DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

Zadatak A-1.1.

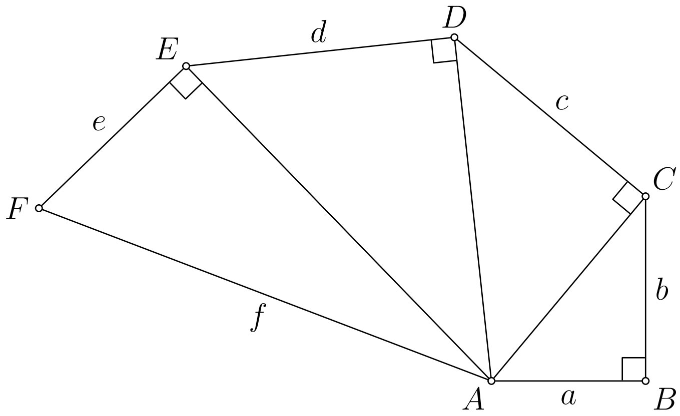
U šesterokutu $ABCDEF$ vrijedi

$$AB \perp BC, \qquad AC \perp CD, \qquad AD \perp DE, \qquad AE \perp EF.$$

Ako su duljine stranica tog šesterokuta prirodni brojevi, dokaži da ne mogu svi biti neparni.

Rješenje.

Označimo duljine stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$ redom s a, b, c, d, e, f.



Iz pravokutnih trokuta ABC, ACD, ADE i AEF dobivamo

$$a^2 + b^2 = |AC|^2, \quad |AC|^2 + c^2 = |AD|^2, \quad |AD|^2 + d^2 = |AE|^2, \quad |AE|^2 + e^2 = f^2$$

pa vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = f^2. \tag{$*$}$$

Pretpostavimo da su a, b, c, d, e, f neparni prirodni brojevi.

Dokažimo najprije pomoćnu tvrdnju:

Kvadrat neparnog prirodnog broja pri dijeljenju s 8 *daje ostatak* 1.

Neka je x neparan broj, $x = 2n - 1$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je $x^2 = 4n(n-1) + 1$.

Kako je $n(n-1)$ umnožak dva uzastopna prirodna broja, mora biti paran. Zato je x^2 oblika $8y + 1$, $y \in \mathbb{N}$.

Na lijevoj strani jednakosti $(*)$ nalazi se suma pet kvadrata neparnih brojeva koja pri dijeljenju s 8 daje ostatak 5. Na desnoj strani je f^2 koji pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1.

Dobili smo kontradikciju, pa pretpostavka da su brojevi a, b, c, d, e, f svi neparni nije istinita.

Zadatak A-1.2.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1-a^2+c^2}{c\,(a+2b)}+\frac{1-b^2+a^2}{a\,(b+2c)}+\frac{1-c^2+b^2}{b\,(c+2a)}\geqslant 6.$$

Prvo rješenje.

Koristeći uvjet $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$, dobivamo da je tvrdnja zadatka ekvivalentna tvrdnji

$$\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ac+2bc}+\frac{b^2+2c^2+3a^2}{ba+2ca}+\frac{c^2+2a^2+3b^2}{cb+2ab}\geqslant 6.$$

Vrijedi $a^2+2b^2+3c^2=(a^2+c^2)+2(b^2+c^2)\geqslant 2ac+4bc=2(ac+2bc)$, odnosno

$$\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ac+2bc}\geqslant 2.$$

Analogno dobijemo

$$\frac{b^2+2c^2+3a^2}{ba+2ca}\geqslant 2,\qquad \frac{c^2+2a^2+3b^2}{cb+2ab}\geqslant 2,$$

a zbrajanjem dobivamo

$$\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ac+2bc}+\frac{b^2+2c^2+3a^2}{ba+2ca}+\frac{c^2+2a^2+3b^2}{cb+2ab}\geqslant 6.$$

Drugo rješenje.

Korištenjem uvjeta $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$ u brojnicima na lijevoj strani dobijemo:

$$L=\frac{a^2+2b^2+3c^2}{c(a+2b)}+\frac{b^2+2c^2+3a^2}{a(b+2c)}+\frac{c^2+2a^2+3b^2}{b(c+2a)}$$

Primjenom A–K nejednakosti i nakon toga A–G nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}\frac{a^2+2b^2+3c^2}{c(a+2b)}&=\frac{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+c^2}{c(a+2b)}\geqslant\frac{(a+2b+3c)^2}{6c(a+2b)}\\&\geqslant\frac{\left(2\sqrt{(a+2b)\cdot 3c}\right)^2}{6c(a+2b)}=\frac{4\cdot(a+2b)\cdot 3c}{6c(a+2b)}=2.\end{aligned}$$

Analogno se pokazuje da su i ostala dva pribrojnika na lijevoj strani veća ili jednaka 2, pa je $L\geqslant 6$.

Treće rješenje.

Zamjenom $1 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ u brojnicima na lijevoj strani dobijemo:

$$\begin{aligned} L &= \frac{a^2+2b^2+3c^2}{c(a+2b)} + \frac{3a^2+b^2+2c^2}{a(b+2c)} + \frac{2a^2+3b^2+c^2}{b(c+2a)} \\ &= \left(\frac{a^2+2b^2}{c(a+2b)} + \frac{3c}{a+2b}\right) + \left(\frac{b^2+2c^2}{a(b+2c)} + \frac{3a}{b+2c}\right) + \left(\frac{c^2+2a^2}{b(c+2a)} + \frac{3b}{c+2a}\right). \end{aligned}$$

Ocijenimo izraz $\dfrac{a^2+2b^2}{c(a+2b)}$. Prema A–K nejednakosti imamo:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+b^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+b}{3},$$

$$\frac{a^2+2b^2}{3} \geqslant \left(\frac{a+2b}{3}\right)^2, \qquad \frac{a^2+2b^2}{a+2b} \geqslant \frac{a+2b}{3}.$$

Iz toga slijedi

$$\frac{a^2+2b^2}{c(a+2b)} \geqslant \frac{a+2b}{3c}$$

i analogno

$$\frac{b^2+2c^2}{a(b+2c)} \geqslant \frac{b+2c}{3a} \quad \text{i} \quad \frac{c^2+2a^2}{b(c+2a)} \geqslant \frac{c+2a}{3b}.$$

Sada je

$$L \geqslant \left(\frac{a+2b}{3c} + \frac{3c}{a+2b}\right) + \left(\frac{b+2c}{3a} + \frac{3a}{b+2c}\right) + \left(\frac{c+2a}{3b} + \frac{3b}{c+2a}\right).$$

Svaki od izraza u zagradama je veći ili jednak 2 zbog nejednakosti $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ pa je $L \geqslant 6$.

Zadatak A-1.3.

Na n kartica napisane su rečenice:

"*Barem k rečenica lijevo od ove kartice je lažno.*"

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Kartice su složene u nekom redoslijedu slijeva nadesno. Koliko najviše rečenica može biti istinito?

Rješenje.

Pokazat ćemo da najviše $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ rečenica može biti istinito, tj. za paran broj $n = 2m$ najviše $m = \frac{1}{2}n$, a za neparan $n = 2m - 1$ najviše $m = \frac{n+1}{2}$.

Kartica na kojoj piše "Barem k rečenica lijevo od ove kartice je lažno" nazivamo "kartica k". Također, reći ćemo "kartica k je lažna (istinita)" umjesto "rečenica na kartici k je lažna (istinita)".

Ako kartice poredamo redom: 0, $n-1$, 1, $n-2$, $2, \ldots$ onda su rečenice na prvoj, trećoj, petoj,... po redu istinite, a na ostalim karticama lažne. U tom rasporedu točno je $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ istinitih kartica.

Dokažimo sada da ne može više od $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ kartica biti istinito.

Neka je $n = 2m$ ili $n = 2m - 1$.

Ako je kartica k za neki $k \geqslant m$ istinita, onda ima barem k lažnih kartica (već i među onima lijevo od nje). To znači da ima najmanje m lažnih, odnosno najviše $n - m \leqslant m$ istinitih kartica.

U suprotnom, sve su kartice za $k > m$ lažne, pa ima najviše m istinitih kartica.

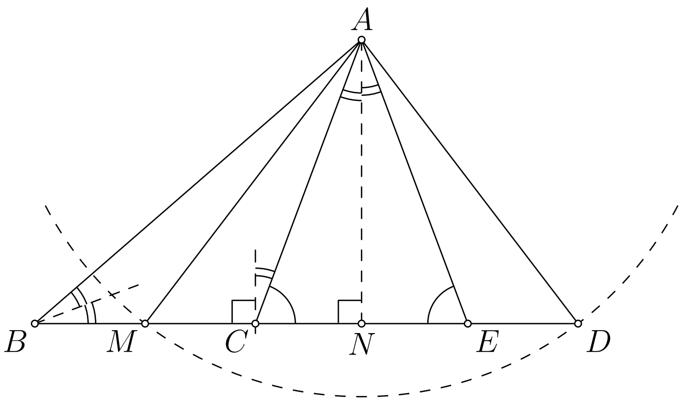
Zadatak A-1.4.

U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ACB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$, a M je polovište dužine $\overline{BC}$. Kružnica sa središtem u točki A siječe pravac BC u točkama M i D.

Dokaži da je $|MD| = |AB|$.

Rješenje.

Neka je N nožište okomice iz točke A na pravac BC. Tada je $|MD| = 2|MN|$.



Neka je E točka na pravcu BC takva da je ACE jednakokračan trokut s osnovicom CE. Nožište visine tog trokuta iz vrha A je također točka N.

Zato je $|MN| = |MC| + |CN| = \dfrac{1}{2}|BC| + \dfrac{1}{2}|CE| = \dfrac{1}{2}|BE|$.

Označimo $\sphericalangle ABC = 2\delta$.

