MATEMATIČKI KLOKAN

6 100 000 sudionika u 87 država Europe, Amerike, Afrike, Australije i Azije
Četvrtak, 19. ožujka 2020. – trajanje 75 minuta
Natjecanje za Junior (II. i III. razred SŠ)

J

* Natjecanje je pojedinačno. **Računala nisu dopuštena**. Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih nagradu.
*** Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan**.
* Točno rješenje za prvih osam zadataka donosi 3 boda, za drugih osam 4 boda, a za trećih osam 5 bodova.
* Ako u zadatku nije odabran odgovor ili su zacrnjena dva ili više odgovora istoga zadatka, dobiva se 0 bodova.
* Za netočan odgovor ne dobivaju se bodovi, nego se oduzima četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.

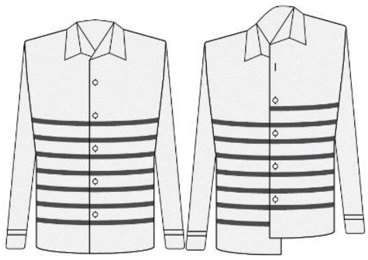
Pitanja za 3 boda:

1. Godine 2020. i 1717. sastoje se od dvoznamenkastog dijela koji se dva puta ponavlja. Koliko godina treba proći od 2020. do sljedeće godine s ovim svojstvom?

A) 20 B) 101 C) 120 D) 121 E) 202

Rješenje: B
Riječ je o 2121. godini.

2. Kada Karlo pravilno nosi svoju novu košulju, kao što je prikazano na lijevoj slici, vodoravne pruge tvore sedam zatvorenih prstenova oko njegova struka. Jutros je košulju zakopčao krivo, kao što je prikazano na desnoj slici. Koliko je zatvorenih prstenova jutros bilo oko Karlova struka?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: A
Nema prstenova, pruge tvore spiralu.

$$\begin{array}{r} AB \\ +\,CD \\ \hline 79 \end{array} \qquad \begin{array}{r} AD \\ +\,CD \\ +\,AB \\ +\,CB \\ \hline ? \end{array}$$

3. U računu prikazanom na slici svako slovo predstavlja jednu znamenku. One tvore dvoznamenkaste brojeve. Dva broja prikazana lijevo daju zbroj 79. Koliko iznosi zbroj četiriju brojeva prikazanih desno?

A) 79 B) 158 C) 869 D) 1418 E) 7979

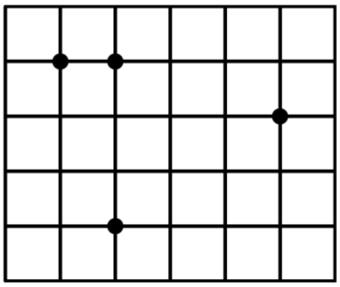
Rješenje: B
Iz računa prikazanog lijevo vidimo da je $10(A+C)+(B+D)=79$. Onda znamo da je rezultat desnog izračuna $20(A+C)+2(B+D)=158$.

4. Zbroj četiriju uzastopnih cijelih brojeva iznosi 2. Odredi najmanji od tih brojeva.

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

Rješenje: C
Ako je n najmanji broj u nizu, imamo jednadžbu $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=2$, tj. $4n+6=2$ čije je rješenje $n=-1$.

5. U jediničnoj kvadratnoj mreži istaknute su četiri točke (vidi sliku). Koristeći tri od te četiri točke formiramo trokut. Kolika je najmanja površina trokuta određenog tim trima točkama?



A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Rješenje: A
Četiri su moguća trokuta. Najmanji od njih dobije se spajanjem gornjih triju točaka i ima površinu $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

6. Ako vrijedi $17x + 51y = 102$, koliko iznosi $9x + 27y$?

A) 54 B) 36 C) 34 D) 18 E) Ne može se odrediti.

