$$x = \frac{(m^2-8)^2 - 60}{4m^2} \qquad \text{(3 boda)}$$

Jednadžba će imati rješenje ako je desna strana jednadžbe $(*)$ pozitivna ili jednaka 0, tj. $m^2 - 2x - 8 \geq 0.$ (1 bod)

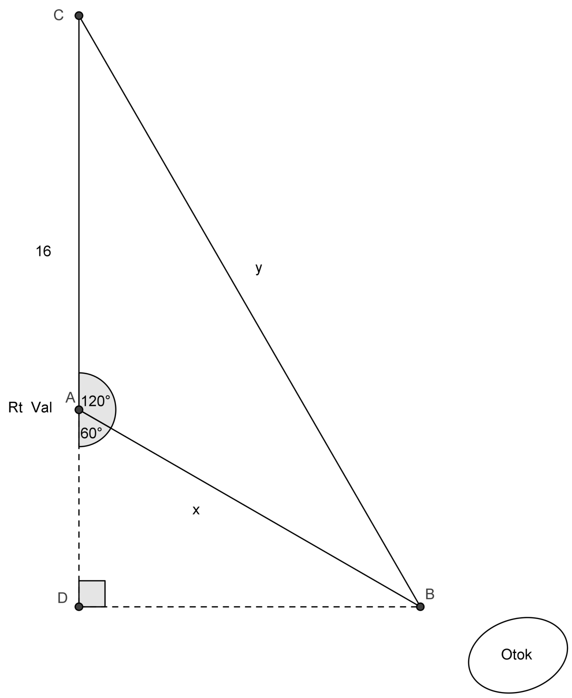
Nakon uvrštavanja dobivenog izraza za x u postavljeni uvjet dobivamo

$$\frac{m^4-4}{2m^2} \geq 0\ . \qquad \text{(2 boda)}$$

Rješenje ove nejednadžbe je rješenje zadatka, a to je skup $m \in \left[\sqrt{2}, +\infty\right\rangle.$ (2 boda)

Zadatak B-2.7. Turistički brod "Galeb" plovi pravocrtno prema sjeveru. Kod rta "Val" dvoje mladih turista otplovilo je brzim skuterom u smjeru koji zatvara 120° sa smjerom kretanja broda, prema otoku udaljenom od rta 15 km. Ako skuter ima goriva dostatnog za točno 40 km vožnje, koliko se najviše kilometara skuter može približiti otoku da bi sigurno stigao natrag do broda? Brod će u tom slučaju (dok skuter prijeđe 40 km), do trenutka ponovnog sastajanja, prijeći 16 km.

Rješenje.



Skica (2 boda)
(ako nema označene kutove i pravokutni trokut, samo 1 bod)

Neka je x udaljenost koju skuter prijeđe od rta do točke B najbliže otoku. Neka je y udaljenost od točke B do točke C, u kojoj se skuter ponovo sastaje s brodom. Tada je ukupna udaljenost koju skuter može proći

$$|AB| + |BC| \ ,$$

a to može biti najviše 40 km. Pišemo

$$x + y = 40 \ . \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz pravokutnog trokuta $\triangle ADB$ slijedi

$$|AD| = x\cos 60^\circ = \frac{x}{2} \ , \quad |BD| = x\sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2} \ . \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz pravokutnog trokuta $\triangle DBC$ slijedi

$$y^2 = \left(16 + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \ . \qquad \text{(1 bod)}$$

$$y^2 = x^2 + 16x + 256 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$(40 - x)^2 = x^2 + 16x + 256 \qquad \text{(1 bod)}$$

Odatle je $x = 14$ km, što znači da se skuter može najviše približiti na 1 km od otoka. (2 boda)

Zadatak B-2.8. Za prirodan broj kažemo da je *palindrom* ako je jednak broju zapisanom istim znamenkama u obrnutom poretku. Nađite najveći peteroznamenkasti palindrom koji je djeljiv sa 101.