Tada je redom:

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle BCA = 90^\circ + \delta \quad \text{(iz uvjeta zadatka)},\\
&\sphericalangle ECA = 90^\circ - \delta \quad \text{(suplement kuta } \sphericalangle BCA\text{)},\\
&\sphericalangle BEA = \sphericalangle CEA = 90^\circ - \delta \quad \text{(jer je } ACE \text{ jednakokračan trokut)},
\end{aligned}$$

pa je

$$\sphericalangle EAB = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BEA = 180^\circ - 2\delta - (90^\circ - \delta) = 90^\circ - \delta = \sphericalangle BEA.$$

Odatle zaključujemo da je trokut BEA jednakokračan i vrijedi $|BE| = |AB|$.

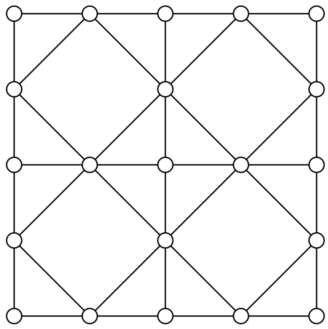
Konačno, $|MD| = 2|MN| = |BE| = |AB|$.

Zadatak A-1.5.

Dana je dvadeset i jedna točka kao na slici.
Na početku je svakoj točki pridružen broj nula.

U svakom potezu odabire se pravac koji sadrži neku od nacrtanih dužina i u svim točkama kroz koje taj pravac prolazi, pridruženi brojevi se povećavaju za 1.

Kažemo da je prirodni broj n *dohvatljiv* ako se na opisani način može postići da je nakon određenog broja poteza svim točkama pridružen isti broj n.

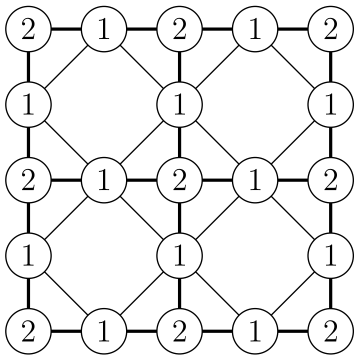


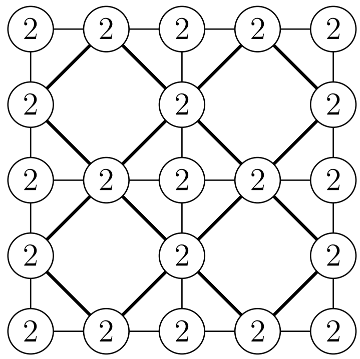
a) Dokaži da je broj 2010 dohvatljiv.
b) Dokaži da broj 2011 nije dohvatljiv.

Rješenje.

a) Pokazat ćemo da su svi parni brojevi, pa tako i broj 2010, dohvatljivi.

Najprije uvećajmo za 1 brojeve u sva tri retka i u sva tri stupca kao na lijevoj slici.



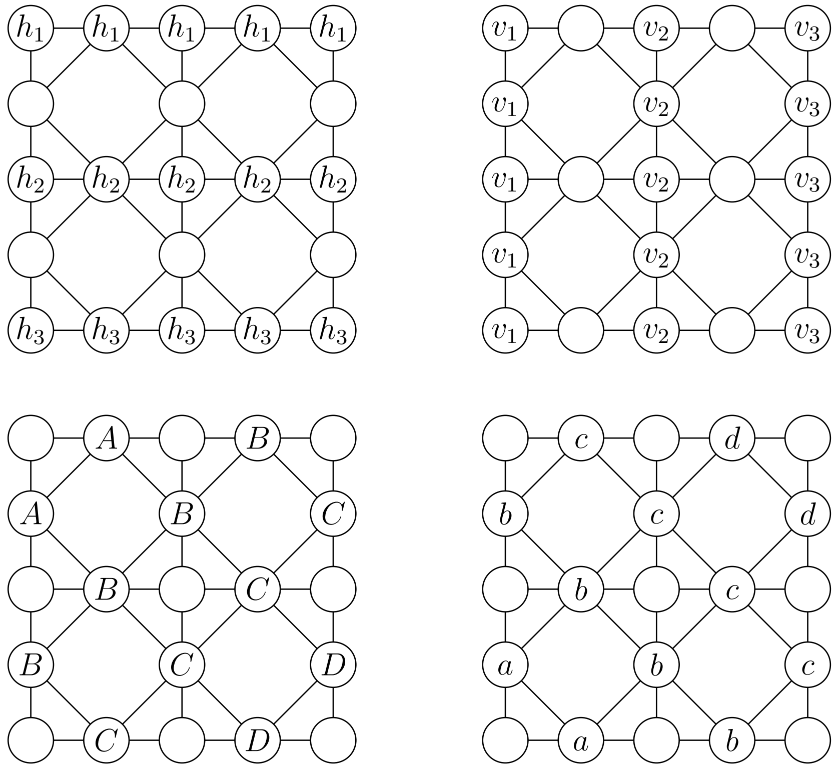


Zatim uvećajmo brojeve u svim točkama koje leže na pravcima koji su paralelni jednoj od dijagonala velikog kvadrata za 1. Rezultat je prikazan na desnoj slici.

Time smo dobili broj 2 u svim točkama, pa je ponavljanjem tog postupka moguće u svim točkama dobiti broj 2010, odnosno bilo koji parni broj.

b) Pokažimo sada da nijedan neparni broj, pa tako niti broj 2011, nije dohvatljiv.

Označimo s h_1, h_2, h_3 broj uvećanja po odgovarajućim retcima (*horizontalni* potezi), s v_1, v_2, v_3 broj uvećanja po odgovarajućim stupcima (*vertikalni* potezi), te s A, B, C, D, a, b, c, d broj uvećanja po odgovarajućim dijagonalama (*dijagonalni* potezi), kao na sljedećim slikama.



Promotrimo sada točke označene zvjezdicama na lijevoj donjoj slici.

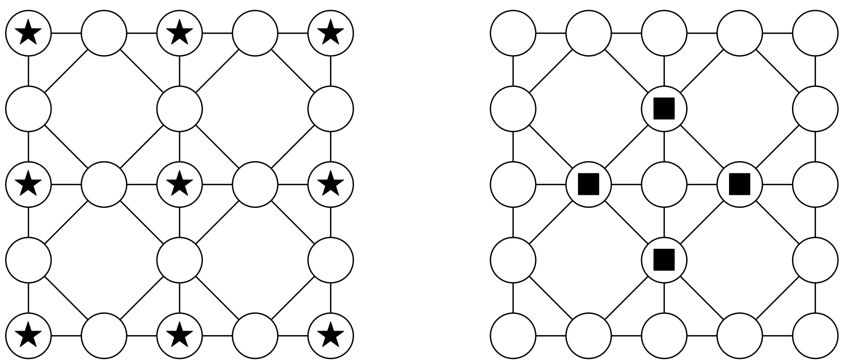
Kako dijagonalni potezi ne prolaze tim točkama, vrijedi

$$h_1 + v_1 = h_1 + v_2 = h_1 + v_3 = h_2 + v_1 = \ldots = h_3 + v_3 = n,$$

odakle dobivamo da je $h_1 = h_2 = h_3$ i $v_1 = v_2 = v_3$.

Dakle, svih triju horizontalnih poteza ima jednako. Isto vrijedi i za sva tri vertikalna poteza.

Označimo li $h = h_1 = h_2 = h_3$ i $v = v_1 = v_2 = v_3$, mora vrijediti $h + v = n$.



Promatrajmo sada ukupan broj uvećanja u točkama označenim kvadratićima na desnoj slici.

Mora vrijediti

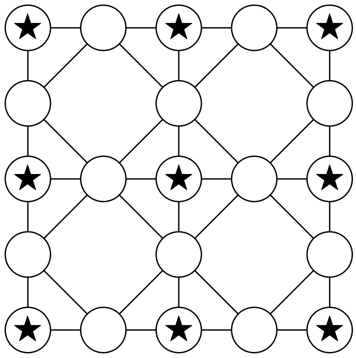
$$v + B + c = h + B + b = v + C + b = h + C + c = n.$$

Odavde je $B + c = C + b$ i $B + b = C + c$, odakle dobivamo $b = c$ i $B = C$. Zbog toga je $v + B + b = h + B + b$, odakle je $v = h$.

Stoga dobivamo da je $n = v + h = 2h$ paran broj, a to je kontradikcija jer je n neparan broj. Zaključujemo da nijedan neparni broj nije dohvatljiv.

Drugi način.

Kontradikciju u b) dijelu zadatka možemo dobiti na još jedan način. Promotrimo još jednom točke označene zvjezdicama.



Označimo sa S zbroj svih brojeva pridruženim tim točkama. Na početku je $S = 0$, a u svakom se koraku S mijenja. Svakoj točki bi na kraju trebao biti pridružen isti neparni broj, a kako je ukupni broj promatranih polja neparan, S također mora biti neparan.

Broj pridružen uočenim poljima broj može se povećati isključivo povećanjem brojeva za 1 u cijelom retku ili cijelom stupcu tj. horizontalnim ili vertikalnim potezom. Nadalje, svakim horizontalnim i vertikalnim potezom mijenja se parnost broja S.

S obzirom da S na kraju mora biti neparan, broj horizontalnih i vertikalnih poteza mora biti neparan.

No, kao u prvom rješenju zaključujemo da horizontalnih i vertikalnih poteza mora biti jednako pa je njihov zbroj paran, a to je kontradikcija.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

Zadatak A-2.1.

Dokaži da svaki kompleksni broj z za koji postoji točno jedan kompleksni broj a takav da je

$$z^3 + (2-a)\,z^2 + (1-3a)\,z + a^2 - a = 0$$

zadovoljava jednakost $z^3 = 1$.

Prvo rješenje.