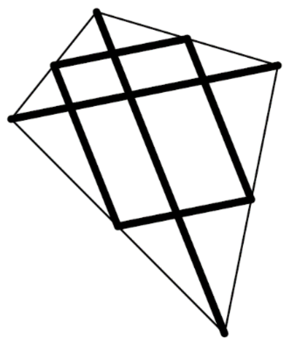
Rješenje: A
Podijelimo li danu jednadžbu sa 17, dobit ćemo $x + 3y = 6$. Pomnožimo sada dobivenu jednadžbu s 9 pa imamo $9x + 27y = 54$.

7. Marija ima 10 komada papira. Neki su oblika kvadrata, a neki trokuta. Marija prereže tri kvadrata po dijagonali, prebroji vrhove na svih 13 komada papira koje sada ima i dobije rezultat 42. Koliko je trokuta Marija imala prije rezanja?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Rješenje: E
Označimo s t broj trokuta na početku. Kvadrata je onda bilo $10 - t$. Nakon rezanja imamo 3 kvadrata manje, a 6 trokuta više. Vrhova će onda biti $3 \cdot (t + 6) + 4 \cdot (7 - t) = 42$, iz čega slijedi $t = 4$.

8. Martin je izradio zmaja tako što je izrezao ravni drveni štap na 6 dijelova. Dva dijela, duljina 120 cm i 80 cm, upotrijebio je kao dijagonale. Preostala četiri dijela spajala su polovišta stranica zmaja, kao što je prikazano na slici. Koliko je štap bio dugačak prije rezanja?



A) 300 cm B) 370 cm C) 400 cm D) 410 cm E) 450 cm

Rješenje: C
Dijelovi koji spajaju polovišta stranica zmaja dvostruko su kraći od njegovih dijagonala (riječ je o srednjicama trokuta).
Štap je bio dugačak $120 + 80 + 2 \cdot \frac{120}{2} + 2 \cdot \frac{80}{2} = 400$ cm.

Pitanja za 4 boda:

9. Za cijele brojeve a, b, c i d vrijedi $ab = 2cd$. Koji od danih brojeva ne može biti umnožak $abcd$?

A) 50 B) 100 C) 200 D) 450 E) 800

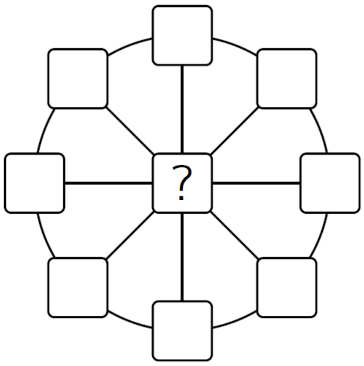
Rješenje: B
Iz uvjeta izravno slijedi da je $abcd = 2(cd)^2$. Od danih brojeva samo 100 ne može biti tako zapisan.

10. Jednakokračan trokut ima stranicu duljine 20 cm. Jedna od preostalih dviju stranica dugačka je kao $\frac{2}{5}$ druge. Koliki je opseg ovoga trokuta?

A) 36 cm B) 48 cm C) 60 cm D) 90 cm E) 120 cm

Rješenje: B
Jedna od preostalih stranica duljine je 20 cm jer je riječ o jednakokračnom trokutu. Treća stranica onda može biti $\frac{2}{5} \cdot 20 = 8$ cm ili $\frac{5}{2} \cdot 20 = 50$ cm. Kako u drugom slučaju duljine ne tvore trokut (ne zadovoljavaju nejednakost trokuta, $20 + 20 < 50$), opseg mora biti $2 \cdot 20 + 8 = 48$ cm.

11. Toma želi u svaku od devet kućica prikazanih na slici upisati jedan broj. Želi da zbroj triju brojeva na svakome promjeru bude 13 te da zbroj osam brojeva na kružnici bude 40. Koji broj Toma mora zapisati u središnju ćeliju?



A) 3 B) 5 C) 8 D) 10 E) 12

Rješenje: A
Zbrojimo li brojeve na četiri različita promjera, dobit ćemo $4 \cdot 13 = 52$. Tako smo brojeve na kružnici zbrojili jednom, a broj u središtu četiri puta, tj. vrijedi $40 + 4? = 52$ pa je $? = 3$.