Rješenje.
Bilo koji peteroznamenkasti palindrom $\overline{abcba}$ može se zapisati u obliku

$$\overline{abcba} = 10001a + 1010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c \ .$$

(1 bod)

Dakle, palindrom je djeljiv sa 101 ako i samo ako je $2a - c = 0$. (2 boda)
(za bilo koje znamenke a i c je $|2a - c| < 101$).
Iz $2a - c = 0$ slijedi $2a = c$ gdje su $a, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
Zaključujemo da je $a \leq 4$. (2 boda)
Kako tražimo najveći broj, to su $a = 4$ i $c = 8$. (2 boda)
Da traženi broj bude najveći, za znamenku b odabiremo $b = 9$. (1 bod)
Dakle, traženi broj je 49894. (2 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite jednadžbu $4^{4\log x+1} - 17 \cdot 4^{3\log x} + 17 \cdot 4^{\log x} - 4 = 0$.

Rješenje.
Uvedimo zamjenu $4^{\log x} = t > 0$, $x > 0$. Tada dana jednadžba prelazi u

$$4t^4 - 17t^3 + 17t - 4 = 0 \ .$$

Rastavljanjem na faktore dobivamo
$4(t^4 - 1) - 17t(t^2 - 1) = 0$
$(t^2 - 1)(4t^2 - 17t + 4) = 0$. (1 bod)

1. $t^2 - 1 = 0$
   $t_1 = 1$ (jer je $t > 0$)
   $4^{\log x} = 1$ što daje $x_1 = 1$. (1 bod)

2. $4t^2 - 17t + 4 = 0$
   $t_2 = \frac{1}{4}$, $t_3 = 4$
   $4^{\log x} = \frac{1}{4}$, $4^{\log x} = 4$ i na kraju $x_2 = \frac{1}{10}$ i $x_3 = 10$. (2 boda)

Zadatak B-3.2. Duljina jedne visine trokuta jednaka je zbroju duljina preostalih dviju visina. Zapišite duljinu najkraće stranice trokuta pomoću duljina preostalih dviju stranica.

Prvo rješenje.
Neka je $v_a = v_b + v_c$. Tada je najkraća stranica trokuta stranica a. (1 bod)
Pomnožimo danu jednakost s $\frac{abc}{2}$. (1 bod)

$$v_a \cdot \frac{abc}{2} = v_b \cdot \frac{abc}{2} + v_c \cdot \frac{abc}{2}$$

Stavimo li da je P površina trokuta, dobit ćemo da je
$P \cdot b \cdot c = P \cdot a \cdot c + P \cdot a \cdot b$. (1 bod)
Slijedi da je

$$a = \frac{bc}{b+c}$$ (1 bod)

Drugo rješenje.
Neka je $v_a = v_b + v_c$. Tada je najkraća stranica trokuta stranica a. (1 bod)
Ako je P površina danog trokuta tada iz

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

slijedi

$$v_a = \frac{2P}{a}\ , \quad v_b = \frac{2P}{b}\ , \quad v_c = \frac{2P}{c}\ .$$ (1 bod)

Jednakost $v_a = v_b + v_c$ prelazi u

$$\frac{2P}{a} = \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} \quad \text{odnosno} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$ (1 bod)

Slijedi da je

$$a = \frac{bc}{b+c}\ .$$ (1 bod)

Zadatak B-3.3. Ako je $a + a^{-1} = 2\cos x$, dokažite da je $a^4 + a^{-4} = 2\cos 4x$.

Rješenje.
Iz $a + a^{-1} = 2\cos x$ kvadriranjem dobijemo
$a^2 + a^{-2} = 4\cos^2 x - 2$ odnosno (1 bod)
$a^2 + a^{-2} = 4\cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$
$a^2 + a^{-2} = 2\cos 2x$ (1 bod)
Analogno: kvadriranjem $a^2 + a^{-2} = 2\cos^2 2x$ dobijemo
$a^4 + a^{-4} = 4\cos^2 2x - 2$ (1 bod)
$a^4 + a^{-4} = 2\cos 4x$ (1 bod)

Zadatak B-3.4. Odredite realni broj p tako da $\mathrm{tg}\alpha$ i $\mathrm{tg}\beta$ budu korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 + px - \sqrt{3} = 0$, ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

Rješenje.
Kako su $\mathrm{tg}\alpha$ i $\mathrm{tg}\beta$ realni korijeni, diskriminanta dane jednadžbe mora biti ≥ 0.
$D = p^2 + 4\sqrt{3}$, što je pozitivno za sve realne brojeve p. (1 bod)

$$x^2 + px - \sqrt{3} = 0\ , \quad x_1 = \mathrm{tg}\alpha\ , \quad x_2 = \mathrm{tg}\beta$$

Kako je $x_1 + x_2 = -p$, to je

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = -p\ .$$

Kako je $x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{3}$, to je

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = -\sqrt{3}\ .$$ (1 bod)

Ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$, onda je $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$, odnosno

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} = \sqrt{3}\ .$$ (1 bod)

$$\frac{-p}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{pa je} \quad p = -3 - \sqrt{3}\ .$$ (1 bod)

Zadatak B-3.5. Za koje pozitivne realne brojeve a jednadžba

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = a \ , \quad x \neq \frac{k\pi}{2} \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

ima realna rješenja?