Dana jednadžba se može transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
z^3 + (2-a)\,z^2 + (1-3a)\,z + a^2 - a &= 0,\\
z^3 + 2z^2 - az^2 + z - 3az + a^2 - a &= 0,\\
z^3 + z^2 + z^2 - az^2 + z - 2az - az + a^2 - a &= 0,\\
(z-a)^2 + (z-a) + z^2(z+1) - az(z+1) &= 0,\\
(z-a)(z-a+1) + z(z+1)(z-a) &= 0,\\
(z-a)(z^2+2z+1-a) &= 0.
\end{aligned}$$

Ako promatrani izraz gledamo kao jednadžbu po a, iz faktorizacije vidimo da su rješenja $a_1 = z$ i $a_2 = z^2 + 2z + 1$. Iz uvjeta zadatka ta dva rješenja trebaju biti jednaka pa zaključujemo $z^2 + z + 1 = 0$, odakle množenjem sa $z - 1$ dobijemo $z^3 = 1$.

Drugo rješenje.

Neka je z kompleksni broj takav da za neki a vrijedi $z^3+(2-a)\,z^2+(1-3a)\,z+a^2-a = 0$. Tada je

$$a^2 - a\left(z^2 + 3z + 1\right) + \left(z^3 + 2z^2 + z\right) = 0.$$

Ako postoji točno jedan kompleksni broj a za koji vrijedi gornja jednakost, onda je diskriminanta te kvadratne jednadžbe (po varijabli a) jednaka nuli, tj.

$$\left(z^2 + 3z + 1\right)^2 - 4\left(z^3 + 2z^2 + z\right) = 0.$$

Sređivanjem se dobije $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$, tj. $\left(z^2 + z + 1\right)^2 = 0$. Odatle je $z^2 + z + 1 = 0$, odakle, kao i u prvom rješenju, množenjem sa $z - 1$ zaključujemo da je $z^3 = 1$.

Zadatak A-2.2.

Odredi sva realna rješenja sustava

$$\begin{aligned}\left(1+4x^2\right)y&=4z^2,\\ \left(1+4y^2\right)z&=4x^2,\\ \left(1+4z^2\right)x&=4y^2.\end{aligned}$$

Rješenje.

Ako je neki od x, y, z jednak nuli, onda su i ostali, i to je jedno rješenje.

U suprotnom mora biti $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Množenjem danih jednakosti dobivamo

$$xyz\left(1+4x^2\right)\left(1+4y^2\right)\left(1+4z^2\right)=64x^2y^2z^2,$$

odnosno, zbog $xyz\neq 0$,

$$\left(1+4x^2\right)\left(1+4y^2\right)\left(1+4z^2\right)=64xyz.$$

Kako za pozitivne x, y, z vrijedi $1+4x^2\leqslant 4x$, $1+4y^2\leqslant 4y$, $1+4z^2\leqslant 4z$ slijedi

$$\left(1+4x^2\right)\left(1+4y^2\right)\left(1+4z^2\right)\leqslant 64xyz,$$

pri čemu je jednakost ispunjena samo za $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Dakle, jedina rješenja danog sustava su $(x,\,y,\,z)=(0,\,0,\,0)$ i $(x,\,y,\,z)=\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$.

Drugo rješenje.

Kako su izrazi u zagradama i na desnim stranama svih jednakosti nenegativni, mora biti $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Vrijedi $1+4x^2\geqslant 4x$, pa je

$$4z^2=\left(1+4x^2\right)y\geqslant 4xy,$$

dakle $z^2\geqslant xy$.

Na sličan način se dobije $x^2\geqslant yz$ i $y^2\geqslant zx$.

Množenjem tih nejednakosti dobijamo $x^2y^2z^2\geqslant x^2y^2z^2$, a kako tu vrijedi jednakost, zaključujemo da i u svakoj od prethodnih nejednakosti vrijedi jednakost.

Znači, $xy=z^2$, $yz=x^2$, $zx=y^2$.

Ako je jedan od brojeva jednak nuli, onda su i ostali.

U suprotnom, dijeljenjem prve dvije jednakosti dobijamo $\dfrac{x}{z}=\dfrac{z^2}{x^2}$, odnosno $z=x$. Analogno je $x=y$.

Kako je $x=y=z$, vrijedi $(1+4x^2)\,x=4x^2$.

Zbog $x\neq 0$ vrijedi $4x^2-4x+1=0$. Rješenje ove jednadžbe je $x=\dfrac{1}{2}$.

Jedina rješenja danog sustava su $(0,\,0,\,0)$ i $\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)$.

Zadatak A-2.3.

a) Dokaži da za međusobno različite prirodne brojeve a i b postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da su brojevi $a+n$ i $b+n$ relativno prosti.

b) Postoje li međusobno različiti prirodni brojevi a, b, c i d za koje ne postoji prirodni broj n takav da su brojevi $a+n$, $b+n$, $c+n$, $d+n$ u parovima relativno prosti?

Rješenje.

a) Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $a<b$.

Tada je za dovoljno velike $k \in \mathbb{N}$ broj $n=(b-a)\,k+1-a$ prirodan. Pokazat ćemo da svi takvi brojevi zadovoljavaju uvjet.

Tada je $a+n=(b-a)\,k+1$, $b+n=(b-a)\,(k+1)+1$.

Ako $d \mid a+n$ i $d \mid b+n$, onda $d \mid b-a$ pa zbog $a+n=(b-a)\,k+1$ dobivamo $d \mid 1$ i konačno $d=1$.

Zaključujemo da je $M(a+n,\, b+n)=1$.

b) Možemo uzeti da je $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$.

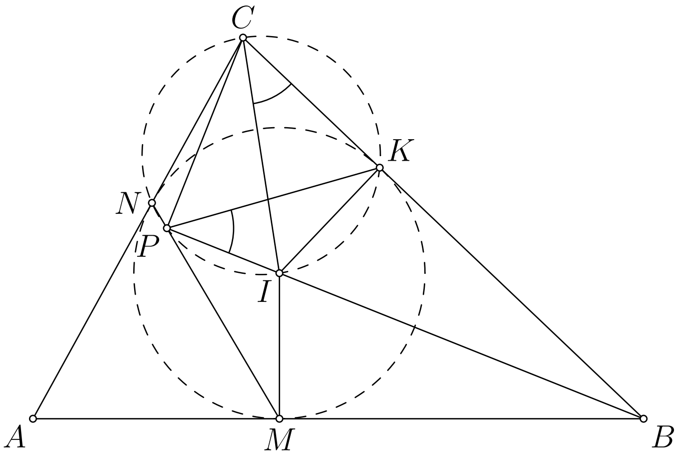
Tada su među brojevima $n+1$, $n+2$, $n+3$ i $n+4$ dva parna broja, stoga nisu svi ti brojevi u parovima relativno prosti.

Zadatak A-2.4.

Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

Rješenje.

Neka je točka I središte upisane kružnice trokuta ABC te neka su α, β i γ veličine unutarnjih kutova trokuta pri vrhovima A, B i C redom. Nadalje, neka je točka K preostalo dirališe upisane kružnice i trokuta ABC, tj. točka u kojoj upisana kružnica dodiruje stranicu $\overline{BC}$.



Uočimo da su trokuti MBP i KBP sukladni prema poučku SKS. Naime, ti trokuti imaju zajedničku stranicu $\overline{BP}$, $|BM| = |BK|$ jer su to tangentne dužine, a $\sphericalangle MBP = \sphericalangle KBP = \dfrac{\beta}{2}$ jer točka P leži na simetrali $\sphericalangle ABC$. Zbog te sukladnosti je

$$\sphericalangle KPI = \sphericalangle KPB = \sphericalangle MPB = \sphericalangle AMN - \sphericalangle MBP,$$

pri čemu posljednja jednakost vrijedi jer je $\sphericalangle AMN$ vanjski kut trokuta MBP.

Kako je $|AM| = |AN|$, iz jednakokračnog trokuta AMN imamo $\sphericalangle AMN = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Stoga je

$$\sphericalangle KPI = \sphericalangle AMN - \sphericalangle MBP = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

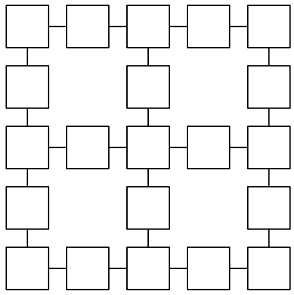
S druge strane, kako je točka I sjecište simetrala kutova trokuta ABC, slijedi $\sphericalangle KCI = \dfrac{\gamma}{2}$, odnosno $\sphericalangle KPI = \sphericalangle KCI$. Dakle, dužina $\overline{IK}$ se iz točaka P i C vidi pod istim kutom pa točke I, K, C, P leže na istoj kružnici, tj. četverokut $IKCP$ je tetivan. Zbog tetivnosti tog četverokuta te činjenice da je $IK \perp BC$ vrijedi

$$\sphericalangle CPB = \sphericalangle CPI = 180^\circ - \sphericalangle IKC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

odnosno $BP \perp CP$, što je i trebalo dokazati.

Napomena. Sva razmatranja vrijede neovisno o tome sijeku li se pravci MN i BI unutar ili izvan trokuta ABC.

Zadatak A-2.5.



Na početku je u svaki od kvadrata raspoređenih kao na slici upisana nula.

U svakom potezu odabire se jedan od kvadrata te se istovremeno brojevi koji se nalaze u tom kvadratu i u svim njemu susjednim kvadratima uvećavaju za jedan.

Dokaži da je nakon određenog broja poteza:

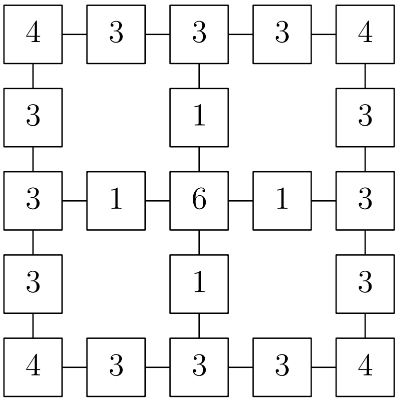
a) moguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2010;

b) nemoguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2011.

