DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Šibenik, 28.-30. travnja 2010.

7. razred-rješenja

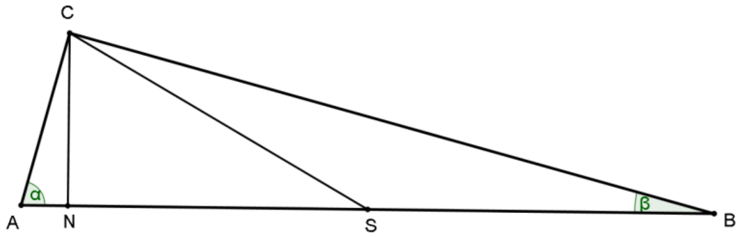
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x cijena te vrste benzina na početku.
   Na prvoj benzinskoj crpki je cijena nakon prvog poskupljenja $x + 5\% \cdot x = 1.05x$, nakon drugog poskupljenja $1.05x + 6\% \cdot 1.05x = 1.113x$ i nakon trećeg poskupljenja $1.113x + 4\% \cdot 1.113x = 1.15752x$.
   Na drugoj benzinskoj crpki je cijena nakon prvog poskupljenja $x + 2\% \cdot x = 1.02x$, nakon drugog poskupljenja $1.02x + 10\% \cdot 1.02x = 1.122x$ i nakon trećeg poskupljenja $1.122x + 6\% \cdot 1.122x = 1.18932x$.
   Kako je 1.18932>1.15752, cijena na drugoj benzinskoj crpki je veća nakon trećeg poskupljenja.
   Dalje je $\frac{1.18932x-1.15752x}{1.15752x} = \frac{0.0318x}{1.15752x} = \frac{5}{182}$ ≈2.7%.
   Cijena te vrste benzina je veća na drugoj benzinskoj crpki nakon trećeg poskupljenja i to za približno 2.7%.

2. Kako je $8 = 2 \cdot 4$, onda je svaki broj djeljiv s 8 paran pa je posljednja znamenka traženog broja parna.
   Budući da je umnožak znamenaka traženog broja 12, onda posljednja znamenka ne može biti ni 0 ni 8.
   Brojevi kojima je umnožak znamenaka 12, a zbroj znamenaka manji od 10 i
   1.) posljednja znamenka 6 su 26, 126 i 216, a djeljiv s 8 je 216,
   2.) posljednja znamenka 4 su 34, 134, 314, 1134, 1314 i 3114, a niti jedan od njih nije djeljiv s 8,
   3.) posljednja znamenka 2 su 62, 162, 612, 232, 322, 1232, 1322, 2132, 2312, 3122, 3212, 11232, 11322, 12132, 13122, 12312, ¸13212, 21132, 31122, 21312, 31212, 23112 i 32112, a djeljivi s 8 su 232, 1232, 2312, 11232, 12312, 21312, 23112 i 32112.
   Traženi prirodni brojevi su 216, 232, 1232, 2312, 11232, 12312, 21312, 23112 i 32112.

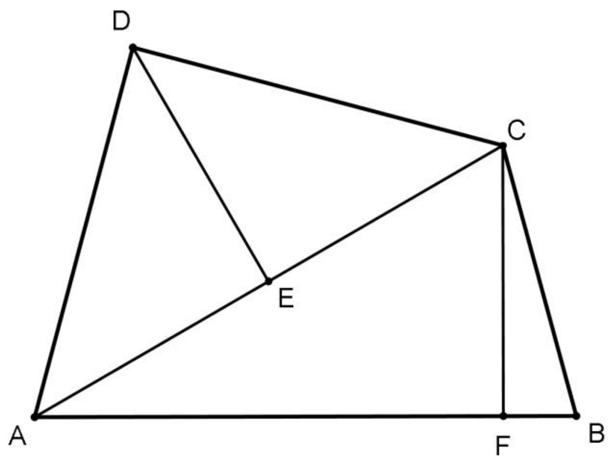
3. Mase početnih legura izrazit ćemo u kilogramima. Neka je masa prve legure m_1, druge m_2 i treće m_3. Tada je prema uvjetima zadatka $m_1 + m_2 + m_3 = 15$.
   Kako je u novonastaloj leguri omjer bakra i cinka 19 : 11, zaključujemo da je količina cinka u toj leguri $\frac{11}{30}$ njene ukupne mase od 15 kg, tj. 5.5 kg.
   Prema uvjetima zadatka zaključujemo da u prvoj leguri ima $\frac{1}{3} \cdot m_1$ kg cinka, u drugoj $\frac{2}{5} \cdot m_2$ kg i u trećoj $\frac{3}{8} \cdot m_3$ kg cinka. Kako znamo da je ukupna masa cinka u novonastaloj leguri 5.5 kg, imamo ovu jednakost $\frac{1}{3} \cdot m_1 + \frac{2}{5} \cdot m_2 + \frac{3}{8} \cdot m_3 = 5.5$.
   Rješavajući se nazivnika slijedi $40m_1+48m_2+45m_3= 660$ odnosno $40m_1+40m_2+8m_2+40m_3+5m_3 = 660$. Dalje je $40(m_1+m_2+m_3)+8m_2+5m_3 = 660$ odnosno $40 \cdot 15 + 8m_2 + 5m_3 = 660$. Dakle, $600+8m_2+5m_3=660$ i na kraju $8m_2 + 5m_3 = 60$.
   Kako je zadano da je $m_2 = 2.5 \cdot m_3$, slijedi $8 \cdot 2.5m_3 + 5m_3 = 60$ pa je $m_3 = 2.4$ kg.
   Dalje je m_2=6 kg i m_1 = 6,6 kg.