Rješenje.
Napišimo danu jednadžbu u drugom obliku:

$$\frac{1 + \sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = a \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{1 + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = a \ ,$$

a odavde slijedi

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{2+a} \ , \quad \sin^2 2x = \frac{8}{2+a} \ . \qquad \text{(1 bod)}$$

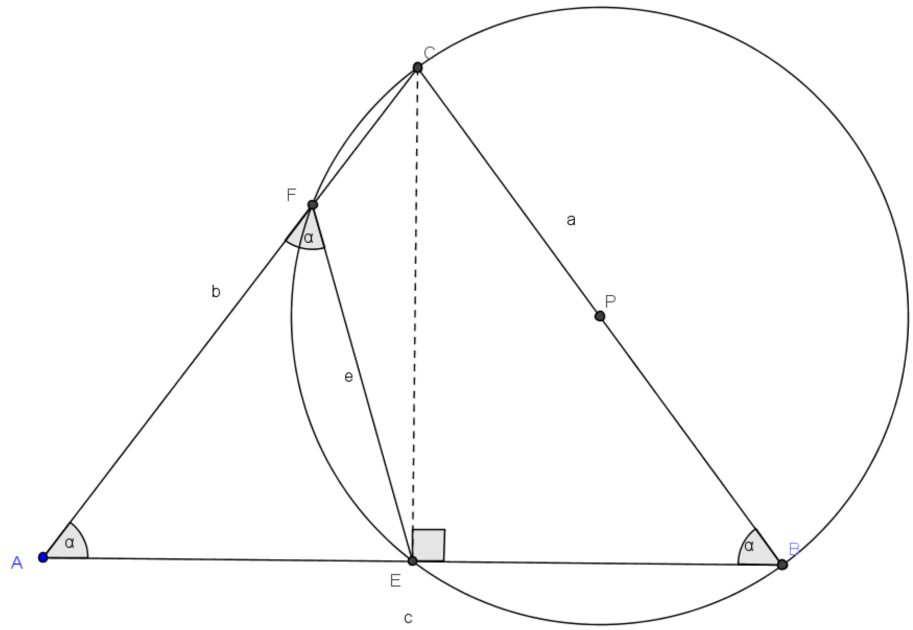
Ova će jednadžba imati realna rješenja ako je

$$0 \leq \frac{8}{2+a} \leq 1 \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $a > 0$, ova je nejednakost točna za sve $a \geq 6$. (1 bod)

Zadatak B-3.6. Zadan je jednakokračan trokut osnovice duljine 6 cm i kraka duljine 5 cm. Kružnica kojoj je jedan od krakova trokuta promjer, siječe preostale dvije stranice trokuta u točkama E i F. Odredite duljinu dužine $|EF|$.

Rješenje.



Skica. (2 boda)
$|AC| = |BC| = 5$ cm, $|AB| = 6cm$
$\measuredangle CEB = 90°$ (kut nad promjerom kružnice) (1 bod)
Zaključujemo da je točka E nožište visine danog jednakokračnog trokuta. (1 bod)
Stoga je $|AE| = |EB| = 3$ cm. (1 bod)
Kako je trokut $\triangle ABC$ jednakokračan, $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = \alpha$. (1 bod)
Četverokut $EBCF$ je tetivni, odnosno

$$\measuredangle EBC + \measuredangle CFE = 180° \ . \qquad (1 \text{ bod})$$

Tada je

$$\measuredangle AFE = 180° - \measuredangle CFE = \measuredangle EBC = \alpha \ . \qquad (1 \text{ bod})$$

