MATEMATIČKI KLOKAN

6 100 000 sudionika u 87 država Europe, Amerike, Afrike, Australije i Azije
Četvrtak, 19. ožujka 2020. – trajanje 75 minuta
Natjecanje za Student (IV. razred SŠ)

S

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala nisu dopuštena.** Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.
* **Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Točno rješenje za prvih osam zadataka donosi 3 boda, za drugih osam 4 boda, a za trećih osam 5 bodova.
* Ako u zadatku nije odabran odgovor ili su zacrnjena dva ili više odgovora istoga zadatka, dobiva se 0 bodova.
* Za netočan odgovor ne dobivaju se bodovi, nego se oduzima četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.

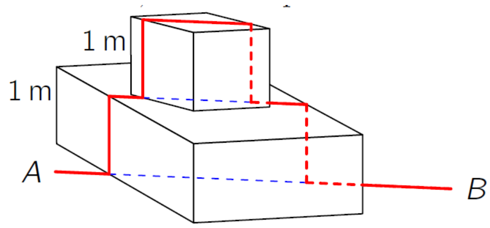
Pitanja za 3 boda:

1. Koliki je zbroj zadnjih dviju znamenaka umnoška $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

Rješenje: D
Zadnja znamenka sigurno je 0 jer je $2 \cdot 5 = 10$. Predzadnja znamenka zadnja je znamenka umnoška $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 288$, tj. 8. Traženi zbroj onda je $8 + 0 = 8$.

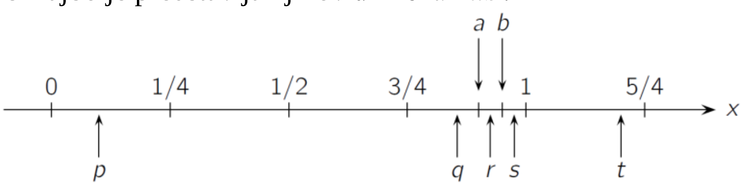
2. Mrav je svakodnevno šetao ravno po pravcu od točke A do točke B, koje su udaljene 5 m. Jednoga dana ljudi su na njegov put postavili dvije čudne prepreke, svaku visine 1 m. Sada se mrav u svojoj šetnji od A do B mora penjati i silaziti preko obiju prepreka. To čini okomito na pod, kao na slici. Koliko je njegov put sada dug?



A) 7 m B) 9 m C) $5 + 4\sqrt{2}$ m D) $9 - 2\sqrt{2}$ m
E) Ovisi o kutu pod kojim su prepreke smještene u odnosu na početnu putanju.

Rješenje: B
Horizontalni dio puta ostaje duljine 5 m. Na to dodajemo vertikalne uspone i silaske duljine $1 + 1 + 1 + 1$, tj. 4 m. Mrav sada prelazi put dug $5 + 4 = 9$ m.

3. Rene je na brojevnom pravcu najpreciznije što je mogao označio brojeve a i b. Koja od točaka p, q, r, s, t na brojevnom pravcu na slici najbolje predstavlja njihov umnožak ab?

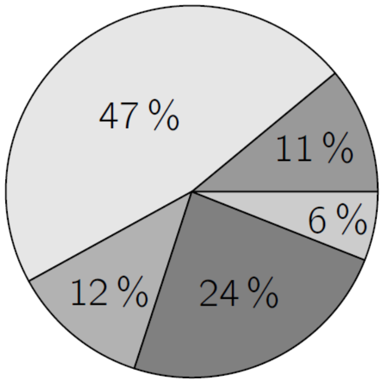


A) p B) q C) r D) s E) t

Rješenje: B

Brojevi a i b manji su od 1 i veći od $\frac{1}{2}$. Pomnožimo li nejednadžbu $b < 1$ (pozitivnim) brojem a, vidimo da vrijedi $ab < a$. Time smo eliminirali rješenja r, s, t. Primijetimo da vrijedi i $ab > \frac{1}{4}$ pa smo eliminirali i broj p.

4. Kružni dijagram prikazuje kako učenici moje škole dolaze u školu. Otprilike dvostruko više učenika dolazi biciklom nego javnim prijevozom. Približno isti broj učenika dolazi u školu autom i pješice. Ostali stižu mopedom. Koliki postotak učenika dolazi mopedom?



