# Jedan, dva, puno

Franka Miriam Brückler

Večer matematike, 2020.

0 1 2 3 4 5

## Broj, brojka, znamenka

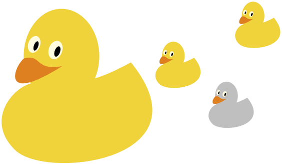
Danas broj stotinu dvadeset i tri obično zapisujemo brojkom

123.

Brojke koje u današnje vrijeme redovno koristimo poznate su i kao indoarapske brojke.
No, čak i danas povremeno koristimo drugačije brojevne sustave — isti broj zapisan rimskom brojkom bio bi CXXIII, a 123 min ćemo vjerojatno izreći kao 2 h 3 min.
Izrazi i simboli za brojeve su vjerojatno stari tek oko 10.000 godina. Zašto smo ih uopće uveli?

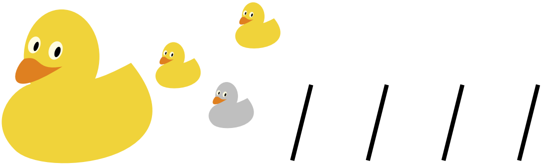
# Počeci brojanja

Postoje razne teorije, jedna od popularnijih je da su postali nužni kad su se ljudi počeli baviti poljoprivredom.



Nije isto uočiti da osoba koja ima dva psa ima jednako domaćih životinja kao osoba koja ima dvije mačke, stvoriti ideju dva objekta, doći do apstraktne ideje broja dva i osmisliti riječ za njega, osmisliti simbol za njega, računati s tim brojem!

# Rovaši



Najranije tragove brojanja možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju. Dva najpoznatija rana rovaša, iz kamenog doba, potječu iz Afrike:

- kost iz Lebomba (stara oko 43.000 godina) i
- kost iz Išanga (stara oko 20.000 godina).

Nešto kasnija pomagala za brojanje bili su i žetoni te u južnoj Americi užad s čvorovima (quipu).

# Jedan, dva, puno

Razna lovačko-sakupljačka plemena uz Amazonu, u Australiji, Tasmaniji, Novoj Gvineji, . . . imaju imena samo za brojeve jedan i dva, ponekad tri, četiri i pet. Sve više je 'puno'. Primjerice, pleme Munduruku:

jedan – *pūg*; dva – *xep xep*; tri — *ebapug*; 'četiri' – *ebadipdip*; 'pet' – *pūg pogbi*

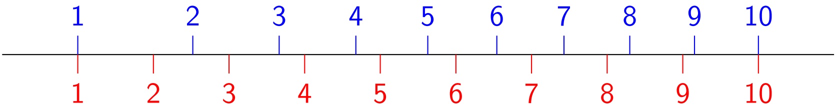
To ipak ne znači da nisu sposobni procjenjivati velike količine, pa čak ih i 'zbrajati'!
U nekim je pak kulturama bilo zabranjeno brojanje, primjerice zabrana prebrojavanja židova. Kako onda znati da je postignut *minjan* ('broj', misli se na minimalno 10 prisutnih na molitvi)? Broji se s molitvom od deset riječi! Matematičar bi rekao: Bijekcija!

# Urođeno ili naučeno?

I u nekih životinja dokazana je sposobnost brojanja. Ne, ne mislimo na trikove kod kojih neki konj naizgled zna računati, a zapravo prima signale od svog trenera. Mislimo na stvarno dokazane sposobnosti brojanja (kardinalnost), a ponekad se uspjelo naučiti i uspoređivanje (ordinalnost).


# Manje i veće

(Prirodni) brojevi su jednoliko razmaknuti, očigledno, zar ne?




Istraživanja provedena s plemenom Munduruku, ali i s vrtićkom djecom: Udaljenosti se smanjuju! Vjerojatno je izvorno razvijeno uspoređivanje veličine po omjerima, a ne po razlikama — korisnije u puno situacija! Čak i naš doživljaj vremena je nerijetko takav, kao i vizualni doživljaj udaljenosti. Milijunaš ili milijarder?!
Aproksimativno razumijevanje veličina brojeva i uspoređivanje po omjeru je čini se urođeno, dok je razumijevanje količina kao egzaktnih brojeva izgleda produkt kulture (i temelj razvoja tehnologije).