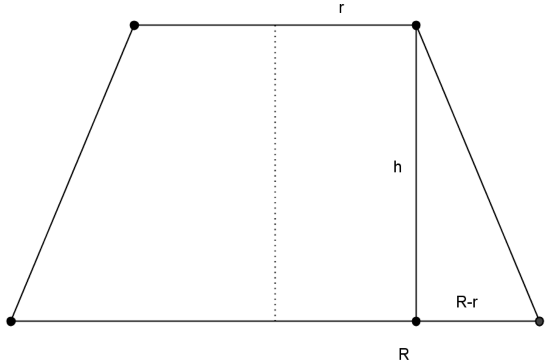
Zaključujemo da je trokut $\triangle AEF$ jednakokračan pa je $|EF| = |AE| = 3$ cm. (2 boda)

Zadatak B-3.7. Odredite obujam pravilne 12-erostrane krnje piramide ako su R i r ($R > r$) polumjeri kružnica opisanih oko baza i ako su bočni bridovi nagnuti pod kutem od $60°$ prema ravnini baze.

Rješenje.
Odredimo najprije površine osnovki.
Središnji kut pravilnog dvanaesterokuta je $\frac{360°}{12} = 30°$. (1 bod)

$$B_1 = 12 \cdot \frac{R \cdot R \sin 30°}{2} = 3R^2 \ , \quad B_2 = 12 \cdot \frac{r \cdot r \sin 30°}{2} = 3r^2 \qquad \text{(2 boda)}$$

Promotrimo dijagonalni presjek dane krnje piramide koji je jednakokračan trapez s osnovicama $2R$ i $2r$.
Skica (2 boda)



Računamo visinu krnje piramide

$$\text{tg}60° = \frac{h}{R-r} \ , \quad h = (R-r)\sqrt{3}\ . \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je traženi volumen

$$V = \frac{h}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

$$V = \frac{(R-r)\sqrt{3}}{3}\left(3R^2 + \sqrt{3R^2 \cdot 3r^2} + 3r^2\right)$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3}(R-r)(3R^2 + 3Rr + 3r^2)$$

$$V = \sqrt{3}(R-r)(R^2 + Rr + r^2) = \sqrt{3}(R^3 - r^3) \qquad \text{(3 boda)}$$

Zadatak B-3.8. Na košarkaškom turniru sudjelovalo je 8 ekipa i svaka je sa svakom odigrala po jednu utakmicu. Za pobjedu se dobivaju 2 boda, a za poraz 0 bodova (niti jedna utakmica nije završila neriješeno). Ekipe su sakupile redom 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2 boda. Koliko utakmica su posljednje 4 ekipe izgubile od prve 4 ekipe?

Rješenje.
Posljednje četiri ekipe su međusobno odigrale $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ utakmica i u njima skupile ukupno 12 bodova (od kojih je svaki bod pripao nekoj od posljednje 4 ekipe). (3 boda)
Kako su one ukupno osvojile $6 + 4 + 2 + 2 = 14$ bodova, zaključujemo da su posljednje 4 ekipe protiv prve 4 osvojile 2 boda, odnosno pobijedile su prve četiri ekipe u samo jednoj utakmici. (3 boda)
Ukupan broj utakmica koje su odigrale prve četiri protiv posljednje četiri ekipe je
$4 \cdot 4 = 16$. (2 boda)
Od toga su samo jednu utakmicu izgubile. (1 bod)
Prema tome rješenje je:
Posljednje četiri ekipe izgubile su od prve četiri ekipe 16 - 1 = 15 utakmica. (1 bod)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola –B kategorija

15. ožujka 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z^4 + 2 \cdot (1-i) \cdot z^2 - 2i = 0 \ .$$

Rješenje.
Uvodimo zamjenu $z^2 = t$. Tada dana jednadžba prelazi u

$$t^2 + 2 \cdot (1-i) \cdot t - 2i = 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$t_{1,2} = \frac{-2(1-i) \pm \sqrt{4 \cdot (-2i) + 8i}}{2} = \frac{-2+2i}{2}$$

$$z^2 = -1 + i \qquad \text{(1 bod)}$$

$$z = \sqrt{-1+i} \ , \quad -1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}) \ , \quad z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}) \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-4.2. Tri broja čine rastući aritmetički niz. Ako drugi broj uvećamo za 1, a treći za 10, niz postaje geometrijski. Najmanji od ta tri broja jednak je 2. Koji su to brojevi?