Prvo rješenje.

a) Uočimo da na donjoj slici za svaki kvadrat vrijedi da je zbroj brojeva upisanih u taj kvadrat i sve njemu susjedne kvadrate jednak 10. Prema tome, ukoliko svaki od kvadrata odaberemo onoliko puta koliko je napisano na slici, u svakom kvadratu će pisati broj 10. (Donja slika ne predstavlja brojeve koji pišu u kvadratima nakon nekog poteza nego broj odabira pojedinog kvadrata!)

Ponovimo li opisani postupak 201 put, u svakom kvadratu će pisati broj $201 \cdot 10 = 2010$.

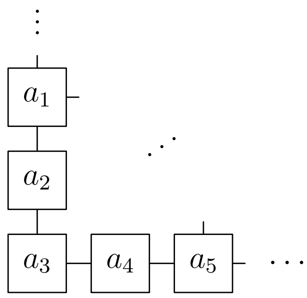


b) Za dani raspored brojeva u kvadratima pomnožimo svaki od brojeva brojem koji u odgovarajućem kvadratu piše na gornjoj slici. Neka je N zbroj svih tako dobivenih umnožaka. U početnoj konfiguraciji, kada u svakom kvadratu piše nula, vrijedi $N = 0$.

Pogledajmo što se događa s brojem N u jednom koraku. Odabirom nekog kvadrata i uvećavanjem broja u tom kvadratu i svim njemu susjednim kvadratima za 1, broj N se povećava za zbroj brojeva napisanih u odgovarajućim kvadratima na gornjoj slici. Međutim, taj zbroj je za svaki kvadrat jednak 10, tako da se broj N u svakom koraku povećava za 10 pa je N nakon svakog poteza djeljiv s 10. Kada bismo postigli da u svakom kvadratu piše broj 2011 tada bi broj N iznosio $2011 \cdot 62$ (62 je zbroj brojeva u svim kvadratima na slici). Međutim, to očito nije moguće jer broj $2011 \cdot 62$ nije djeljiv s 10. Zaključujemo da nije moguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2011.

Drugo rješenje.

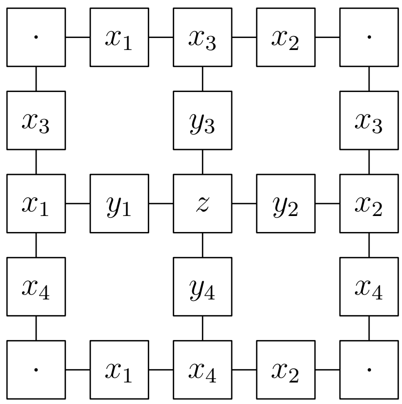
Pretpostavimo da se može postići da nakon određenog broja poteza u svakom kvadratu piše prirodan broj n. Za početak, promatrajmo jedan od kutova gdje je u svaki kvadrat upisan odgovarajući broj odabira.



S obzirom na kvadrat u kutu i njegova dva susjedna kvadrata, vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= n, \\ a_2 + a_3 + a_4 &= n, \\ a_3 + a_4 + a_5 &= n, \end{aligned}$$

odakle je $a_1 = a_4$ i $a_2 = a_5$. Analogno vrijedi i za ostale kutove, odakle dobivamo sljedeću konfiguraciju.



Promatrajući središnje kvadrate na rubovima ploče, vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 + y_1 &= n, \\ x_2 + x_3 + x_4 + y_2 &= n, \\ x_3 + x_1 + x_2 + y_3 &= n, \\ x_4 + x_1 + x_2 + y_4 &= n, \end{aligned}$$

a zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$3\sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} y_i = 4n. \qquad (*)$$

Promatrajući središnji kvadrat dobivamo

$$z + \sum_{i=1}^{4} y_i = n, \tag{$**$}$$

Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi $3\sum_{i=1}^{4} x_i = 3n + z$, a odatle $3 \mid z$.

Prilikom odigravanja poteza nad nekim kvadratom, zbroj brojeva u svim kvadratima se povećava:

za 3 ako je kvadrat u kutu ploče,
za 5 ako je to središnji kvadrat,
za 4 ako je riječ o središnjem kvadratu ruba ploče,
za 3 za sve ostale kvadrate.

Iz ovoga slijedi da je ukupan zbroj doprinosa svih kvadrata jednak

$$3\left(4n - 2\sum_{i=1}^{4} x_i\right) + 5z + 4\sum_{i=1}^{4} x_i + 3\left(2\sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} y_i\right) = 21n,$$

(21 je ukupan broj kvadrata na slici, $4n - 2\sum_{i=1}^{4} x_i$ je broj odabira kvadrata u kutovima) odnosno

$$4\sum_{i=1}^{4} x_i + 3\sum_{i=1}^{4} y_i + 5z = 9n. \tag{$***$}$$

Kako iz $(*)$ i $(**)$ imamo

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = n + \frac{z}{3},$$
$$\sum_{i=1}^{4} y_i = n - z,$$

uvrštavanjem u $(***)$ dobivamo

$$4n + \frac{4}{3}z + 3n - 3z + 5z = 9n,$$
$$5z = 3n.$$

Odatle slijedi $5 \mid n$, čime smo dokazali da se ne može postići da nakon određenog broja poteza u svakom kvadratu piše broj 2011.

Preostaje nam dokazati da je $5 \mid n$ i dovoljan uvjet. Stavimo li $z = 3k$, tj. $n = 5k$, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 6k,$$
$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 2k,$$

iz čega je lako konstruirati ispunjavanje na slici.

k	$2k$	$2k$	k	$2k$
$2k$		0		$2k$
$2k$	0	$3k$	k	k
k		k		k
$2k$	$2k$	k	k	$3k$

Napomena. Za $10 \mid n$, odnosno $n = 10k$ postoji i potpuno simetrično rješenje prikazano na sljedećoj slici.

$4k$	$3k$	$3k$	$3k$	$4k$
$3k$		k		$3k$
$3k$	k	$6k$	k	$3k$
$3k$		k		$3k$
$4k$	$3k$	$3k$	$3k$	$4k$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

Zadatak A-3.1.

Neka je točka S središte opisane kružnice trokuta ABC s kutovima $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle CBA$. Neka pravac CS siječe pravac AB u točki D koja se nalazi između točaka A i B. Dokaži da vrijedi

$$\frac{|SD|}{|SC|} = \left|\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\right|.$$

Rješenje.

Kako je $|SC| = |SA|$, vrijedi $|SD| : |SC| = |SD| : |SA|$, a to možemo izraziti preko kutova primjenom poučka o sinusima u trokutu ADS:

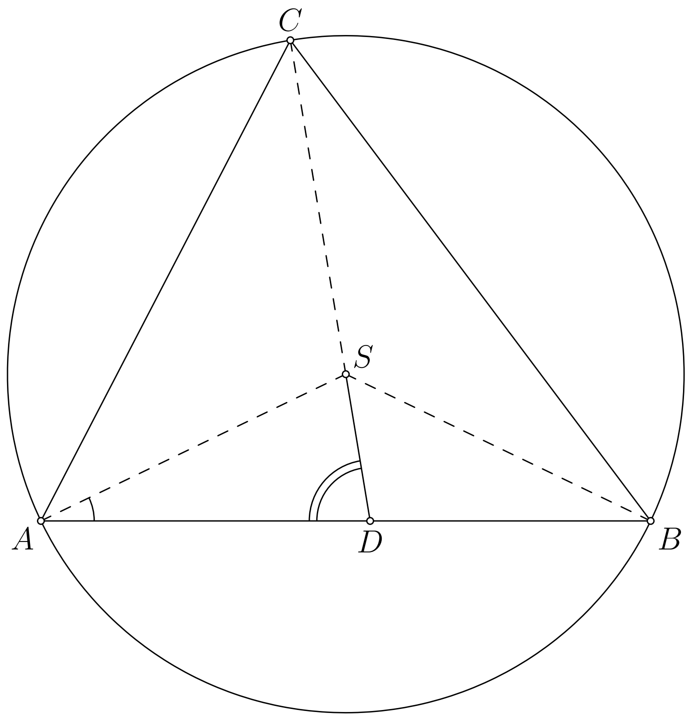
$$|SD| : |SA| = \sin(\sphericalangle DAS) : \sin(\sphericalangle ADS).$$

Označimo kutove trokuta ABC na uobičajen način s α, β i γ.

Ako α ili β nije šiljasti kut, točka D se ne nalazi između točaka A i B.

Razlikujemo tri slučaja:

1. slučaj: Trokut ABC šiljastokutan.



Kako je $\sphericalangle ASB = 2\gamma$, a trokut ABS jednakokračan, vrijedi $\sphericalangle DAS = \sphericalangle BAS = 90° - \gamma$.

Kut $\sphericalangle ADS = \sphericalangle ADC$ vanjski je kut trokuta BCD pa je

$$\sphericalangle ADS = \sphericalangle ADC = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD = \beta + (90^\circ - \alpha)\,.$$

Zato je

$$\sin(\sphericalangle DAS) : \sin(\sphericalangle ADS) = \sin(90^\circ - \gamma) : \sin(\beta + (90^\circ - \alpha)) = \cos\gamma : \cos(\beta - \alpha)\,.$$

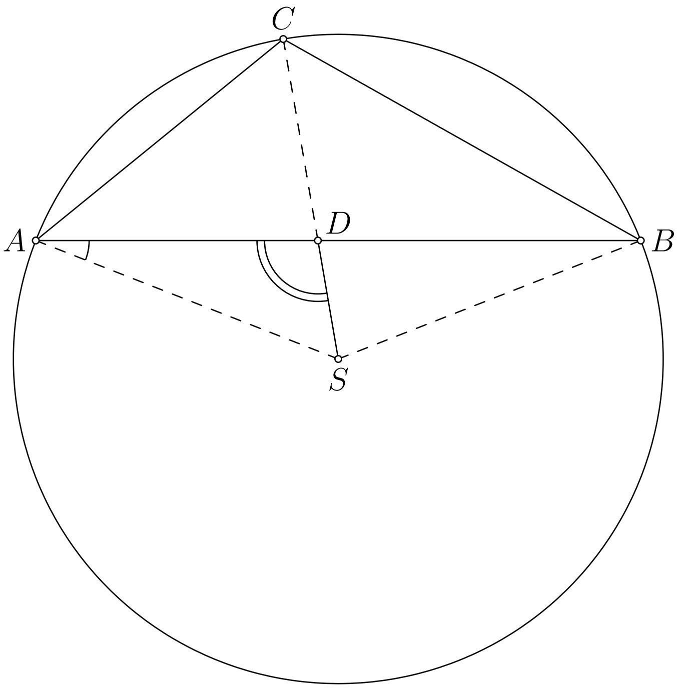
Zbog $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ vrijedi $\cos\gamma = \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta)$ pa je:

$$|SD| : |SC| = -\cos(\alpha + \beta) : \cos(\alpha - \beta)\,.$$

2. slučaj: Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom γ.