12. Maša je između druge i treće znamenke broja 2020 stavila znak množenja i primijetila da je produkt $20 \cdot 20$ potpuni kvadrat. Koliko brojeva između 2010 i 2099 (uključujući 2020) ima isto svojstvo?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Rješenje: C
Svi umnošci koje promatramo oblika su $20 \cdot \overline{ab}$ tj. $2^2 \cdot 5 \cdot \overline{ab}$. Želimo li da taj umnožak bude potpuni kvadrat, mora vrijediti $\overline{ab} = 5 \cdot n^2$, a $5n^2$ bit će dvoznamenkast broj za $n \in \{2,3,4\}$. To su brojevi 2020, 2045, 2080.

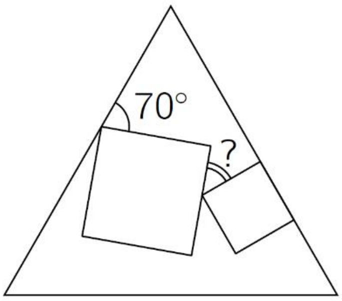
13. Luka je putovanje automobilom dugo 520 km započeo s 14 litara goriva u rezervoaru. Njegov automobil troši 1 litru goriva na 10 km. Nakon 55 km vožnje Luka je vidio znak s prikazanim udaljenostima do sljedećih pet benzinskih postaja na njegovu putu. Te su udaljenosti 35 km, 45 km, 55 km, 75 km i 95 km. Zapremnina rezervoara Lukinog automobila je 40 litara, a Luka na svome putu želi samo jednom stati kako bi napunio rezervoar. Koliko je udaljena benzinska postaja na kojoj bi Luka trebao stati?

A) 35 km B) 45 km C) 55 km D) 75 km E) 95 km

Rješenje: D

U trenutku kada Luka ugleda znak, ima goriva za još $14 \cdot 10 - 55 = 85$ km, što znači da može stići najdalje do četvrte benzinske postaje. Ta je postaja dobar izbor jer od treće postaje treba voziti još 410 km, za što mu ne bi bio dovoljan pun rezervoar ($40 \cdot 10 = 400$ km).

14. Unutar jednakostraničnog trokuta ucrtana su dva kvadrata različite veličine. Jedna stranica jednoga od tih kvadrata leži na jednoj stranici trokuta, kao što je prikazano na slici. Kolika je mjera kuta označenog upitnikom?

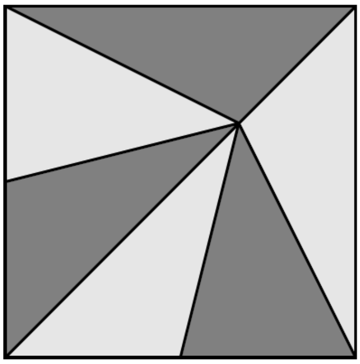


A) 25° B) 30° C) 35° D) 45° E) 50°

Rješenje: E

Uočimo (nekonveksni) peterokut u gornjem dijelu slike. Zbroj kutova u ovom peterokutu iznosi 540° jer ga se može podijeliti na tri trokuta, a u svakome je od njih zbroj unutarnjih kutova 180°. Zbrojimo li poznate kutove u tom peterokutu, imamo $90° + 60° + 70° + 270° = 490°$. Traženi kut iznosi $540° - 490° = 50°$.

15. Vitraj u obliku kvadrata površine 81 dm^2 sastoji se od šest trokuta jednake površine, kao što je prikazano na slici. Muha stoji na mjestu gdje se šest trokuta sastaje. Koliko je muha daleko od dna prozora?