Rješenje.
Ako je najmanji član rastućeg aritmetičkog niza jednak 2, onda su dani brojevi oblika

$$2 \ , \quad 2+d \ , \quad 2+2d \ . \qquad \text{(1 bod)}$$

Nadalje, geometrijski niz čine brojevi

$$2 \ , \quad 3+d \ , \quad 12+2d \ ,$$

pa vrijedi $(3+d)^2 = 2 \cdot (12+2d)$. (1 bod)
Rješenja ove jednadžbe su $d_1 = 3$, $d_2 = -5$. (1 bod)
Kako je niz rastući, jedino je rješenje $d = 3$, a traženi brojevi su 2, 5, 8. (1 bod)

Zadatak B-4.3. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{\binom{4}{x}} - \frac{1}{\binom{5}{x}} = \frac{1}{\binom{6}{x}} .$$

Rješenje. Iz definicije binomnog koeficijenta slijedi

$$\binom{4}{x} = \frac{4!}{x!(4-x)!} , \quad \binom{5}{x} = \frac{5!}{x!(5-x)!} , \quad \binom{6}{x} = \frac{6!}{x!(6-x)!}$$

pa dana jednadžba prelazi u

$$\frac{x!(4-x)!}{4!} - \frac{x!(5-x)!}{5!} = \frac{x!(6-x)!}{6!} \text{ , uz uvjet } x \leq 4 . \qquad \text{(1 bod)}$$

Jednadžba

$$\frac{(4-x)!}{4!} - \frac{(4-x)!(5-x)}{4! \cdot 5} = \frac{(4-x)!(5-x)(6-x)}{4! \cdot 5 \cdot 6} \qquad \text{(1 bod)}$$

nakon sređivanja prelazi u

$$1 - \frac{5-x}{5} = \frac{(5-x)(6-x)}{5 \cdot 6} \text{ odnosno } x^2 - 17x + 30 = 0 . \qquad \text{(1 bod)}$$

Rješenja ove jednadžbe su 15 i 2, ali zbog uvjeta $x \leq 4$
jedino rješenje je $x = 2$. (1 bod)

Zadatak B-4.4. Ako za kutove trokuta vrijedi

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\ ,$$

onda je trokut ili pravokutan ili jednakokračan. Dokažite!

Rješenje. Izraz

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$$

napišimo u drugome obliku

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}\ ,\text{ odnosno}\quad \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}=0\ .$$

Odatle je

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)=0\ ,$$

što nam daje dvije mogućnosti (1 bod)

(a) $\sin\alpha=0$, $\alpha=0,180^{\circ}$ što je u trokutu nemoguće,

(b)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=0\ ,\quad \frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha}=0$$ (1 bod)

Ovo je ispunjeno ako je $\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta=0$ što je ekvivalentno s

$$2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\beta\cos\beta\quad\text{odnosno}\quad\sin 2\alpha=\sin 2\beta\ .$$

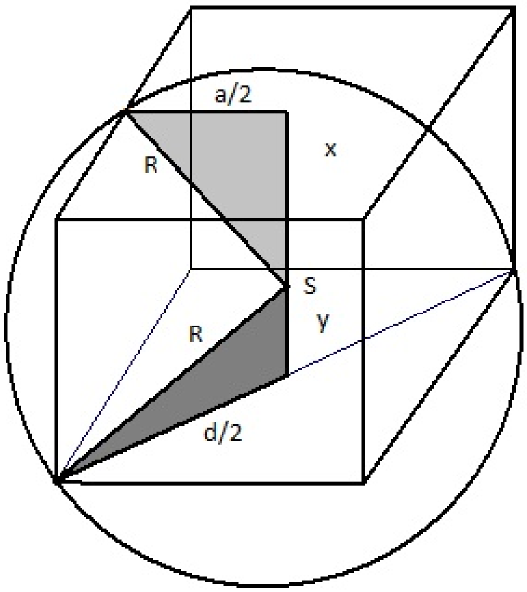
Zaključujemo da je $\alpha=\beta$, pa je trokut jednakokračan, ili (1 bod)

$$2\alpha=\pi-2\beta\ ,\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

pa je trokut pravokutan $\left(\gamma=\frac{\pi}{2}\right)$. (1 bod)

Zadatak B-4.5. Sfera prolazi vrhovima donje osnovke kocke i dira sva četiri brida gornje osnovke. Ako je duljina brida kocke a, koliki je polumjer sfere?

Rješenje.



Skica (1 bod)

Iz $R^2 = \frac{a^2}{4} + x^2$ i $R^2 = \frac{a^2}{2} + y^2$ je

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}\,. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $x + y = a$, dobivamo da je $x - y = \frac{a}{4}$.