A) 6 % B) 11 % C) 12 % D) 24 % E) 47 %

Rješenje: A

Jedini par brojeva koji su približno jednaki su 11 % i 12 % . To su onda učenici koji u školu dolaze autom, odnosno pješice. Od preostalih brojeva 47 % otprilike je dvostruko više od 24 % pa su to učenici koji dolaze biciklom, odnosno javnim prijevozom. Jedini postotak koji nije raspoređen je 6 % pa on mora biti postotak učenika koji u školu dolaze mopedom.

5. Zbroj pet troznamenkastih brojeva iznosi 2664, kao što je prikazano na slici. Koliko iznosi $A + B + C + D + E$?

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ +\,B\,C\,D \\ +\,C\,D\,E \\ +\,D\,E\,A \\ +\,E\,A\,B \\ \hline 2\,6\,6\,4 \end{array}$$

A) 4 B) 14 C) 24 D) 34 E) 44

Rješenje: C

Prema zadnjoj znamenki broja 2664 vidimo da je zadnja znamenka traženoga zbroja također 4. Prema prvoj znamenki broja 2664 vidimo da je prva znamenka traženoga zbroja također 2.

6. Neka su a, b i c cijeli brojevi za koje vrijedi $1 \leq a \leq b \leq c$ i $abc = 1000000$. Koja je najveća moguća vrijednost broja b?

A) 100 B) 250 C) 500 D) 1000 E) 2000

Rješenje: D

Najveću vrijednost broja b postići ćemo ako je $b = c$ i $a = 1$. Tada imamo $1 \cdot b \cdot b = 1\,000\,000$, tj. $b^2 = 10^6$, iz čega vidimo da je odgovor $b = 10^3 = 1000$.

7. Svaka od dvije igraće kocke ima dvije crvene strane, dvije plave i dvije bijele. Bacimo li zajedno obje kocke, koja je vjerojatnost da će obje pasti na istu boju?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

Rješenje: E

Neka je $\Omega_1 = \{C_1, C_2, P_1, P_2, B_1, B_2\}$. Tada je $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ i u tom skupu ima $6 \cdot 2 = 12$ parova čije su koordinate iste boje. Stoga je vjerojatnost jednaka $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

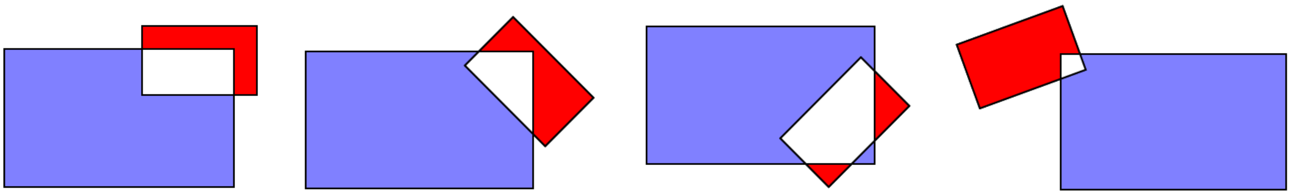
8. Koji od danih brojeva nije djeljiv brojem 3 ni za koji prirodan broj n?

A) $5n + 1$ B) n^2 C) $n(n + 1)$ D) $6n - 1$ E) $n^3 - 2$

Rješenje: D
Kako je broj $6n$ uvijek djeljiv brojem 3, broj $6n - 1$ neće nikada biti djeljiv brojem 3 (ostatak je uvijek 2). Za ostale ponuđene odgovore možemo pronaći primjere za koje je broj djeljiv s 3, primjerice:
A) $n = 1$, B) $n = 3$, C) $n = 3$, E) $n = 2$.

Pitanja za 4 boda:

9. Mali se i veliki pravokutnik preklapaju. Na slici su četiri takva slučaja. Označimo s A površinu velikog pravokutnika koja nije zajednička pravokutnicima na slici. Označimo s B površinu malog pravokutnika koja nije zajednička pravokutnicima na slici. Koja je od danih izjava o razlici $A - B$ istinita?