Tada se točka D podudara s polovištem hipotenuze S pa je $|SD| = 0$. Istovremeno, $\alpha + \beta = 90^\circ$ pa je $\cos(\alpha + \beta) = 0$. U tom slučaju su obje strane u traženoj jednakosti jednake nuli pa je ona zadovoljena.

3. slučaj: Trokut ABC je tupokutan s tupim kutom γ.



Tada je $\sphericalangle ASB = 360^\circ - 2\gamma$ pa iz jednakokračnog trokuta ABS zaključujemo $\sphericalangle DAS = \sphericalangle BAS = \gamma - 90^\circ$.

Kut $\sphericalangle ADS$ vanjski je kut trokuta ADC pa je

$$\sphericalangle ADS = \sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD = \alpha + (90^\circ - \beta)\,.$$

Zato je

$$\sin(\sphericalangle DAS) : \sin(\sphericalangle ADS) = \sin(\gamma - 90^\circ) : \sin(\alpha + (90^\circ - \beta)) = -\cos\gamma : \cos(\beta - \alpha)\,.$$

Zbog $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ dobivamo

$$|SD| : |SC| = \cos(\alpha + \beta) : \cos(\alpha - \beta)\,.$$

Zadatak A-3.2.

Odredi sve parove prirodnih brojeva x i y za koje je $\dfrac{xy^2}{x+y}$ prosti broj.

Rješenje.

Ako je $d = M(x, y)$, možemo pisati $x = da$, $y = db$, pri čemu je $a, b \in \mathbb{N}$, $M(a, b) = 1$.

Neka je $p = \dfrac{xy^2}{x+y}$. Tada je $p = \dfrac{da \cdot (db)^2}{da + db}$.

Slijedi

$$d^2ab^2 = p\,(a+b)\,.$$

Kako je $M(a, a+b) = M(b, a+b) = M(a, b) = 1$, zaključujemo da ab^2 dijeli p, što je moguće samo ako je $b = 1$ (jednadžba postaje $d^2a = p(a+1)$) te $a = 1$ ili $a = p$.

Razlikujemo dva slučaja:

1. $a = 1$

   Tada je $d^2 = 2p$. Kako je p prost broj, slijedi da p dijeli d, a time i p^2 dijeli $d^2 = 2p$. Odatle zaključujemo da p^2 dijeli $2p$, pa p dijeli 2. Stoga je $p = 2$ i $d = 2$. Jedino rješenje u ovom slučaju je $(x, y) = (2, 2)$.

2. $a = p$

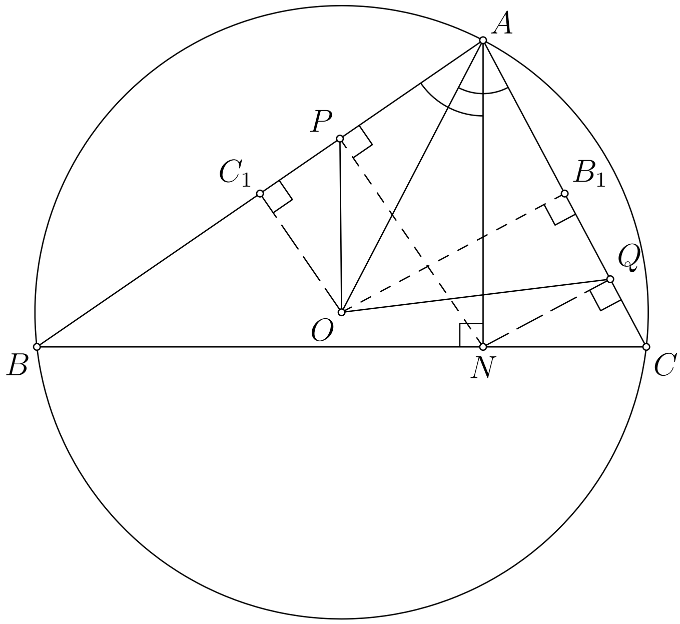
   Tada je $d^2 = p + 1$, odnosno $(d-1)(d+1) = p$. Kako je p prost broj i $0 \leqslant d - 1 < d + 1$, slijedi $d - 1 = 1$ i $d + 1 = p$. Odavde je $d = 2$ i $p = 3$ pa je jedino rješenje u ovom slučaju $(x, y) = (6, 2)$.

Konačno, traženi parovi su $(x, y) \in \{(2, 2)\,, (6, 2)\}$.

Zadatak A-3.3.

Neka je točka N nožište visine iz vrha A šiljastokutnog trokuta ABC, točke P i Q redom nožišta okomica iz točke N na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a točka O središte opisane kružnice danog trokuta. Ako vrijedi $|AC| = 2\,|OP|$, dokaži da vrijedi $|AB| = 2\,|OQ|$.

Prvo rješenje.



Neka su točke B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a R polumjer opisane kružnice trokuta ABC. Potencija točke P u odnosu na opisanu kružnicu trokuta ABC je

$$|AP| \cdot |BP| = R^2 - |OP|^2,$$

a kako je dužina $\overline{NP}$ visina pravokutnog trokuta ABN, slijedi

$$|NP|^2 = |AP| \cdot |BP| = R^2 - |OP|^2.$$

Analogno je $|NQ|^2 = |AQ| \cdot |CQ| = R^2 - |OQ|^2$.

Kako je $b = |AC| = 2\,|OP|$, iz

$$|NP|^2 = R^2 - \frac{b^2}{4} = |OB_1|^2$$

dobivamo $|NP| = |OB_1|$ pa su zbog $\sphericalangle PAN = \sphericalangle B_1AO = 90^\circ - \beta$ pravokutni trokuti APN i AB_1O sukladni, odakle je $|AN| = |AO|$.

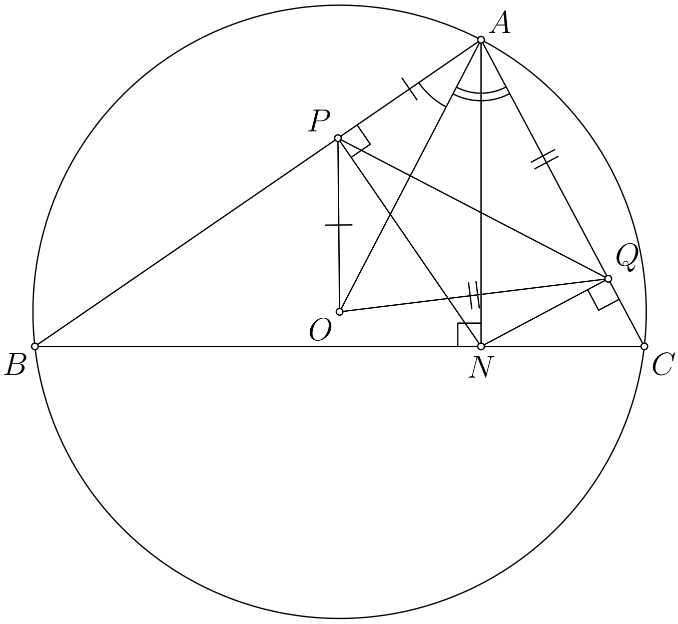
Uz to je $\sphericalangle QAN = \sphericalangle C_1AO = 90^\circ - \gamma$ pa su i trokuti AQN i AC_1O sukladni, odakle je $|NQ| = |OC_1|$.

Konačno, iz

$$R^2 - |OQ|^2 = |NQ|^2 = |OC_1|^2 = R^2 - \frac{c^2}{4}$$

dobivamo $c = |AB| = 2\,|OQ|$, što smo i trebali dokazati.

Drugo rješenje.



Uz uobičajene oznake za duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC, iz pravokutnih trokuta ABN i ACN je $|AN| = b \sin\gamma = c \sin\beta$ pa iz pravokutnih trokuta APN i AQN slijedi

$$\begin{aligned}|AP| &= |AN| \cos(90^\circ - \beta) = b \sin\beta \sin\gamma, \\ |AQ| &= |AN| \cos(90^\circ - \gamma) = c \sin\beta \sin\gamma.\end{aligned}$$

Primjenom poučka o sinusima u trokutu ABC dobivamo

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = 2\,|AO|\,.$$

Nadalje, primjenom poučka o kosinusima u trokutu APO dobivamo

$$\begin{aligned}|OP|^2 &= |AP|^2 + |AO|^2 - 2\,|AP| \cdot |AO| \cdot \cos(90^\circ - \gamma), \\ |OP|^2 &= b^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma + \frac{b^2}{4\sin^2\beta} - 2b \sin\beta \sin\gamma \cdot \frac{b}{2\sin\beta} \cdot \sin\gamma, \\ |OP|^2 &= b^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma + \frac{b^2}{4\sin^2\beta} - b^2 \sin^2\gamma, \\ |OP|^2 &= \frac{b^2}{4\sin^2\beta}\left(4\sin^4\beta \sin^2\gamma + 1 - 4\sin^2\beta \sin^2\gamma\right).\end{aligned}$$

Analogno dobivamo i $|OQ|^2$ iz trokuta AQO:

$$|OQ|^2 = \frac{c^2}{4\sin^2\gamma}\left(4\sin^2\beta \sin^4\gamma + 1 - 4\sin^2\beta \sin^2\gamma\right).$$

S obzirom da je $b=|AC|=2\,|OP|$, imamo:

$$b^2=\frac{b^2}{\sin^2\beta}\left(4\sin^4\beta\sin^2\gamma+1-4\sin^2\beta\sin^2\gamma\right),$$

$$\sin^2\beta=4\sin^4\beta\sin^2\gamma+1-4\sin^2\beta\sin^2\gamma,$$

$$4\sin^2\beta\sin^2\gamma\left(1-\sin^2\beta\right)=1-\sin^2\beta,$$

odakle zbog $\sin\beta>0$, $\sin\gamma>0$ i $\sin\beta\neq 1$ slijedi $\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{2}$.
Konačno je

$$|OQ|^2=\frac{c^2}{4\sin^2\gamma}\left(\sin^2\gamma+1-1\right)=\frac{c^2}{4},$$

odnosno $c=|AB|=2\,|OQ|$, što smo i trebali dokazati.