Sustav

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = \frac{a}{4} \end{cases} \qquad \text{(1 bod)}$$

daje $x = \frac{5a}{8}$ odnosno $R = \frac{a}{8}\sqrt{41}$. (1 bod)

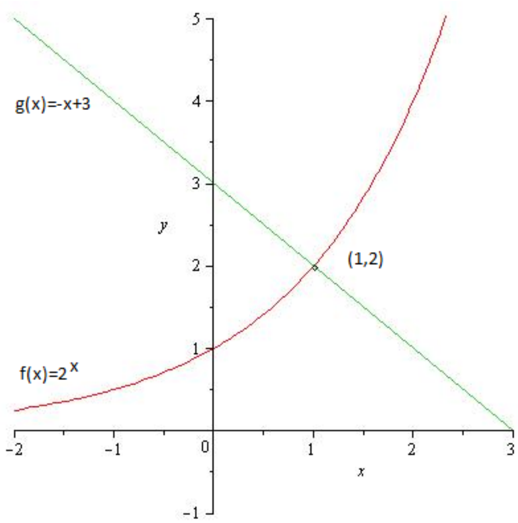
Zadatak B-4.6. Riješite jednadžbu $3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$.

Rješenje.
Jednadžbu $3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$ rješavamo zamjenom $2^x = t$. (1 bod)
Tada je $3 \cdot t^2 + (3x - 10) \cdot t + 3 - x = 0$ (1 bod)

$$t_{1,2} = \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{9x^2 - 48x + 64}}{6} = \frac{-3x + 10 \pm (3x - 8)}{6} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$t_1 = \frac{1}{3}\ , \quad t_2 = \frac{-6x + 18}{6} = -x + 3\ . \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je $x_1 = -\log_2 3$ ili $2^x = -x + 3$. (2 boda)



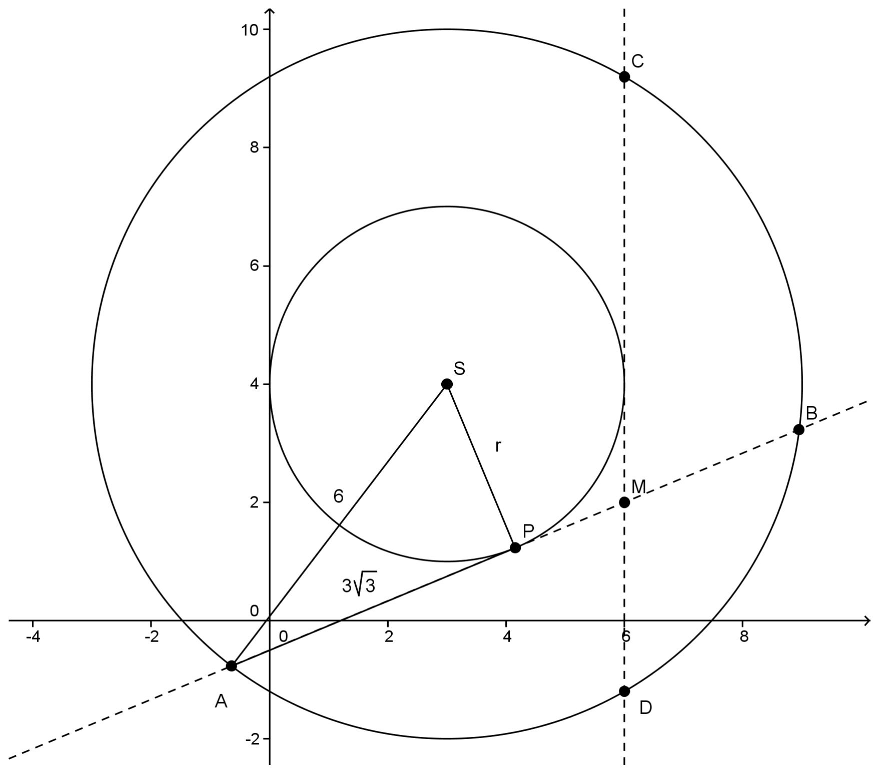
Skica (2 boda)
Jednadžbu $2^x = -x + 3$ rješavamo grafički, odnosno drugo rješenje je

$$x_2 = 1 (\text{Provjera: } 2^1 = -1 + 3). \qquad \text{(1 bod)}$$

Napomena: Ako je učenik pogodio drugo rješenje jednadžbe $2^x = -x + 3$, bez crtanja ili objašnjenja da je to jedino rješenje jednadžbe, dati jedan bod umjesto zadnja tri boda.