4. Neka je točka S polovište hipotenuze $\overline{AB}$ i točka N nožište visine iz vrha C.



Tada je S središte opisane kružnice trokuta ΔABC i vrijedi $|CS| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{c}{2}$.
Iz $\beta : \alpha = 1:5$ i $\alpha + \beta = 90°$ slijedi $\alpha = 75°, \beta = 15°$.
Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi $|\sphericalangle ASC| = 2 \cdot |\sphericalangle ABC| = 30°$.
To znači da je ΔCNS polovica jednakostraničnog trokuta pa je $|CN| = \frac{1}{2}|CS| = \frac{c}{4}$.
Za površinu P tog trokuta vrijedi $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CN| = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{4} = \frac{1}{8}c^2$.

5. Nacrtamo dijagonalu $\overline{AC}$ te neka je točka E nožište okomice iz D na $\overline{AC}$, a točka F nožište okomice iz C na $\overline{AB}$.



Iz $\alpha : \beta : \gamma = 5:5:8$ i $\alpha + \beta + \gamma = 270°$ slijedi $\alpha = \beta = 75°, \gamma = 120°$.
Kako je $|AD| = |DC|$ i $|\sphericalangle ADC| = 90°$, onda je ΔACD jednakokračan pravokutan pa vrijedi $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACD| = 45°$.
Dalje je $|\sphericalangle BCA| = \gamma - |\sphericalangle ACD| = 75°$ pa je i trokut ΔABC jednakokračan.
Dakle, $|AC| = 10$ cm i $|\sphericalangle CAB| = 30°$. To znači da je trokut ΔAFC polovica jednakostraničnog trokuta odnosno $|CF| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = 5$ cm.
S obzirom da je trokut ΔACD jednakokračan pravokutan i $\overline{DE}$ visina na osnovicu $\overline{AC}$, onda je $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = 5$ cm.
Na kraju, $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CF| + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |DE| = 50$ cm^2.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Šibenik, 28.-30. travnja 2010.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

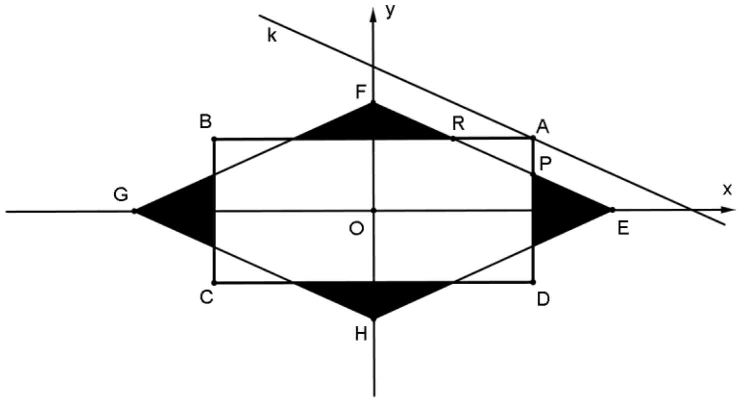
1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n = \sqrt{\frac{a+12}{a-12}}$.
   Tada vrijedi $n = \sqrt{\frac{a+12}{a-12}} = \sqrt{\frac{a-12+24}{a-12}} = \sqrt{1 + \frac{24}{a-12}}$ pa je
   $a - 12 \in \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ odnosno $a \in \{13,14,15,16,18,20,24,36\}$.
   Dalje je $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in \{13,15,20\}$.

2. Neka je *n* broj stranica pravilnog mnogokuta.
   Tada vrijedi $n = \frac{n(n-3)}{2} - 75$. Dalje slijedi $n^2 - 5n - 150 = 0$ odnosno
   $(n-15)(n+10) = 0$. Dakle, *n*=15.
   Veličina vanjskog kuta je $\alpha' = 360° : n = 24°$, a veličina unutarnjeg kuta je
   $\alpha = 180° - \alpha' = 156°$.
   Traženi omjer je $\alpha' : \alpha = 24° : 156° = 2 : 13$.