1. slučaj 2. slučaj 3. slučaj 4. slučaj

A) U 1. je slučaju razlika $A - B$ veća nego u ostalim slučajevima.
B) U 2. je slučaju razlika $A - B$ veća nego u ostalim slučajevima.
C) U 3. je slučaju razlika $A - B$ veća nego u ostalim slučajevima.
D) U 4. je slučaju razlika $A - B$ veća nego u ostalim slučajevima.
E) Razlika $A - B$ jednaka je u svim slučajevima.

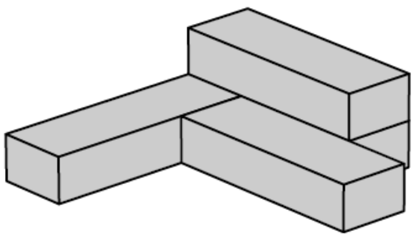
Rješenje: E
Označimo s C površinu zajedničku pravokutnicima na slici. Vrijedi: $A - B = (A + C) - (B + C)$, što je jednako razlici površina velikog i malog pravokutnika, a to je konstanta.

10. Na stolu je pet kovanica "glavom" okrenutom prema gore. U svakom koraku trebaš okrenuti točno tri kovanice. Koji je najmanji broj koraka potreban da bi sve kovanice bile okrenute "pismom" prema gore?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5
E) Nije moguće imati sve kovanice okrenute „pismom" prema gore.

Rješenje: B
Označimo početnu situaciju GGGGG. U prvom koraku okrećemo točno tri kovanice pa možemo imati okrenuta samo tri pisma. U drugom koraku opet okrećemo točno tri kovanice pa možemo dobiti najviše četiri pisma (moramo ponovo okrenuti barem jednu od već okrenutih kovanica). Dakle, broj koraka mora biti veći od 2. U tri je koraka moguće postići željenu kombinaciju, primjerice (podcrtani su novčići koje odlučujemo okrenuti u sljedećem koraku): GGGGG → GGPPP → GPGGP → PPPPP.

11. Četiri jednake kutije zalijepljene su tako da tvore tijelo na slici. Potrebna je 1 litra boje da se oboji jedna takva kutija. Koliko je litara boje potrebno da se oboji dobiveno tijelo?



A) 2.5 B) 3 C) 3.25 D) 3.5 E) 4

Rješenje: B

Za četiri kutije trebali bismo 4 litre boje. Od toga treba oduzeti količinu boje potrebnu za površine po kojima su kutije zalijepljene. Zbroje li se sve takve površine, dobivamo cijelu jednu kutiju. Zato će za bojenje tijela dobivenog lijepljenjem biti potrebna jedna litra boje manje.

12. Neka su a, b i c cijeli brojevi. Čemu izraz $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ nikako ne može biti jednak?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 6 E) 8

Rješenje: B

Kad pojednostavnimo taj izraz, dobivamo: $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc$, a to je broj djeljiv s 2. Dakle, nikako ne može biti jednak 1.

Ostala ponuđena rješenja su moguća, primjerice:

A) $a=b=c$ C) $a=1, b=0, c=1$, D) $a=1, b=2, c=3$, E) $a=2, b=0, c=2$.

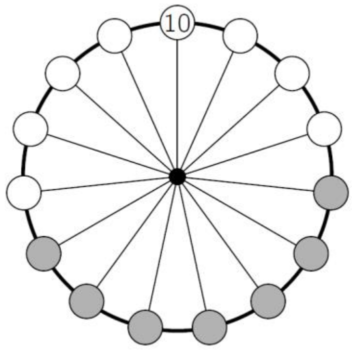
13. Prve dvije znamenke stoznamenkastog broja su 2 i 9. Koliko znamenaka ima kvadrat ovoga broja?

A) 101 B) 199 C) 200 D) 201 E) Ne može se odrediti.

Rješenje: B

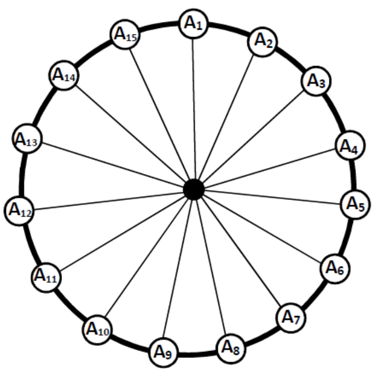
Označimo s x promatrani broj. Tada je $2.9\cdot 10^{99}\leq x<3\cdot 10^{99}$, pa je $8.41\cdot 10^{198}\leq x^2<9\cdot 10^{198}$. Dakle, x^2 ima 199 znamenaka.