Zadatak B-4.7. Točkom $M(6,2)$ unutar kružnice $(x-3)^2+(y-4)^2=36$ povučena je tetiva duljine $6\sqrt{3}$. Napišite jednadžbu pravca na kojem leži ta tetiva.

Prvo rješenje.



Skica (2 boda)

Traženi pravci su tangente povučene iz točke $M(6,2)$ na koncentričnu kružnicu zadanoj kružnici sa središtem u $S(3,4)$ i polumjera

$$r=\sqrt{6^2-27}=3\ . \qquad \text{(1 bod)}$$

Ako je pravac $y=kx+l$ tangenta koja prolazi točkom $M(6,2)$ vrijedi:

$2=6k+l$ tj. $l=2-6k$

$(k\cdot 3-4+l)^2=3^2(1+k^2)\ldots$(uvjet tangencijalnosti za kružnicu). (2 boda)

Rješenje dobivenog sustava je $k=\frac{5}{12}$. Tada je

$$l=2-6\cdot\frac{5}{12}=-\frac{1}{2} \qquad \text{(2 boda)}$$

pa je jedno rješenje pravac $y=\frac{5}{12}x-\frac{1}{2}$ ili $5x-12y-6=0$. (1 bod)

Kako iz točke izvan kružnice možemo uvijek povući dvije tangente, drugo je rješenje pravac paralelan s y -osi, a to je pravac $x=6$. (2 boda)

Drugo rješenje.
Napišimo jednadžbu pravca koji prolazi točkom $M(6,2)$ s koeficijentom smjera k.

$$\begin{aligned} ly - 2 &= k(x-6) \\ y &= kx - 6k + 2 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Presjek ovog pravca i dane kružnice su točke A i B čija je međusobna udaljenost $6\sqrt{3}$.
Očito postoje dva pravca s ovim svojstvom (pa i drugi par točaka C, D).
Rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y = kx - 6k + 2 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 36 \end{cases}$$

dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2(k^2+1) - 2x(6k^2+2k+3) + 36k^2 + 24k - 23 = 0 \ . \qquad \text{(1 bod)}$$

Rješenje ove jednadžbe su apscise točaka A i B.
S druge strane, udaljenost točaka A i B je $6\sqrt{3}$. Iz formule za udaljenost točaka slijedi

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 108 \ . \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je koeficijent smjera jednak $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dana formula prelazi u

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2 &= 108 \\ (x_2 - x_1)^2(k^2+1) &= 108 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Prilagodit ćemo dobiveni izraz za korištenje Vieteovih formula:

$$\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right](k^2+1) = 108 \quad (*) \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je

$$x_1 + x_2 = \frac{2(6k^2+2k+3)}{k^2+1} \ , \text{ a } \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{36k^2+24k-23}{k^2+1}$$

Izraz $(*)$ prelazi u

$$\left[\frac{4(6k^2+2k+3)^2}{(k^2+1)^2} - 4\frac{36k^2+24k-23}{k^2+1}\right] \cdot (k^2+1) = 108 \qquad \text{(2 boda)}$$

Ova jednadžba ima samo jedno rješenje $k = \frac{5}{12}$, pa je traženi pravac

$$y = \frac{5}{12}x - \frac{1}{2} \ . \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo je rješenje pravac $x = 6$. (1 bod)

Zadatak B-4.8. Dokažite da se u krug polumjera 9 ne može smjestiti 400 točaka tako da udaljenost svake dvije bude veća od 1.

Rješenje.

Oko svake točke opišimo kružnicu polumjera $\frac{1}{2}$. (2 boda)

Površina kruga bit će $\frac{\pi}{4}$, a površina 400 takvih krugova bit će 100π. (2 boda)

Unutar svakog od tih krugova nema drugih točaka kao ni na rubu tj.
na kružnici polumjera $\frac{1}{2}$. (2 boda)

Budući da točka može biti i na kružnici polumjera 9, potrebno je u
krug polumjera 9.5, čija je površina 90.25π, smjestiti krugove površine 100π,
a to je jasno nemoguće. (4 boda)