3. Neka je *x* količina 88-postotne otopine alkohola u posudi. Tada u posudi još nedostaje $(1 - x)$.
   Nakon prvog ulijevanja postotak alkohola u posudi je $0.88 \cdot x + 0.24 \cdot (1 - x)$.
   Nakon miješanja iz posude se izlije $(1 - x)$ količine otopine čija je koncentracija alkohola $0.88 \cdot x + 0.24 \cdot (1 - x)$, a ulije se ponovo 24 – postotna otopina alkohola.
   Nakon drugog ulijevanja postotak alkohola u posudi je
   $0.88 \cdot x + 0.24 \cdot (1 - x) - (0.88 \cdot x + 0.24 \cdot (1 - x)) \cdot (1 - x) + 0.24 \cdot (1 - x)$.
   Nakon svih miješanja posuda je puna, a u njoj je 73-postotna otopina alkohola, tj. vrijedi jednadžba
   $0.88 \cdot x + 0.24 \cdot (1 - x) - (0.88 \cdot x + 0.24 \cdot (1 - x)) \cdot (1 - x) + 0.24 \cdot (1 - x) = 0.73 \cdot 1$.
   Rješenje jednadžbe je $x = 0.875 = \frac{7}{8}$.
   Dakle, prije dolijevanja bilo je ispunjeno $\frac{7}{8}$ posude.

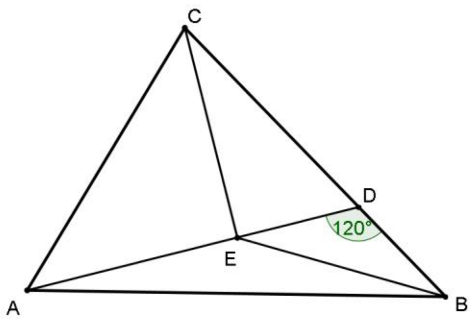
4. Jednadžba pravca EF je $y = -\frac{b}{a}x + \frac{3}{2}b$.
   Kako je $b \neq -\frac{b}{a} \cdot a + \frac{3}{2}b = \frac{1}{2}b$, točka A ne pripada pravcu EF.
   Neka je *k* pravac usporedan s EF koji sadrži točku A. Tada je jednadžba pravca *k*
   $y = -\frac{b}{a}x + 2b$.
   S obzirom da je $2b > \frac{3}{2}b$, točka A ne pripada istoj poluravnini kao ishodište s obzirom na pravac EF.

   Neka su P i R točke presjeka pravca EF s pravcima AD i AB.



Tada je $P\left(a, \frac{1}{2}b\right)$ i $R\left(\frac{1}{2}a, b\right)$.
Lako se uočava da je četverokut EFGH s okomitim dijagonalama, da je četverokut ABCD pravokutnik te trokut ARP pravokutan.
Zato slijedi $P_{EFGH} = \frac{|EG|\cdot|FH|}{2} = \frac{9}{2}ab$, $P_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| = 4ab$ i $P_{ARP} = \frac{|AR|\cdot|AP|}{2} = \frac{ab}{8}$.
Zbog simetričnosti s obzirom i na x-os i na y-os, vrijedi za P traženu površinu
$P = P_{EFGH} - (P_{ABCD} - 4 \cdot P_{ARP}) = ab$.
Površina traženog dijela ravnine je ab.

5. Nacrtamo okomicu iz C na $\overline{AD}$ te neka je E točka presjeka te okomice i dužine $\overline{AD}$.



S obzirom da je $|\sphericalangle CDE| = 180° - |\sphericalangle BDA| = 60°$ i $|\sphericalangle CED| = 90°$, onda je $|\sphericalangle DCE| = 30°$ pa je ΔCED polovica jednakostraničnog trokuta što znači da je $|CD| = 2 \cdot |DE|$.
Kako je $|CD| = 2 \cdot |BD|$, slijedi da je $|DE| = |BD|$.
To znači da je ΔDEB jednakokračan te vrijedi $|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle EBD| = \frac{180° - |\sphericalangle BDE|}{2} = 30°$.
Dalje je $|\sphericalangle BEA| = 180° - |\sphericalangle DEB| = 150°$, $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle EBD| = 15°$ i $|\sphericalangle EAB| = 180° - |\sphericalangle BEA| - |\sphericalangle ABE| = 15°$ što znači da je ΔABE jednakokračan odnosno $|AE| = |BE|$.
Budući da je $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle CED| + |\sphericalangle DEB| = 120°$ i $|\sphericalangle EBD| = 30°$, onda je $|\sphericalangle BCE| = 30°$ pa je ΔBCE jednakokračan odnosno $|BE| = |CE|$.
Dakle, $|AE| = |CE|$ pa je ΔAEC jednakokračan pravokutan.
Na kraju, $|\sphericalangle ABC| = 45°$, $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle ECA| = 75°$ i
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAE| + |\sphericalangle EAB| = 60°$.