Zadatak A-3.4.

Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ takve da za proizvoljne pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi nejednakost:

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_n\right)^2 \geqslant n\left(x_1 x_2+x_2 x_3+\cdots+x_i x_{i+1}+\cdots+x_n x_1\right).$$

Rješenje.

Za $n=2$ nejednakost postaje

$$\left(x_1+x_2\right)^2 \geqslant 4 x_1 x_2,$$

što je ekvivalentno s

$$\left(x_1-x_2\right)^2 \geqslant 0,$$

pa je $n=2$ jedno rješenje.

Ako je $n=3$, imamo:

$$\left(x_1+x_2+x_3\right)^2 \geqslant 3\left(x_1 x_2+x_2 x_3+x_3 x_1\right),$$

što je redom ekvivalentno s:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\left(x_1 x_2+x_2 x_3+x_3 x_1\right) \geqslant 3\left(x_1 x_2+x_2 x_3+x_3 x_1\right),$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqslant x_1 x_2+x_2 x_3+x_3 x_1,$$
$$\left(x_1^2-2 x_1 x_2+x_2^2\right)+\left(x_2^2-2 x_2 x_3+x_3^2\right)+\left(x_3^2-2 x_3 x_1+x_1^2\right) \geqslant 0,$$
$$\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3-x_1\right)^2 \geqslant 0,$$

što vrijedi pa je $n=3$ također rješenje.

Za $n=4$ nejednakost glasi:

$$\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)^2 \geqslant 4\left(x_1 x_2+x_2 x_3+x_3 x_4+x_4 x_1\right),$$

što se može napisati kao

$$\left(x_1-x_2+x_3-x_4\right)^2 \geqslant 0$$

pa nejednakost očito vrijedi, tj. $n=4$ je također rješenje.

Pokažimo da nejednakost ne vrijedi za $n>4$.

Za dani n odaberimo brojeve $x_1=x_2=1$ i $x_3=x_4=\ldots=x_n=\dfrac{1}{5(n-2)}$.

Kada bi nejednakost bila zadovoljena, to bi značilo da je:

$$\left(1+1+(n-2) \cdot \frac{1}{5(n-2)}\right)^2 \geqslant n\left(1+\frac{2}{5(n-2)}+(n-3) \cdot \frac{1}{25(n-2)^2}\right).$$

Lijeva strana ove nejednakosti je $(2+\frac{1}{5})^2=\frac{121}{25}<5$, a desna strana je veća od n pa zaključujemo da je $n<5$.

Dakle, jedina rješenja zadatka su $n=2$, $n=3$ i $n=4$.

Drugi način.

Drugačiji protuprimjer koji pokazuje da $n > 4$ nije rješenje:

(i) Ako je n paran, tj. $n = 2m$, odaberemo brojeve

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1, \quad x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{2m} = 2.$$

Lijeva strana nejednakosti tada iznosi:

$$L = (m \cdot 1 + m \cdot 2)^2 = 9m^2,$$

dok je desna strana jednaka

$$D = 2m((m-1) \cdot 1 + 2 + (m-1) \cdot 4 + 2) = 2m(5m-1) = 10m^2 - 2m.$$

Nejednakost $L \geqslant D$ vrijedi ako i samo ako $9m^2 \geqslant 10m^2 - 2m$, tj. ako i samo ako je $m \leqslant 2$ (odnosno $n \leqslant 4$).

(ii) Ako je n neparan, tj. $n = 2m + 1$, odaberemo brojeve

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1, \quad x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{2m+1} = 2.$$

Lijeva strana nejednakosti tada iznosi:

$$L = (m \cdot 1 + (m+1) \cdot 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4,$$

dok je desna strana jednaka

$$D = (2m+1)((m-1) \cdot 1 + 2 + m \cdot 4 + 2) = (2m+1)(5m+3) = 10m^2 + 11m + 3.$$

Nejednakost $L \geqslant D$ vrijedi ako i samo ako $9m^2 + 12m + 4 \geqslant 10m^2 + 11m + 3$, tj. ako i samo ako je $m \leqslant 1$ (odnosno $n \leqslant 3$).

Zadatak A-3.5.

Na natjecanju je bilo 30 strijelaca. Svaki natjecatelj gađa 16 puta metu koja je podijeljena na dva dijela, A i B. Ako pogodi u dio A natjecatelj dobiva 10 bodova, a ako pogodi u dio B dobiva 5 bodova. Na kraju natjecanja utvrđeno je da je broj pogodaka u dio B veći od polovine ukupnog broja odapetih strelica te da je ukupan broj promašaja jednak ukupnom broju pogodaka u dio A.

Dokaži da su barem dva natjecatelja ostvarila isti broj bodova.

Prvo rješenje.

Uvedimo sljedeće oznake:

a_i — broj pogodaka i-tog strijelca u dio A,

b_i — broj pogodaka i-tog strijelca u dio B,

p_i — broj promašaja i-tog strijelca.

Pritom vrijedi $a_i + b_i + p_i = 16$ za $i = 1, \ldots, 30$.

Rezultat i-tog strijelca je $10a_i + 5b_i = 5a_i + 5(16 - p_i) = 80 + 5(a_i - p_i)$. Da bi svi rezultati bili različiti, broj $a_i - p_i$ mora poprimiti 30 različitih vrijednosti. Pretpostavimo da je tako.

Po Dirichletovom principu barem pola tih razlika je istog predznaka. Uzmimo da pozitivnih razlika ima barem 15 (ako je barem 15 negativnih razlika, zaključivanje provodimo za brojeve $p_i - a_i$).

Strijelce možemo poredati tako da je to prvih 15 strijelaca i da razlike $a_i - p_i$ rastu.

Dakle, $a_i > p_i$ za $i = 1, \ldots, 15$ i $a_i - p_i \leqslant a_{i+1} - p_{i+1}$ za $i = 1, \ldots, 14$.

Tada je $a_i - p_i \geqslant i$, odnosno $a_i \geqslant i$.

Imamo $120 \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \leqslant a_1 + \cdots + a_{30} < \frac{30 \cdot 16}{4} = 120$. Kontradikcija.

Time je dokazano da ne može biti 30 različitih razlika $a_i - p_i$, stoga neka dva strijelca imaju jednak broj bodova.

Drugo rješenje.

Uz oznake a_i, b_i i p_i kao u prvom rješenju označimo:

$$A = \sum_{i=1}^{30} a_i, \quad B = \sum_{i=1}^{30} b_i \quad \text{i} \quad P = \sum_{i=1}^{30} p_i.$$

Vrijedi $P = A$, $A + B + P = 30 \cdot 16 = 480$, odnosno $2A + B = 480$. Iz uvjeta zadatka je $B > 240$ pa je $A < 120$. Brojevi a_i, b_i i p_i su nenegativni i vrijedi $a_i + b_i + p_i = 16$, iz čega zaključujemo da je $0 \leqslant a_i + b_i \leqslant 16$.

Rezultat i-tog strijelca je $10a_i + 5b_i = 5(2a_i + b_i)$. Pretpostavimo da su svi strijelci postigli različit broj bodova, tj. da izraz $2a_i + b_i$ poprima 30 različitih vrijednosti.

Neka je $S = \{i \mid 2a_i + b_i > 16\}$, $T = \{i \mid 2a_i + b_i \leqslant 16\}$ te $l = |S|$.

Iz činjenice da je $a_i + b_i \leqslant 16$ zaključujemo da je $a_i \geqslant (2a_i + b_i) - 16$.

Sada vrijedi:

$$120 > A \geqslant \sum_{i \in S} a_i \geqslant \sum_{i \in S} (2a_i + b_i - 16) \geqslant 1 + 2 + \cdots + l = \frac{l(l+1)}{2},$$

iz čega zaključujemo da je $l < 15$.

S druge strane,

$$\begin{aligned} 120 > A \geqslant \sum_{i \in S} a_i \geqslant \sum_{i \in S} (2a_i + b_i - 16) &= 480 - \sum_{i \in T} (2a_i + b_i) - 16l \\ &\geqslant 480 - (0 + 1 + 2 + \cdots + 16) - 16l = 480 - 136 - 16l \end{aligned}$$

iz čega dobijemo $l > 14$, što je kontradikcija. Zaključujemo da je pretpostavka pogrešna pa vrijedi tvrdnja zadatka.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

Zadatak A-4.1.

a) Neka je k prirodni broj. Dokaži da aritmetički niz čija je razlika prirodni broj ili ne sadrži niti jednu k-tu potenciju prirodnog broja ili ih sadrži beskonačno mnogo.

b) Postoji li aritmetički niz čija je razlika prirodni broj koji sadrži beskonačno mnogo kubova prirodnih brojeva, ali ne sadrži niti jedan kvadrat prirodnog broja?