A) 3 dm B) 5 dm C) 5.5 dm D) 6 dm E) 7.5 dm

Rješenje: D

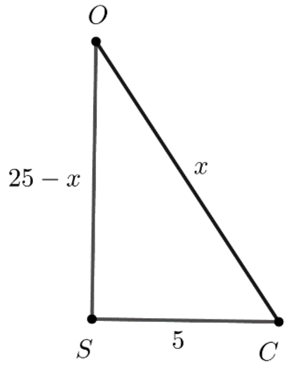
Svaki od šest trokuta vitraja ima površinu $P = \frac{27}{2}$ dm^2. Trokut kojemu je jedna stranica gornji rub prozora ima visinu duljine $v = \frac{2P}{a} = \frac{27}{9} = 3$ dm. To znači da je muha od dna prozora udaljena $9 - 3 = 6$ dm.

16. Zec i kornjača natjecali su se u utrci na 5 km po ravnoj liniji. Zec je pet puta brži od kornjače, no zabunom je krenuo trčati okomito na rutu utrke. Nakon nekog vremena uvidio je svoju pogrešku, okrenuo se i nastavio trčati ravno prema cilju. Stigao je u isto vrijeme kao kornjača. Kolika je udaljenost od točke u kojoj se zec okrenuo do cilja?

A) 11 km B) 12 km C) 13 km D) 14 km E) 15 km

Rješenje: C

Kako je zec pet puta brži od kornjače, a na cilj su stigli istovremeno, zaključujemo da je zec pretrčao 25 km. Ako je od točke u kojoj se okrenuo (O) do cilja (C) prešao x km, onda je od starta (S) do točke O prešao $25 - x$ km (vidi sliku). Prema Pitagorinu teoremu mora vrijediti $5^2 + (25 - x)^2 = x^2$, iz čega slijedi $x = 13$ km.



Pitanja za 5 bodova:

17. Znamenke od 1 do 9 nasumično su raspoređene tako da tvore deveteroznamenkast broj. Koja je vjerojatnost da je dobiveni broj djeljiv brojem 18?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Rješenje: B

Zbroj znamenaka svakog ovako dobivenog broja je 45, dakle broj je djeljiv s 9. Da bi bio djeljiv s 18, treba još biti djeljiv brojem 2, tj. posljednja znamenka treba biti parna. Od mogućih 9 znamenaka četiri su parne pa je tražena vjerojatnost $\frac{4}{9}$.

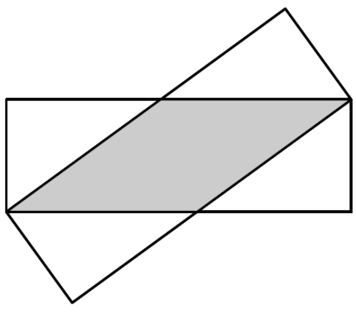
18. Na stolu su kvadrati i trokuti. Neki su likovi plavi, a ostali su crveni; neki su likovi veliki, a ostali su mali. Znamo da su sljedeće dvije izjave istinite: „*Ako je lik velik, onda je kvadrat.*“ i „ *Ako je lik plav, onda je trokut.*“
Koja od ponuđenih izjava mora biti istinita?

A) Svi crveni likovi su kvadrati.
B) Svi kvadrati su veliki.
C) Svi mali likovi su plavi.
D) Svi trokuti su plavi.
E) Svi plavi likovi su mali.

Rješenje: E

Iz zadanih izjava znamo da su svi veliki likovi kvadrati i da su svi plavi likovi trokuti. No, kvadrat može biti mali i trokut može biti crven – A, B i D ne moraju biti istinite izjave. Lik može biti mali i crveni – C ne mora biti istinita izjava. E mora biti istinita izjava jer su svi plavi likovi trokuti, a kada bi on bio velik, onda bi bio kvadrat pa mora biti mali.

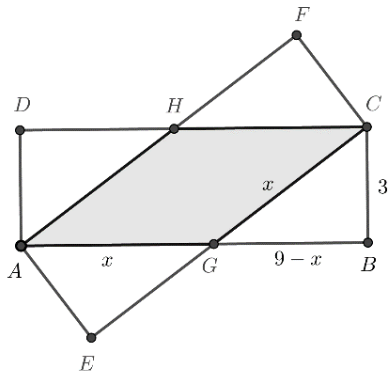
19. Dva se sukladna pravokutnika duljina stranica 3 cm i 9 cm preklapaju, kao što je prikazano na slici. Kolika je površina zajedničkog im dijela?



