Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

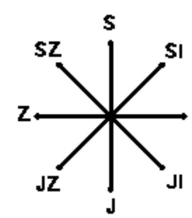
15. ožujka 2010.

1. (4) Dokažite da je za svaki cijeli broj n, broj $n(n^2+5)$ djeljiv sa 6.

2. (4) Ako se dvoznamenkastom broju dopiše znamenka 1 s lijeve i s desne strane, dobije se broj koji je 21 puta veći od prvobitnog broja. Odredite taj dvoznamenkasti broj.

3. (4) Iznos od 18200 kuna treba podijeliti na tri osobe tako da svaka slijedeća osoba dobije 20% više od prethodne. Koliko će novaca dobiti svatko od njih?

4. (4) Živahni zeko skakuće po livadi tako da se prvo pomakne 4 metra prema istoku, pa 2 metra jugozapadno, zatim 4 metra prema jugu. Koliko je zeko udaljen od početnog položaja?



5. (4) Odredite sve cijele brojeve x, y za koje vrijedi $y^4 + x^{2010} = 2y^2 - 1$.

6. (10) Profesor Algebrić i profesor Korijenko razgovaraju. Prof Algebrić: kako godine brzo prolaze,... ja već imam 25% više godina, nego si imao ti kada sam ja imao godina koliko sada imaš ti. Prof. Korijenko: eee... ako nas zdravlje posluži, kada ja budem imao godina koliko sada imaš ti, zajedno ćemo imati 168 godina. Koliko je kojem profesoru godina?

7. (10) U pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ duljina hipotenuze je $|AB| = c$, a katete $|AC| = \frac{3}{5}c$. Nađite udaljenost vrha C od kružnice upisane tom trokutu.

8. (10) Zmaj ima 2010 glava. Vitez može jednim udarcem mača odsjeći 2, 17, 21 ili 33 glave, ali nakon toga zmaju redom izraste novih 9, 10, 0 ili 47 glava. Može li u nekom trenutku vitez odsjeći sve zmajeve glave?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

15. ožujka 2010.

1. (4) U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$z \cdot (4+i) + \bar{z} \cdot (2-3i) = 1 - i^{11} .$$

2. (4) Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Pravci AB i CD na kojima leže stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki T ($A \in \overline{BT}$, a $D \in \overline{CT}$). Mjera kuta ATC jednaka je polovini razlike mjera središnjih kutova koji pripadaju tetivama $\overline{BC}$ odnosno $\overline{DA}$. Dokažite!

3. (4) Ako je $3x + 2y = 1$, odredite minimalnu vrijednost izraza $x^2 + y^2$.

4. (4) Odredite sve parove cijelih brojeva x, y za koje je

$$x^{2010} = y^{2010} + 2010 .$$

5. (4) U paralelogramu $ABCD$ je duljina stranice $|AB| = 8$ cm, a duljina dijagonale $|AC| = 8\sqrt{3}$ cm. Ako je kut $\measuredangle CAB = 30^\circ$, izračunajte površinu tog paralelograma.

6. (10) Za koje vrijednosti pozitivnog realnog parametra m jednadžba

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{5+x} = m$$

ima rješenja?

7. (10) Turistički brod "Galeb" plovi pravocrtno prema sjeveru. Kod rta "Val" dvoje mladih turista otplovilo je brzim skuterom u smjeru koji zatvara 120° sa smjerom kretanja broda, prema otoku udaljenom od rta 15 km. Ako skuter ima goriva dostatnog za točno 40 km vožnje, koliko se najviše kilometara skuter može približiti otoku da bi sigurno stigao natrag do broda? Brod će u tom slučaju (dok skuter prijeđe 40 km), do trenutka ponovnog sastajanja, prijeći 16 km.

8. (10) Za prirodan broj kažemo da je *palindrom* ako je jednak broju zapisanom istim znamenkama u obrnutom poretku. Nađite najveći peteroznamenkasti palindrom koji je djeljiv sa 101.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

15. ožujka 2010.

1. (4) Riješite jednadžbu $\quad 4^{4\log x+1} - 17 \cdot 4^{3\log x} + 17 \cdot 4^{\log x} - 4 = 0.$

2. (4) Duljina jedne visine trokuta jednaka je zbroju duljina preostalih dviju visina. Zapišite duljinu najkraće stranice trokuta pomoću duljina preostalih dviju stranica.

3. (4) Ako je $a + a^{-1} = 2\cos x$, dokažite da je $a^4 + a^{-4} = 2\cos 4x$.

4. (4) Odredite realni broj p tako da $\mathrm{tg}\alpha$ i $\mathrm{tg}\beta$ budu korijeni kvadratne jednadžbe
$$x^2 + px - \sqrt{3} = 0$$
ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$.

5. (4) Za koje pozitivne realne brojeve a jednadžba
$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x} = a\ , \quad x \neq \frac{k\pi}{2}\ , \quad k \in \mathbb{Z}$$
ima realna rješenja?

6. (10) Zadan je jednakokračan trokut osnovice duljine 6 cm i kraka duljine 5 cm. Kružnica kojoj je jedan od krakova trokuta promjer, siječe preostale dvije stranice trokuta u točkama E i F. Odredite duljinu dužine $|EF|$.

7. (10) Odredite obujam pravilne 12-erostrane krnje piramide ako su R i r $(R > r)$ polumjeri kružnica opisanih oko baza i ako su bočni bridovi nagnuti pod kutem od $60°$ prema ravnini baze.

8. (10) Na košarkaškom turniru sudjelovalo je 8 ekipa i svaka je sa svakom odigrala po jednu utakmicu. Za pobjedu se dobivaju 2 boda, a za poraz 0 bodova (niti jedna utakmica nije završila neriješeno). Ekipe su sakupile redom 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2 boda. Koliko utakmica su posljednje 4 ekipe izgubile od prve 4 ekipe?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

15. ožujka 2010.

1. (4) Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $z^4 + 2 \cdot (1-i) \cdot z^2 - 2i = 0$.

2. (4) Tri broja čine rastući aritmetički niz. Ako drugi broj uvećamo za 1, a treći za 10, niz postaje geometrijski. Najmanji od ta tri broja jednak je 2. Koji su to brojevi?

3. (4) Nađite sva rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{\binom{4}{x}} - \frac{1}{\binom{5}{x}} = \frac{1}{\binom{6}{x}}\,.$$

4. (4) Ako za kutove trokuta vrijedi

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\,,$$

onda je trokut ili pravokutan ili jednakokračan. Dokažite!

5. (4) Sfera prolazi vrhovima donje osnovke kocke i dira sva četiri brida gornje osnovke. Ako je duljina brida kocke a, koliki je polumjer sfere?

6. (10) Riješite jednadžbu $3 \cdot 4^x + (3x-10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$.

7. (10) Točkom $M(6,2)$ unutar kružnice $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 36$ povučena je tetiva duljine $6\sqrt{3}$. Napišite jednadžbu pravca na kojem leži ta tetiva.

8. (10) Dokažite da se u krug polumjera 9 ne može smjestiti 400 točaka tako da udaljenost svake dvije bude veća od 1.