- Prof. Brian Butterworth, Univ. Coll. London: Ljudi razumiju točne brojeve elemenata u malim skupovima i zbrajanjem takvih skupova naučili su razumijevati kako se ponašaju veći skupovi.
- Warlpiri i Anindilyakwa (aboridžinska plemena iz Australije) imaju samo riječi za jedan, dva, (tri) i puno, ali u eksperimentu s djecom (udaranje drvenog štapa do sedam puta i usporedba s brojem žetona u zdjelici) pokazalo se da bez problema uočavaju jednakost/različitost brojeva do sedam iako nemaju riječi za to. Dakle, riječi mogu pomoći za razumijevanje apstraktnog pojma, ali nisu nužne.
- Praćeno je i koji neuroni se aktiviraju kod majmuna koji su naučili 'brojati' pa se pokazalo da ako 'misli' četiri aktiviraju se i oni za tri i pet, ali slabije.
- Smisao za egzaktne brojeve je specifično ljudski, vjerojatno potječe od sposobnosti da ih precizno predstavljamo simbolima!

# Brojanje (ne samo) na prste

Prva pomagala za brojanje bili su zasigurno prsti. Znači li to da su naši preci znali brojati samo do (dva)deset? Pleme Tamanaka uz rijeku Orinoco: za brojeve od 1–4 imaju posebne riječi, 5 je 'čitava ruka', 6 je '1 na drugoj ruci', . . . , 10 je 'obje ruke', 11 je '1 na nozi', . . . , 15 je 'čitava noga', 16 je '1 na drugoj nozi', . . . , 20 je 'čitav čovjek', 21 je '1 na ruci drugog čovjeka', . . . , 40 je 'dva čovjeka', . . . : Primjerice, 71 bi bio 'jedan na nozi četvrtog čovjeka'.

- Beda Venerabilis (7./8. st.);
- Luca Pacioli (15./16. st.);
- Jacob Leopold (18. st.);
- Yupno – 34 je 'jedan mrtav čovjek'

# Riječi za brojeve

Brojanje na prste odražava se i u brojevnoj terminologiji mnogih jezika.

- engleski izraz za znamenku *digit* dolazi od latinskog *digitus* (prst);
- u mnogim slavenskim jezicima imamo verzije riječi *pet* u koresponednciji s riječju *pest, pesnica, pešće*;
- pleme Zulu za 'devet' doslovno kaže 'izostavi jedan' (prst);
- neka karipska plemena za 'dvadeset' kažu 'svi sinovi ruku i nogu;

| | hrvatski | kl. grčki | latinski | engleski | njemački | talijanski | francuski | turski | hebrejski |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | jedan | eis | unus | one | eins | uno | un | bir | ehad |
| 2 | dva | duo | duo | two | zwei | due | deux | iki | šnajim |
| 3 | tri | treis | tres | three | drei | tre | trois | üç | šloša |
| 4 | četiri | tettares | quattuor | four | vier | quattro | quatre | dört | arba'a |
| 5 | pet | pente | quinque | five | fünf | cinque | cinq | beş | hamiša |
| 6 | šest | eks | sex | six | sechs | sei | six | altı | šiša |
| 7 | sedam | hepta | septem | seven | sieben | sette | sept | yedi | šiv'a |
| 8 | osam | okto | octo | eight | acht | otto | huit | sekiz | šmona |
| 9 | devet | ennea | novem | nine | neun | nove | neuf | dokuz | tiš'a |
| 10 | deset | deka | decem | ten | zehn | dieci | dix | on | assara |

# Utjecaj jezika na brojanje i računanje

Poznato je da dalekoistočna djeca brže nauče računati s većim brojevima od europske. Je li to samo zbog utjecaja okoline? Hrvatski: dvanaest, ne deset i dva, za razliku od dvadeset i pet. Slično je u engleskom, a još nezgodnije u njemačkom jeziku. Malo pravilniji je turski (*yüz yirmi üç*), još pravilniji velški (*un deg un* je jedanaest – jedan deset jedan). Japanski, korejski, 'kineski' su po tom pitanju izrazito pravilni (dvadeset je dva deset, dvadeset i jedan je dva deset jedan).
Test s velškom djecom u jednom selu, neki su govorili engleski, neki velški: slične računske sposobnosti, ali djeca koja su govorila velški su bila bolja u čitanju, uspoređivanju i manipuliranju dvoznamenkastih brojeva.
Pamćenje brojeva (4853976 *yi er san si uru liu qi ba jiu*) i tablice množenja kuku

# Pojava baza brojevnih sustava

Ako samo brojimo jedan po jedan, kako opisati osamdeset pataka?