A) 12 cm^2 B) 13.5 cm^2 C) 14 cm^2 D) 15 cm^2 E) 16 cm^2

Rješenje: D

Označimo $|AG| = x$. Onda je $|GB| = 9 - x$. Pravokutni trokuti AEG i CBG sukladni su ($|AE| = |BC|$ i kut pri vrhu G im je jednake mjere). Onda je i $|GC| = x$. Primijenimo li Pitagorin teorem na trokut CBG, imamo $(9 - x)^2 + 3^2 = x^2$, iz čega dobivamo da je $x = 5$. Površina osjenčanog romba je $5 \cdot 3 = 15$ cm^2.



20. Katja je vrhove pravilne četverostrane piramide označila brojevima 1, 2, 3, 4 i 5. Zatim je za svaku stranu piramide izračunala zbroj brojeva u njenim vrhovima. Četiri takva zbroja su 7, 8, 9 i 10. Koliki je zbroj brojeva u vrhovima pete strane?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Rješenje: C
Zbroj brojeva u vrhovima kvadratne baze može biti najmanje $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, što znači da su brojevi 7, 8 i 9 sigurno zbrojevi brojeva u vrhovima bočnih strana piramide. Broj 5 ne može biti u vrhu piramide jer bi onda najmanji zbroj brojeva u vrhovima bočne strane bio $1 + 2 + 5 = 8$. Dakle, 5 se nalazi u vrhu baze. Sada zbroj brojeva u bazi može biti najmanje $1 + 2 + 3 + 5 = 11$, što znači da je i 10 zbroj brojeva u vrhovima bočne strane. Dakle, zbrojevi 7, 8, 9 i 10 zbrojevi su brojeva koji se nalaze u vrhovima bočnih strana. Zbrojimo li te brojeve, zapravo smo svaki broj koji se nalazi u bazi zbrojili dva puta, a broj koji se nalazi u vrhu piramide četiri puta: $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 2V = 7 + 8 + 9 + 10$. Iz ove jednakosti slijedi da je $V = 2$, tj. broj u vrhu piramide je 2. Konačno, zbroj brojeva u vrhovima pete strane (baze) je $1 + 3 + 4 + 5 = 13$.

21. Ana želi u 4×4 tablicu upisati brojeve tako da zbroj brojeva u svakome retku i zbroj brojeva u svakom stupcu bude jednak. Već je počela upisivati brojeve, kao što je prikazano na slici. Koji će broj upisati u osjenčani kvadratić?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

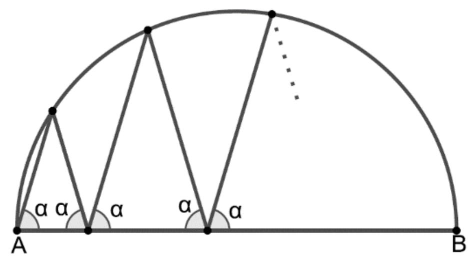
Rješenje: C
Prvi redak i drugi stupac imaju zajednički kvadratić. Kako bi svi zbrojevi po stupcima i retcima bili jednaki, u kvadratiću u četvrtom redu i drugom stupcu mora pisati 1 ($1 + 6 + 3 = 2 + 7 + 1$). Isto tako, četvrti stupac i četvrti redak imaju zajednički kvadratić pa u osjenčanom kvadratiću treba pisati 7 ($3 + 8 + 4 = 7 + 1 + 7$).

22. Alisa, Beta i Cvita natjecale su se u obaranju ruke. U svakoj igri dvije su djevojke obarale ruku dok se treća odmarala. Nakon svake igre pobjednica bi igrala protiv djevojke koja se odmarala. Ukupno je Alisa igrala 10 puta, Beta 15 puta i Cvita 17 puta. Tko je izgubio u drugoj igri?

