Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

1. U šesterokutu $ABCDEF$ vrijedi

$$AB \perp BC, \qquad AC \perp CD, \qquad AD \perp DE, \qquad AE \perp EF.$$

Ako su duljine stranica tog šesterokuta prirodni brojevi, dokaži da ne mogu svi biti neparni.

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c\,(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a\,(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b\,(c + 2a)} \geqslant 6.$$

3. Na n kartica napisane su rečenice:

"*Barem k rečenica lijevo od ove kartice je lažno.*"

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Kartice su složene u nekom redoslijedu slijeva nadesno. Koliko najviše rečenica može biti istinito?

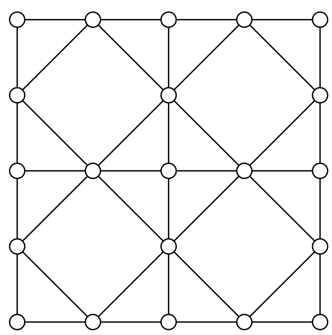
4. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ACB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$, a M je polovište dužine $\overline{BC}$. Kružnica sa središtem u točki A siječe pravac BC u točkama M i D.

Dokaži da je $|MD| = |AB|$.

5. Dana je dvadeset i jedna točka kao na slici.
Na početku je svakoj točki pridružen broj nula.

U svakom potezu odabire se pravac koji sadrži neku od nacrtanih dužina i u svim točkama kroz koje taj pravac prolazi, pridruženi brojevi se povećavaju za 1.

Kažemo da je prirodni broj n *dohvatljiv* ako se na opisani način može postići da je nakon određenog broja poteza svim točkama pridružen isti broj n.



a) Dokaži da je broj 2010 dohvatljiv.

b) Dokaži da broj 2011 nije dohvatljiv.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

1. Dokaži da svaki kompleksni broj z za koji postoji točno jedan kompleksni broj a takav da je
$$z^3 + (2-a)\,z^2 + (1-3a)\,z + a^2 - a = 0$$
zadovoljava jednakost $z^3 = 1$.

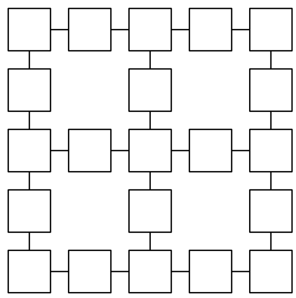
2. Odredi sva realna rješenja sustava
$$\begin{aligned} \left(1+4x^2\right) y &= 4z^2,\\ \left(1+4y^2\right) z &= 4x^2,\\ \left(1+4z^2\right) x &= 4y^2. \end{aligned}$$

3. a) Dokaži da za međusobno različite prirodne brojeve a i b postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da su brojevi $a+n$ i $b+n$ relativno prosti.

   b) Postoje li međusobno različiti prirodni brojevi a, b, c i d za koje ne postoji prirodni broj n takav da su brojevi $a+n$, $b+n$, $c+n$, $d+n$ u parovima relativno prosti?

4. Upisana kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Dokaži da je $BP \perp CP$.

5. Na početku je u svaki od kvadrata raspoređenih kao na slici upisana nula.

   U svakom potezu odabire se jedan od kvadrata te se istovremeno brojevi koji se nalaze u tom kvadratu i u svim njemu susjednim kvadratima uvećavaju za jedan.

   Dokaži da je nakon određenog broja poteza:
   a) moguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2010;
   b) nemoguće postići da u svakom kvadratu piše broj 2011.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

1. Neka je točka S središte opisane kružnice trokuta ABC s kutovima $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle CBA$. Neka pravac CS siječe pravac AB u točki D koja se nalazi između točaka A i B. Dokaži da vrijedi
$$\frac{|SD|}{|SC|} = \left|\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\right|.$$

2. Odredi sve parove prirodnih brojeva x i y za koje je $\dfrac{xy^2}{x+y}$ prosti broj.

3. Neka je točka N nožište visine iz vrha A šiljastokutnog trokuta ABC, točke P i Q redom nožišta okomica iz točke N na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a točka O središte opisane kružnice danog trokuta. Ako vrijedi $|AC| = 2\,|OP|$, dokaži da vrijedi $|AB| = 2\,|OQ|$.

4. Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ takve da za proizvoljne pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi nejednakost:
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n)^2 \geqslant n\,(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_ix_{i+1} + \cdots + x_nx_1)\,.$$

5. Na natjecanju je bilo 30 strijelaca. Svaki natjecatelj gađa 16 puta metu koja je podijeljena na dva dijela, A i B. Ako pogodi u dio A natjecatelj dobiva 10 bodova, a ako pogodi u dio B dobiva 5 bodova. Na kraju natjecanja utvrđeno je da je broj pogodaka u dio B veći od polovine ukupnog broja odapetih strelica te da je ukupan broj promašaja jednak ukupnom broju pogodaka u dio A.

   Dokaži da su barem dva natjecatelja ostvarila isti broj bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

29. travnja 2010.

1. a) Neka je k prirodni broj. Dokaži da aritmetički niz čija je razlika prirodni broj ili ne sadrži niti jednu k-tu potenciju prirodnog broja ili ih sadrži beskonačno mnogo.

   b) Postoji li aritmetički niz čija je razlika prirodni broj koji sadrži beskonačno mnogo kubova prirodnih brojeva, ali ne sadrži niti jedan kvadrat prirodnog broja?

2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ za koje vrijede sljedeća dva uvjeta:

   i) $f(n)f(-n) = f(n^2)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$,

   ii) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}$.

3. Za dani prirodni broj n neka je $M(n)$ najveći prirodni broj za koji je moguće konstruirati niz prirodnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{M(n)} \in \{2, 3, \ldots, n\}$ tako da vrijedi:

   Za svaka dva različita broja $i, j \in \{1, 2, \ldots, M(n)\}$
   brojevi $2^{x_i} - 1$ i $2^{x_j} - 1$ su relativno prosti.

   Ako je $M(k) = M(k-1)$ za neki prirodni broj $k > 1$, dokaži da je k složen.

4. Konveksni četverokut podijeljen je dijagonalama na četiri trokuta čije su upisane kružnice sukladne. Dokaži da je taj četverokut romb.

5. U tablicu $n \times n$, $n \geqslant 2$, potrebno je upisati brojeve 1, 2, 3 i 4 tako da svaka četiri polja koja imaju jedan zajednički vrh sadrže četiri različita broja.

   Na koliko je načina to moguće napraviti?