- Arara u Amazoniji: (*anane, adak, adak anane, adak adak, adak adak anane, adak adak adak, adak adak adak anane, adak adak adak adak*) – premala baza (no ne znači da je beskorisna: G. w. Leibniz);
- Lincolnshire u srednjem vijeku: Grupiranje po 20, riječi ('znamenke') za jedan do dvadeset. Slično se nalazi i na Grenlandu i Novom Zelandu te kod Maja.

Najčešće baze kroz povijest bile su pet, dvadeset i posebno baza deset, iz očiglednih razloga (Aristotel: rasprostranjenost brojanja do deset nije rezultat izbora, nego prije anatomska slučajnost). Jezičari su ipak u mnogim jezicima otkrili ostatke drugih sustava (*quatre-vingts* za 80, *neuf, neun, ni, nueve* za 9, *trois/trés* za tri/puno).

# Karlo XII. (1682.–1718.)

Izvor: Wikipedija, *public domain*.

Baza deset je za 'primitivne seljake', moderna Skandinavija treba napredniju bazu:

$$64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Argument: Bit će lakše za vojne izračune.
1716. je zadao Emanuelu Swedenborgu da ju razvije, no kralj je poginuo prije nego je Swedenborg predstavio sustav.
Znamenke 0 do 7 postale su o, l, s, n, m, t, f, ŭ (npr. l + l = s),
potencije od 8: lo (lu), loo (lo), looo (li), loooo (le), looooo (la)

# Baza 12

$\boxed{\text{Little Twelvetoes}}$

Dvije dodatne znamenke: dek i el (2 i 3 naglavce).
Još od 17. st. mnogo zagovornika, a nerijetko je rasprava o bazama 10 i 12 bila politički obojena.

$\boxed{\text{duodecimalna tablica množenja}}$

Prednosti te baze? Trećina od 10 (= dvanaest) je sad 3, a ne 3.3333...
Odabir baze 10 nije posljedica matematičkih razloga, već fizioloških!

# Hijeroglifske brojke

| vrijednost | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| hijeroglif | 𓏺 | 𓎆 | 𓍢 | 𓆼 | 𓂭 | 𓆐 | 𓁨 |

Hijeroglif za 1 je crta, tj. urez, za 10 predstavlja potkovu, za 100 je namotano uže, za 1000 lopoč ili lotos, za 10000 je ispruženi prst, za 100000 punoglavac, a za 1000000 je čovjek u klećećem stavu s uzdignutim rukama ili, kako neki egiptolozi predlažu, egipatsko božanstvo svemira *Hh*.
Današnji datum, 3. 12. 2020. zapisan hijeroglifima:

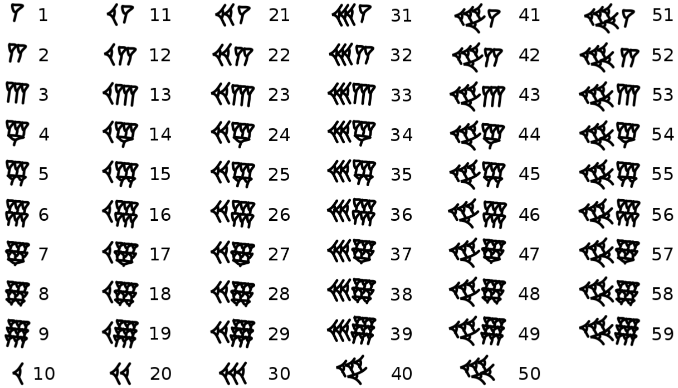
𓏺𓏺𓏺 𓎆𓏺𓏺 𓆼𓆼𓎆𓎆

# Pojava pozicijskih sustava

- općenito, najstariji zapisi brojeva brojkama potječu iz Sumera i Egipta, od prije otprilike 4000 godina, a razvili su se iz 'tally marks';
- Abakus;
- većina starih sustava nisu bili pozicijski, najranija iznimka je Mezopotamija. U doba Babilona, nešto prije 2000. g. pr. Kr. (doba treće dinastije Ur) iz starijih sumersko-babilonskih sustava razvijen je brojevni sustav temeljen na dva simbola (klina, V za 1, $<$ za 10) i primarnoj bazi 60 (sekundarnoj 10). Bio je to prvo pozicijski sustav u povijesti, ali mu je nedostajala znamenka 0. Mislite da to nije bitno? Zamislite da današnji dekadski sustav imamo bez 0:

$$123 = 123, 102030, 1203, \ldots ?!$$

# Babilonski seksagezimalni sustav

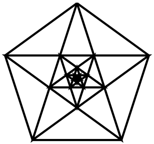



Slika: Autor Josell, izvornik https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Babylonian_numerals.svg, licenca CC BY-SA 4.0