14. Matija je na kotač postavio 15 brojeva. Vidljiv je samo jedan od tih brojeva, 10 na vrhu. Zbroj brojeva u bilo kojih sedam susjednih polja na kotaču uvijek je isti (npr. zbroj sivih polja na slici). Koliko od sljedećih brojeva može biti zbroj svih 15 brojeva na kotaču: 75, 216, 365, 2020?



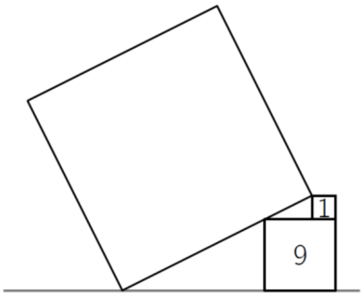
A) Nijedan. B) Jedan. C) Dva. D) Tri. E) Četiri.

Rješenje: A



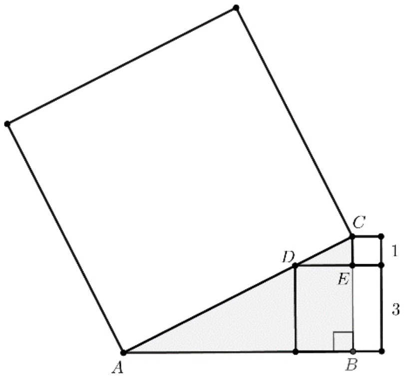
Označimo brojeve u poljima $A_1, A_2, \dots, A_{15}$, kao na slici. Zbog činjenice da je $A_1+A_2+\cdots A_7=A_2+A_3+\cdots A_8$ slijedi da je $A_1=A_8$. Slično, iz $A_8+A_9+\cdots A_{14}=A_9+A_{10}+\cdots A_{15}$ slijedi da je $A_8=A_{15}$, odnosno $A_1=A_8=A_{15}$. Nastavimo li isti postupak, uvidjet ćemo da vrijedi $A_1=A_8=A_{15}=A_7=A_{14}=\cdots$, odnosno svi su brojevi na kotaču jednaki (i iznose 10). Zbroj svih brojeva na kotaču onda je $15\cdot 10=150$ i ne može biti nijedan drugi broj.

15. Veliki kvadrat dodiruje dva manja kvadrata, kao što je prikazano na slici. Brojevi unutar manjih kvadrata predstavljaju njihove površine. Kolika je površina velikoga kvadrata?



A) 49 B) 80 C) 81 D) 82 E) 100

Rješenje: B



Stranice manjih kvadrata duge su 1 i 3. Uočimo na slici slične trokute $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ (stranice su im paralelne).
Postavimo omjer

$$|AB| : |BC| = |DE| : |EC|, \text{ tj. } |AB| : 4 = 2 : 1$$

iz čega dobivamo da je $|AB| = 8$.
Sada pomoću Pitagorinog poučka računamo:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 8^2 + 4^2 = 80.$$

To je površina velikog kvadrata.

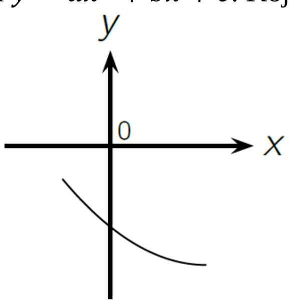
16. Niz f_n zadan je s $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ i $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ za $n \geq 1$. Koliko je parnih brojeva među prvih 2020 članova ovoga niza?

A) 673 B) 674 C) 1010 D) 1011 E) 1347

Rješenje: A
Zbroj dvaju neparnih brojeva paran je broj (P), zbroj neparnog i parnog broja neparan je broj (N). Članovi niza po parnosti se nižu ovako: NNPNNPNNPNNP… Drugim riječima, svaki treći broj u nizu bit će paran. Kako je $2020 = 673 \cdot 3 + 1$, među prvih 2020 članova niza pojavit će se 673 parna broja.