Rješenje.

a) Neka je početni član niza A, a njegova razlika d ($d \in \mathbb{N}$). Ako $A \notin \mathbb{N}$, tvrdnja vrijedi jer niz ne sadrži nijedan prirodni broj.

Neka je $A \in \mathbb{N}$ te neka je b^k (za neki $b \in \mathbb{N}$) član tog niza, konkretno $b^k = A + nd$. Tada su svi brojevi oblika $(b + md)^k$, $m \in \mathbb{N}$, također članovi tog aritmetičkog niza. Naime, vrijedi

$$(b + md)^k = b^k + kb^{k-1}md + \binom{m}{2} b^{k-2}m^2d^2 + \cdots + m^kd^k,$$

pa je $(b+md)^k = b^k + dX = A + nd + dX = A + d(n + X)$, gdje je X neki prirodan broj. Time je tvrdnja dokazana.

b) *Prvi primjer:* Među brojevima oblika $4n + 3$ nema potpunih kvadrata, pa je dovoljno pokazati da među njima ima beskonačno mnogo potpunih kubova.

Ako broj daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, onda i njegov kub daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4, jer je $3^3 = 27 = 6 \cdot 4 + 3$.

Dakle, brojevi oblika $(4k+3)^3$, $k \in \mathbb{N}$ su kubovi prirodnih brojeva i pripadaju nizu $4n+3$, $n \in \mathbb{N}$.

Drugi primjer: Niz 8, 24, 40, 56, … tj. niz $16n - 8 = 2^3(2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljava uvjete zadatka.

Naime, taj niz ne sadrži niti jedan potpun kvadrat, jer se prost faktor 2 u rastavu svakog broja iz niza na proste faktore javlja s potencijom 3.

S druge strane niz sadrži potpune kubove $8 \cdot (2n - 1)^3 = (2 \cdot (2n - 1))^3$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ za koje vrijede sljedeća dva uvjeta:

i) $f(n)f(-n) = f(n^2)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$,

ii) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}$.

Prvo rješenje.

Iz drugog uvjeta uvrštavajući $m = n = 0$ dobivamo $f(0) = 2f(0)$, odakle slijedi $f(0) = 0$. Uvrštavajući $m = 1$ i $n = -1$ i koristeći $f(0) = 0$, iz drugog uvjeta dobivamo

$$f(1) + f(-1) = 2. \tag{1}$$

Iz drugog uvjeta uvrštavajući $n = 1$ dobivamo $f(m+1) = f(m)+f(1)+2m$, pa zbrajanjem tih jednakosti za $m = 1, \ldots, k-1$ dobivamo

$$f(k) = kf(1) + 2(1 + 2 + \ldots + k - 1)$$

odnosno

$$f(k) = kf(1) + k^2 - k. \tag{2}$$

Analogno, za $k \in \mathbb{N}$, dobivamo i

$$f(-k) = kf(1) + k^2 - k. \tag{3}$$

Sada, iz prvog uvjeta, uvrštavajući $n = 1$ dobivamo $f(1)f(-1) = f(1)$, odakle slijedi

$$f(-1) = 1 \qquad \text{ili} \qquad f(1) = 0.$$

Razlikujemo dva slučaja.

I slučaj. $f(-1) = 1$.

Iz (1) slijedi $f(1) = 1$, a onda iz (2) i (3), te uzevši u obzir i $f(0) = 0$, slijedi $f(n) = n^2$.

II slučaj. $f(1) = 0$.

Iz (1) slijedi $f(-1) = 2$, a onda iz (2) i (3) zaključujemo

$$f(n) = n^2 - n, \ n \in \mathbb{N}$$

$$f(-n) = n^2 + n, \ n \in \mathbb{N}$$

i $f(0) = 0$. Jednostavnije zapisano, $f(n) = n^2 - n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Time smo dobili dva moguća rješenja. No, valja provjeriti da dobivene funkcije $f(n) = n^2$ i $f(n) = n^2 - n$ zadovoljavaju uvjete zadatka, tj. da vrijede identiteti

$$(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn,$$

$$(m+n)^2 - (m+n) = m^2 - m + n^2 - n + 2mn.$$

Drugo rješenje.

Neka funkcija f zadovoljava uvjete zadatka. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ izrazom $g(n) = f(n) - n^2$. Uvrštavanjem izraza $f(n) = g(n) + n^2$ u drugi uvjet dobijemo:

$$g(m+n) + (m+n)^2 = g(m) + m^2 + g(n) + n^2 + 2mn,$$

odnosno

$$g(m+n) = g(m) + g(n). \tag{$*$}$$

Uvrštavanjem $n = 0$ u ovaj izraz dobijemo $g(0) = 0$ pa uvrštavanjem $m = -n$ dobijemo $g(-n) = -g(n)$.

Što se prirodnih brojeva tiče, indukcijom lako možemo dokazati da jednadžba $(*)$ povlači da je $g(k) = k \cdot g(1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tada je $g(-k) = -g(k) = -k \cdot g(1)$, pa je

$$g(k) = k \cdot g(1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{$**$}$$

Ostaje nam odrediti $g(1)$.

Uvrštavanjem izraza $f(n) = g(n) + n^2$ u prvi uvjet dobijemo:

$$\left(g(n) + n^2\right)\left(g(-n) + n^2\right) = g(n^2) + n^4.$$

Ako u prethodnu jednakost uvrstimo $n = 1$ dobit ćemo

$$(g(1) + 1)\,(g(-1) + 1) = g(1) + 1,$$

odnosno

$$g(1)\,(g(1) + 1) = 0.$$

Odavde zaključujemo da je $g(1) = 0$ ili $g(1) = -1$ pa nam jednakost $(**)$ daje rješenja $g(n) = 0$ i $g(n) = -n$, iz čega slijedi da su jedina kandidati za rješenja funkcije $f(n) = n^2$ i $f(n) = n^2 - n$. Uvrštavanjem provjeravamo da obje funkcije zaista zadovoljavaju uvjete zadatka.

Zadatak A-4.3.

Za dani prirodni broj n neka je $M(n)$ najveći prirodni broj za koji je moguće konstruirati niz prirodnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{M(n)} \in \{2, 3, \ldots, n\}$ tako da vrijedi:

> Za svaka dva različita broja $i, j \in \{1, 2, \ldots, M(n)\}$
> brojevi $2^{x_i} - 1$ i $2^{x_j} - 1$ su relativno prosti.

Ako je $M(k) = M(k-1)$ za neki prirodni broj $k > 1$, dokaži da je k složen.

Rješenje.

Dokažimo da je uvjet da su $2^{x_i} - 1$ i $2^{x_j} - 1$ relativno prosti ekvivalentan uvjetu da su x_i i x_j relativno prosti.

Pretpostavimo prvo da x_i i x_j nisu relativno prosti. Tada postoji prirodni broj $d > 1$ koji dijeli x_i i x_j. Tada su brojevi $2^{x_i} - 1$ i $2^{x_j} - 1$ oba djeljivi s $2^d - 1$ pa nisu relativno prosti.

Pretpostavimo sada da su x_i i x_j relativno prosti, te označimo s m najveći zajednički djelitelj brojeva $2^{x_i} - 1$ i $2^{x_j} - 1$. Tada postoje cijeli brojevi a i b takvi da je $ax_i + by_j = 1$. Jedan od brojeva a i b je pozitivan, a drugi negativan. Bez smanjenja općenitosti, neka je $a > 0$ i $b < 0$, te označimo $c = -b > 0$. Tada je $ax_i = cx_j + 1$, pri čemu su $a, c \in \mathbb{N}$. Sada imamo:

$$m \mid 2^{x_i} - 1, \quad 2^{x_i} - 1 \mid 2^{ax_i} - 1.$$

Nadalje,

$$2^{ax_i} - 1 = 2^{cx_j + 1} - 1 = 2 \cdot 2^{cx_j} - 1 = 2 \cdot (2^{cx_j} - 1) + 1,$$

pa zaključujemo da

$$m \mid 2 \cdot (2^{cx_j} - 1) + 1.$$

S druge strane,

$$m \mid 2^{x_j} - 1, \quad 2^{x_j} - 1 \mid 2^{cx_j} - 1, \quad 2^{cx_j} - 1 \mid 2 \cdot (2^{cx_j} - 1),$$

iz čega zaključujemo da

$$m \mid 2 \cdot (2^{cx_j} - 1),$$

što znači da m dijeli dva uzastopna prirodna broja pa je $m = 1$.

Zaključujemo da je $M(n)$ zapravo najveći broj brojeva koje možemo izabrati iz skupa $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako da su svaka dva relativno prosta.

Pretpostavimo da je prirodni broj k prost. Tada među izabranih $M(k-1)$ brojeva možemo dodati broj k jer je on relativno prost sa svima njima. Dakle, u promatranom slučaju je $M(k) > M(k-1)$. Zaključujemo da je $M(k) = M(k-1)$ moguće jedino u slučaju kada je k složen.

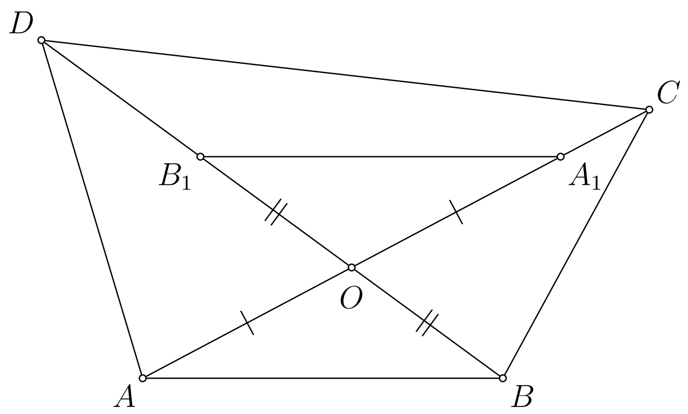
Zadatak A-4.4.

Konveksni četverokut podijeljen je dijagonalama na četiri trokuta čije su upisane kružnice sukladne. Dokaži da je taj četverokut romb.