Zapišimo današnji datum u babilonskom brojevnom sustavu. Dan i mjesec je lako: 3 je V V V, 12 je $<$ V V. Preračunajmo 2020 u bazu 60. Za to nam treba dijeljenje sa 60.
$2020 : 60 = 33$ i ostatak 40, odnosno $2020 = 33 \cdot 60 + 40 \cdot 1$ pa je 2020 u babilonskom sustavu $< < <$ V V V $\quad < < < <$.
Idemo sad ipak prema kulturi u kojoj su brojevi postali apstraktni objekti . . .

# Pitagorejci i akrofonske brojke

Prema pitagorejskoj filozofiji sve je broj. Prirodan broj. Razlomci, koje su recimo Egipćani bez problema koristili, za njih su omjeri brojeva. Dakle, svake dvije istovrsne veličine trebale bi biti sumjerljive.



Kako bi Pitagora zapisao današnji datum? $1 = \mathrm{I}$, $10 = \Delta$, $100 = \mathrm{H}$, $1000 = \mathrm{X}$, $10000 = \mathrm{M}$, ali imamo i $5 = \sqcap$, 50, 500, 5000, 50000. Današnji datum bio bi dakle III $\Delta$ I I M M $\Delta$ $\Delta$.

# Rimske brojke

| × | 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | I | V | X | L | C | D | ↀ |
| 1000 | $\overline{\mathrm{I}}$ | $\overline{\mathrm{V}}$ | $\overline{\mathrm{X}}$ | $\overline{\mathrm{L}}$ | $\overline{\mathrm{C}}$ | $\overline{\mathrm{D}}$ | $\overline{ↀ}$ |
| 100000 | $\boxed{\mathrm{I}}$ | $\boxed{\mathrm{V}}$ | $\boxed{\mathrm{X}}$ | $\boxed{\mathrm{L}}$ | $\boxed{\mathrm{C}}$ | $\boxed{\mathrm{D}}$ | $\boxed{ↀ}$ |


Današnji datum zapisan rimskim brojkama je III XII MMXX.

Kako biste pomnožili XVI s LI?

```
I LI
II LLII = CII
IV CCIIII = CCIV
VIII CCCCIVIV = CCCCVIII
XVI CCCCCCCCVIIIVIII = DCCCXVI
```

# Grčke alfabetske brojke

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | β | γ | δ | ε | ϛ | ζ | η | θ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ι | κ | λ | μ | ν | ξ | ο | π | ϟ |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| ρ | σ | τ | υ | φ | χ | ψ | ω | ϡ |
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
| ͵α | ͵β | ͵γ | ͵δ | ͵ε | ͵ϛ | ͵ζ | ͵η | ͵θ |
| 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 | 7000 | 8000 | 9000 |

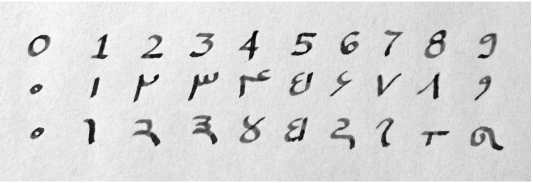


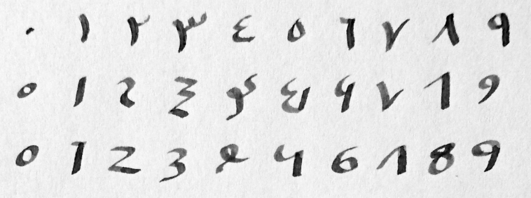
Današnji datum: $\gamma\ \iota\beta\ ,\alpha\kappa$.

# Indija, nekad davno

U Vedama je deset *dasa*, sto je *sata*, a tisuću je *sahastra*. Ako u nekom broju imamo dvije *dasa* i tri *sahastra*, ali nijedan *sata* (ni jedinicu), ne možemo zapisati taj broj kao dva, tri (ili tri, dva).
Potrebna je oznaka za pozicije koje odgovaraju stotici i jedinici i koja kaže da ih u našem broju nema.
Malo pomalo iz riječi kojima se označavala ta 'praznina' (*śūnya*) u broju razvio se i simbol (najkasnije godine 876.).
No, nula kao broj pojavila se nešto ranije, najkasnije u 7. st.
Brahmagupta je tad naime opisao svojstva aritmetike s nulom, primjerice: dug minus *śūnya* je dug, imanje minus *śūnya* je imanje.
Negativni brojevi su se, čini se, ipak prije pojavili u Kini, oko prijelaza era.