Pitanja za 5 bodova:

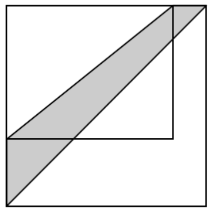
17. Na slici je dio parabole zadane jednadžbom $y = ax^2 + bx + c$. Koji je od danih brojeva pozitivan?



A) c B) $b + c$ C) $a \cdot c$ D) $b \cdot c$ E) $a \cdot b$

Rješenje: D
Vidimo da je parabola otvorena prema gore pa vrijedi $a > 0$. Vidimo da je odsječak na ordinati negativan pa vrijedi $c < 0$. Možemo još zaključiti da je apscisa tjemena pozitivan broj, tj. da vrijedi $-\frac{b}{2a} > 0$, iz čega slijedi da je $b < 0$ (jer je $a > 0$). Sada se lako vidi da je od ponuđenih odgovora samo D pozitivan.

18. Duljina jedne stranice pravokutnika povećana je 20 %. Duljina njegove druge stranice povećana je 50 %. Tako smo dobili kvadrat, kao na slici. Osjenčani dio između dijagonale dobivenog kvadrata i dijagonale početnog pravokutnika ima površinu 30. Kolika je bila površina početnog pravokutnika?



A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

Rješenje: D
Označimo s a i b stranice početnog pravokutnika. Nove duljine stranica onda su $1.2a$ i $1.5b$. Površinu osjenčanog dijela možemo izračunati oduzimajući površine dvaju trokuta (pola kvadrata i pola pravokutnika): $0.5\left(\frac{1.2a\cdot 1.5b}{2}-\frac{a\cdot b}{2}\right)=30$, iz čega slijedi $a\cdot b=75$. Dakle, površina početnog pravokutnika je 75.

19. Prirodni broj N djeljiv je sa svim prirodnim brojevima od 2 do 11, osim dvama od njih. Koji od danih parova brojeva mogu biti te iznimke?

A) 2 i 3 B) 4 i 5 C) 6 i 7 D) 7 i 8 E) 10 i 11

Rješenje: D
A) Ne može biti rješenje jer bi u tom slučaju broj bio djeljiv sa 6 pa posljedično i s 2 i s 3.
B) Ne može biti rješenje jer bi u tom slučaju broj bio djeljiv s 8 pa posljedično i s 4.
C) Ne može biti rješenje jer bi u tom slučaju broj bio djeljiv s 2 i s 3 pa posljedično i sa 6.
E) Ne može biti rješenje jer bi u tom slučaju broj bio djeljiv s 2 i s 5 pa posljedično i s 10.
D je moguće, jedan primjer je broj $1980=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$.

20. Slastičarnica ujutro nudi 16 okusa sladoleda. Ana želi sladoled s dva okusa. Navečer je nekoliko okusa rasprodano, a od onih dostupnih Krasna želi sladoled s tri okusa. Broj kombinacija dvaju okusa sladoleda od kojih bira Ana jednak je broju kombinacija triju okusa sladoleda od kojih bira Krasna. Koliko je okusa rasprodano?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

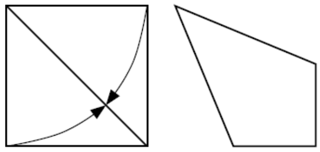
Rješenje: E
Ana može izabrati između $\binom{16}{2}=\frac{16\cdot 15}{1\cdot 2}=120$ kombinacija. Krasna može izabrati između $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ kombinacija, što je također jednako 120. Tražimo tri uzastopna prirodna broja čiji je umnožak jednak $120\cdot 6=2^4\cdot 3^2\cdot 5$. Riječ je o brojevima 8, 9 i 10. Navečer je ostalo 10 okusa, što znači da ih se 6 rasprodalo.