A) Alisa B) Beta C) Cvita D) Mogle su izgubiti Alisa ili Beta. E) Mogle su izgubiti Beta ili Cvita.

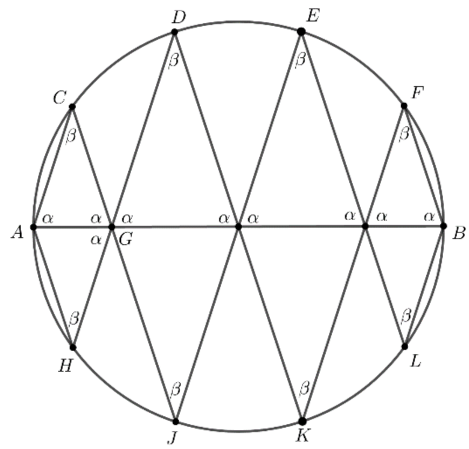
Rješenje: A
Djevojke su odigrale $\frac{10+15+17}{2} = 21$ igru. Alisa se odmarala $21 - 10 = 11$ igara. Kako se nitko ne može odmarati dvije igre za redom, zaključujemo da se Alisa odmarala tijekom prve, treće, pete, …dvadeset i prve igre. Dakle, izgubila je u drugoj igri.
Ovakav scenarij je moguć: prvih devet igara moglo bi biti BC, AB, BC, AB, BC, AB, BC, AB, BC, a zatim sljedećih dvanaest AC, BC, AC, BC, …, BC.

23. Izlomljena crta počinje u točki A na jednom kraju promjera $\overline{AB}$ kružnice. Svaki kut između izlomljene crte i promjera $\overline{AB}$ iznosi α, kao što je prikazano na slici. Nakon četiri šiljka, izlomljena crta završava u točki B. Koja je mjera kuta α?



A) 60°   B) 72°   C) 75°   D) 80°   E) Ništa od navedenog.

Rješenje: B
Zrcalimo sliku s obzirom na promjer polukružnice tako da vrijedi $\widehat{AC} = \widehat{AH}$, $\widehat{CD} = \widehat{HJ}$ itd. Primijetimo da su točke D, G i H kolinearne zbog jednakosti kutova (α) te da su pravci AC i GD paralelni. Slijedi da je $\widehat{CD} = \widehat{AH}$, odnosno $\widehat{AC} = \widehat{AH} = \widehat{CD} = \widehat{HJ}$. Analogno se pokaže da su svi lukovi na slici jednake duljine. To znači da je deseterokut $ACDEFBLKJH$ pravilan. Njegov unutarnji kut iznosi 144° pa je $\alpha = \frac{144°}{2} = 72°$.



24. Osam uzastopnih troznamenkastih prirodnih brojeva ima sljedeće svojstvo: broj je djeljiv svojom zadnjom znamenkom. Koliko iznosi zbroj znamenaka najmanjeg od tih osam brojeva?

A) 10   B) 11   C) 12   D) 13   E) 14

Rješenje: D
Zadnja znamenka niti jednog od ovih brojeva ne može biti 0 jer broj tada ne bi bio djeljiv svojom posljednjom znamenkom. Zadnje znamenke ovoga niza brojeva stoga mogu biti redom 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Tada c dijeli i broj $\overline{abc} - c = \overline{ab0}$. Drugim riječima, broj $\overline{ab0}$ djeljiv je brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Najmanji takav broj je $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$. Najmanji od traženih osam brojeva je stoga 841, a zbroj njegovih znamenaka je 13.
Napomenimo da smo drugi slučaj odbacili jer najmanji broj $\overline{ab0}$ djeljiv brojevima 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nije troznamenkast: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Rješenja zadataka bit će objavljena 20. travnja 2020. na internetskoj stranici HMD-a.
Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 4. svibnja 2020. na internetskoj stranici HMD-a.
Primjedbe učenika na plasman primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 11. svibnja 2020. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 21. svibnja 2020.
Obavijesti se mogu dobiti na internetu – **http://www.matematika.hr/klokan/2020/**.