# Indijske nagari i istočnoarapske suvremene brojke



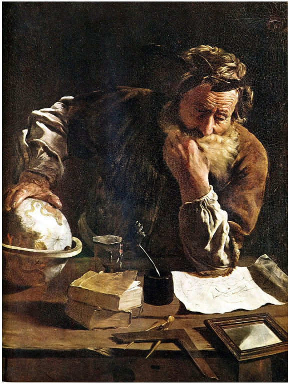



Razvitak modernog brojevnog sustava

# Veliki brojevi

Jedan $1 = 10^0$, deset $10 = 10^1$, sto $100 = 10^2$,
tisuću $1000 = 10^3$, deset tisuća $10.000 = 10^4$, sto tisuća $100.000 = 10^5$,
milijun $1.000.000 = 10^6$,
milijarda $1.000.000.000 = 10^9$,
bilijun $1.000.000.000.000 = 10^{12}$,
bilijarda $10^{15}$, trilijun $10^{18}$, trilijarda $10^{21}$, kvadrilijun $10^{24}$,
kvadrilijarda $10^{27}$, kvintilijun $10^{30}$

# Arhimedov *Pješćanik*



Izvornik: Wikipedia (public domain)

Brojevi do $10000 = 10^4$ (mirijada) u Arhimedovo su doba imali standarne nazive. Brojeve do $10^8$ (mirijada mirijada) zove brojevima prvog reda, a $10^8$ postaje jedinica drugog reda. Mirijada mirijada tih jedinica postaje jedinica treće periode i t.d. Arhimed je na taj način imenovao brojeve do $(10^8)^{(10^8)}$ — to su brojevi prve periode. To postaje jedinica druge periode i tako je Arhimed uspio imenovati sve prirodne brojeve do

$$\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8\cdot 10^{16}}.$$

# Prava vedska matematika

U staroj Indiji imenovanje velikih brojeva bilo je znanstvena i vjerska aktivnost.

Brojevi veći od 1000 se povećavaju po 100. *Lakh* je 1.00.000, a *crore* je 1.00.00.000. Izvorne riječi na sanskrtu bile su *laksh* i *koti*.

Lalitavistara Sutra: 100 *koti* = *ayuta*, 100 *ayuta* = *niyuta*, i t.d. do *tallaksana* ($10^{53}$). Zatim nastavlja do $10^{421}$, *uttaraparamanurajahpravesa*.

Legenda o šahovskoj ploči: $18.446.744.073.709.551.615 = 2^{64} - 1$

# Ima i novije

10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
000.000.000.000.000.000.000.000.000

$$\textit{googol} = 10^{100}.$$

To je više nego broj kapi kiše koji tijekom stoljeća padne u Hrvatskoj! Štoviše, to je više od procjene broja čestica u čitavom svemiru (između $10^{78}$ i $10^{82}$).qpause

A ako bismo imali 1 i nakon njega *googol* nula, tj. $10^{\textit{googol}} = 10^{10^{100}}$ — e, to je *googolplex*! Ima i *googolduplex*: $10^{10^{10^{100}}}$, ... https://sites.google.com/site/largenumbers/home/3-2/1

# A razlomci i ostali brojevi?

- Egipćani, dijelom i Grci: zbroj jediničnih razlomaka;
- Fibonacci, 13. st.: razlomačka crta;
- Al-Kaši (14./15. st.), Simon Stevin (16./17. st.): decimalni razlomci;
- Girolamo Cardano, Rafael Bombelli (16. st.): kompleksni brojevi
- W. R. Hamilton (19. st.): kvaternioni
- G. Cantor, R. Dedekind, D. Hilbert (19. st.): konačna definicija realnih brojeva

# Beskonačni brojevi

- postoji li beskonačno veliko i beskonačno malo?
- Zenon iz Eleje (5. st. pr. Kr.), Eudoks iz Knida (4. st. pr. Kr.), Aristotel (4. st. pr. Kr.);
- Toma Akvinski (13. st.), Thomas Bradwardine (14. st.);
- Galileo Galilei (16./17. st.)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \ldots \end{array}$$

- J. Wallis, 17. st.: $\infty$
- Georg Cantor, kraj 19. st.

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$$

# Hvala na pažnji!