21. Toni ima na raspolaganju 71 pikulu u kutiji. Dopušteno mu je uzeti točno 30 pikula iz kutije ili vratiti točno 18 pikula u kutiju. Svaki od ovih poteza Toni može ponoviti koliko god puta želi. Koliko najmanje pikula može biti u kutiji?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

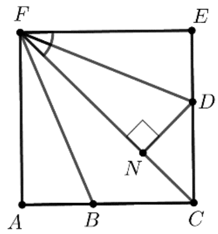
Rješenje: C
Kako su 30 i 18 oba višekratnici broja 6, broj pikula u kutiji uvijek se mijenja za neki višekratnik broja 6. Najveći višekratnik broja 6 manji od 71 je 66. Prema tome u kutiji može ostati najmanje 5 pikula. No, moramo potvrditi da je to moguće postići samo s dopuštena dva poteza. Evo jednog načina:
$71-30-30+18+18+18-30-30=5$.

22. Vanda je uzela kvadratni komad papira stranice duljine 1 i presavila ga tako da dvije njegove stranice padnu na dijagonalu (kao na slici). Kolika je površina dobivenoga četverokuta?



A) $2-\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{3}{5}$

Rješenje: A



Trokuti FED i FND sukladni su. Dakle, $|ED| = |DN|$. Budući da je $\overline{FC}$ dijagonala kvadrata, slijedi da je kut $\angle DCF = 45°$, pa je trokut DNC pravokutni jednakokračan trokut, tj. $|DN| = |NC|$. A za $|NC|$ vrijedi:

$$|NC| = |FC| - |FN| = \sqrt{2} - 1.$$

Površina četverokuta dobivenoga presavijanjem jednaka je zbroju površina dvaju sukladnih trokuta (ΔFCD i ΔFCB): $2 \cdot \frac{|FC|\cdot|DN|}{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2}$.

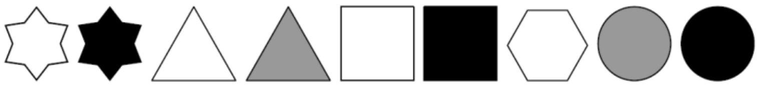
23. Ledenjak ima oblik kocke. Točno 90 % njegova volumena skriveno je pod vodom. Tri brida kocke djelomično su vidljiva iznad vode. Vidljivi dijelovi tih rubova duljina su 24 m, 25 m i 27 m. Koliko je dugačak brid kocke?

A) 30 m B) 33 m C) 34 m D) 35 m E) 39 m

Rješenje: A

Dio kocke koji je vidljiv trostrana je piramida kojoj je baza pravokutan trokut, a visina je dio trećeg vidljivog brida kocke (sva tri brida međusobno su okomita u vrhu kocke koji je iznad vode). Iz volumena vidljivog dijela dobivamo jednadžbu $\frac{1}{10}a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{24\cdot 25}{2} \cdot 27$ iz koje slijedi $a = 30$ m.

24. Adam i Borna pokušavaju doznati koji je od sljedećih likova Darku najdraži:



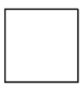
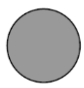
Adam zna da je Darko rekao Borni o kojem se obliku radi. Borna zna da je Darko rekao Adamu o kojoj se boji radi. Zatim se odvije ovakav razgovor:

Adam: "Ne znam koji je lik Darku najdraži i znam da ni Borna ne zna."

Borna: "Isprva nisam znao Darkov najdraži lik, ali sada znam."

Adam: "Sada znam i ja."

Koji je lik Darku najdraži?

A)  B)  C)  D)  E) 

Rješenje: C

Budući da Borna ne zna koji je Darkov najdraži lik, to ne može biti šesterokut. Znači da lik nije bijele boje (inače Adam ne bi mogao znati da Borna ne zna o kojem je liku riječ). Ako činjenica da lik nije bijele boje govori Borni koji je Darkov najdraži lik, onda to mora biti zvijezda, trokut ili kvadrat (ti se oblici pojavljuju u paru s bijelom bojom). Ako sada i Adam zna koji je Darkov najdraži lik, onda to mora biti trokut (Adam zna boju, a da je boja crna, ne bi mogao biti siguran). Dakle, Darkov je najdraži lik sivi trokut.

Rješenja zadataka bit će objavljena 20. travnja 2020. na internetskoj stranici HMD-a.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 4. svibnja 2020. na internetskoj stranici HMD-a.
Primjedbe učenika na plasman primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 11. svibnja 2020. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 21. svibnja 2020.
Obavijesti se mogu dobiti na internetu – **http://www.matematika.hr/klokan/2020/**.