Rješenje.

Neka je O sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$. Dokažimo ponajprije da je četverokut $ABCD$ paralelogram tj. da točka O raspolavlja obje dijagonale četverokuta.

Pretpostavimo suprotno, tj. da točka O ne raspolavlja barem jednu dijagonalu četverokuta $ABCD$, recimo $\overline{BD}$. Tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|BO| < |OD|$. Također, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|AO| \leqslant |OC|$.



Promotrimo sada trokut OA_1B_1 centralnosimetričan trokutu OAB s obzirom na točku O. Očito, polumjer kružnice upisane trokutu OA_1B_1 je manji od polumjera kružnice upisane trokutu OCD. Kako oni po pretpostavci trebaju biti jednaki imamo kontradikciju pa se dijagonale četverokuta $ABCD$ raspolavljaju, tj. on je paralelogram.

Sada, kako je $ABCD$ paralelogram, trokuti OAB, OBC, OCD i ODA imaju jednake površine. Nadalje, zbog formule $P = r \cdot s$ slijedi da oni imaju jednake poluopsege pa prema tome i opsege. Promotrimo trokute OAB i OBC. Kako je $\overline{OB}$ zajednička stranica i $|OA| = |OC|$ zaključujemo da je $|AB| = |BC|$. Stoga je $ABCD$ romb.

Zadatak A-4.5.

U tablicu $n \times n$, $n \geqslant 2$, potrebno je upisati brojeve 1, 2, 3 i 4 tako da svaka četiri polja koja imaju jedan zajednički vrh sadrže četiri različita broja.

Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje.

Prebrojimo sve moguće tražene rasporede analizirajući postupno kako možemo popuniti tablicu krenuvši iz gornjeg lijevog ugla. Kvadrat 2×2 u gornjem lijevom uglu možemo popuniti na 4! načina.

Odaberimo jedno moguće popunjavanje tog kvadrata i prebrojimo na koliko načina možemo tablicu $n \times n$ popuniti do kraja. Neka su u prvom redu prva dva polja označena s 1 i 2, a u drugom s 3 i 4, tim redom.

1	2		
3	4		

Brojanje ćemo podijeliti u disjunktne slučajeve, a vrlo korisna će biti sljedeća lema.

Lema. *Neka se u nekom stupcu (retku) u tri uzastopna polja A, B, C pojavljuju tri različita broja a, b, c. Tada su na jednoznačan način određeni brojevi a', b', c' u tri polja A', B', C' (susjedna poljima A, B, C redom) u stupcu desno (tj. u retku ispod) od promatranog stupca (retka).*

Zaista, označimo li s d preostali četvrti broj (različit od a, b, c) onda je $a' = c$, $b' = d$, $c' = a$.

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
c	d	a

$\boldsymbol{a}$	c
$\boldsymbol{b}$	d
$\boldsymbol{c}$	a

Uvedimo oznaku $a_k, k = 2, ..., n$ za broj mogućih popunjavanja tablice uz fiksiranu $k \times k$ podtablicu u gornjem lijevom kutu na način da su u neparnim retcima naizmjence jedinice i dvojke (počevši s 1), a u parnim recima naizmjence trojke i četvorke (počevši s 3). Zovimo takve $k \times k$ podtablice **regularnim**. Očito je $a_n = 1$ (čitava tablica je već ispunjena), a tražimo a_2.

Pokažimo da za svaki $k = 2, \ldots, n-1$ vrijedi $a_k = 2^{n-k} + a_{k+1}$.

Naime, neka je dana regularna $k \times k$ podtablica u gornjem lijevom dijelu $n \times n$ tablice. Slučajevi za k paran ili neparan se pokazuju analogno uz zamjenu $1 \longleftrightarrow 3, 2 \longleftrightarrow 4$, pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je k paran.

Promatramo 3 slučaja.

Prvi slučaj. Prva dva polja u $(k+1)$-om retku označimo s $2,1$ u tom redoslijedu. Tada su prema lemi jedinstveno određena sva polja u $(k-1)$-om, k-tom i $(k+1)$-om retku. U $(k-1)$-om i $(k+1)$-om retku moraju biti naizmjence jedinice i dvojke, a u k-tom retku moraju biti naizmjence trojke i četvorke (Slika 1, lijevo).

1	**2**	**1**	**2**			
3	**4**	**3**	**4**			
1	**2**	**1**	**2**	1	2	1
3	**4**	**3**	**4**	3	4	3
2	**1**	2	1	2	1	2

1	**2**	**1**	**2**	1	2	1
3	**4**	**3**	**4**	3	4	3
1	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**
3	**4**	**3**	**4**	**3**	**4**	**3**
2	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**

Slika 1: Primjer za $n=7, k=4$.

Ako se u nekom retku pojavljuju samo dva broja onda se lako vidi da se u svim retcima moraju pojavljivati točno dva broja. Zato zaključujemo da je jedinstveno određena čitava gornja $(k+1)\times n$ podtablica (Slika 1, desno).

Nadalje, u svakom idućem retku moći će se pojaviti samo po dva različita broja. U svakom od preostalih $n-k-1$ redaka prva dva polja možemo označiti na dva načina (u neparnom retku s $1,2$ ili $2,1$, a u parnom s $3,4$ ili $4,3$.), pa je ukupan broj popunjavanja u ovom slučaju 2^{n-k-1}.

Drugi slučaj. Prva dva polja u $(k+1)$-vom stupcu označimo s $3,1$ u tom redoslijedu. Ovaj slučaj tretiramo potpuno analogno kao prvi, te je ukupan broj traženih popunjavanja i u ovom slučaju 2^{n-k-1}.

1	**2**	**1**	**2**	**3**		
3	**4**	**3**	**4**	**1**		
1	**2**	**1**	**2**	3		
3	**4**	**3**	**4**	1		
		1	2	3		
		3	4	1		
		1	2	3		

1	**2**	**1**	**2**	**3**		
3	**4**	**3**	**4**	**1**		
1	**2**	**1**	**2**	**3**		
3	**4**	**3**	**4**	**1**		
1	2	**1**	**2**	**3**		
3	4	**3**	**4**	**1**		
1	2	**1**	**2**	**3**		

Slika 2: Primjer za $n=7, k=4$.

Primjetimo da sada $(k+1)$-i redak počinje oznakama $1, 2$ u tom redoslijedu te su prvi i drugi slučaj disjunktni.

Treći slučaj. Preostala nam je samo mogućnost da su prva dva polja u $(k+1)$-om retku označena s $1, 2$ u tom redoslijedu, a prva dva polja u $(k+1)$-om stupcu označena s $1, 3$. Polja u $(k+1)$-om retku i $(k+1)$-om stupcu koja se nalaze unutar $(k+1) \times (k+1)$ podtablice u gornjem lijevom dijelu tablice su jedinstveno određena. Vidimo da smo dobili $(k+1) \times (k+1)$ regularnu podtablicu, pa se ostatak tablice dalje može popuniti na a_{k+1} načina.

1	**2**	**1**	**2**	**1**		
3	**4**	**3**	**4**	**3**		
1	**2**	**1**	**2**	**1**		
3	**4**	**3**	**4**	**3**		
1	**2**	**1**	**2**	1		

Slika 3: Primjer za $n = 7, k = 4$.

Zbog disjkunktnosti slučajeva zaista vrijedi $a_k = 2^{n-k-1} + 2^{n-k-1} + a_{k+1} = 2^{n-k} + a_{k+1}$.

Na kraju zaključujemo da je $a_2 = 2 \cdot 2^{n-3} + a_3 = 2 \cdot 2^{n-3} + 2 \cdot 2^{n-4} + a_4 = \ldots = 2 \cdot 2^{n-3} + 2 \cdot 2^{n-4} + \ldots + 2 \cdot 2 + a_n = 2(2^{n-2} - 1) + 1 = 2^{n-1} - 1$ jer je $a_n = 1$.

Dakle, traženi broj je $4! \cdot (2^{n-1} - 1)$.

Drugi način.

Analognim načinom zaključivanja dokazujemo sljedeću karakterizaciju ispravnih popunjenja tablice:

Karakterizacija.

Da bi tablica bila ispravno popunjena, nužno je i dovoljno da je ispunjen barem jedan od uvjeta:

(a) Svaki redak tablice naizmjence sadrži točno dva broja, pri čemu se jedan par brojeva javlja u parnim, a drugi par brojeva u neparnim retcima.

(b) Svaki stupac tablice naizmjence sadrži točno dva broja, pri čemu se jedan par brojeva javlja u parnim, a drugi par brojeva u neparnim stupcima.

Prebrojimo sva moguća ispravna popunjenja tablice.

Radi jednostavnosti prebrojavanja, fiksirajmo brojeve u kvadratu u gornjem lijevom kutu tablice. Te brojeve možemo permutirati na $4! = 24$ načina, pa ćemo s tim brojem pomnožiti na kraju sva moguća ispravna popunjenja tablice koja slijede iz ovakvog početka. Prebrojimo koliko ispravnih popunjenja imamo s ovako fiksiranim početkom, i to onih koja zadovoljavaju uvjet (a) ili uvjet (b) iz karakterizacije.

Uz fiksirani početak, popunjenja koja zadovoljavaju uvjet (a) ima 2^{n-2}, jer za prvo polje u svakom od redaka, od trećeg do $n-$tog, imamo dva moguća izbora. Na isti način, uz fiksirani početak, popunjenja koja zadovoljavaju uvjet (b) ima 2^{n-2}.

Moramo pogledati i koliko ima popunjenja koja, uz fiksirani početak, zadovoljavaju oba uvjeta. No, takvo je jedno jedino; to je ono popunjenje kod kojega su svaki drugi redak (i stupac) identični.

Konačno, zaključujemo da je broj ispravnih popunjenja $24 \cdot (2 \cdot 2^{n-2} - 1) = 24 \cdot (2^{n-1} - 1)$.