DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Ako su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta, dokažite da vrijedi

$$(a^4+b^4+c^4)^2 = 2(a^8+b^8+c^8)\ .$$

Rješenje.

Primjenom formule za kvadrat trinoma slijedi

$$(a^4+b^4+c^4)^2 = a^8+b^8+c^8+2(a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4) \quad (*)$$

Kako su a, b i c duljine stranica pravokutnog trokuta, vrijedi Pitagorin poučak. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je c hipotenuza. Iz

$$a^2+b^2=c^2$$

kvadriranjem dobivamo

$$a^4+2a^2b^2+b^4=c^4\ .$$

Odatle slijedi

$$a^4+b^4+c^4=2c^4-2a^2b^2\ .$$

Dobiveni izraz kvadriramo i tada je

$$\begin{aligned}(a^4+b^4+c^4)^2 &= 4c^8+4a^4b^4-8a^2b^2c^4\\ &= 4a^4b^4+4c^4(c^4-2a^2b^2)\\ &= 4a^4b^4+4c^4(a^4+b^4)\\ &= 4a^4b^4+4a^4c^4+4b^4c^4\ .\end{aligned}$$

Dakle,

$$a^4b^4+b^4c^4+a^4c^4=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4)^2\ .$$

Dobivena jednakost zajedno s (*) daje
$(a^4+b^4+c^4)^2=a^8+b^8+c^8+\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)^2$, a odatle slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak B-1.2.

Odredite sve prirodne brojeve a i n takve da je

$$a^n + a^{n+1} + a^{n+2} + a^{n+3} + a^{n+4} + a^{n+5} = 2016 \ .$$

Rješenje.

Zapišimo dani izraz u obliku

$$a^n(1 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5) = 2016 \quad \text{ili}$$
$$a^n\left(\frac{a^6-1}{a-1}\right) = 2016 \ .$$

Očito je $a \neq 1$.
Ako je $a = 2$, dani izraz prelazi u

$$2^n\left(\frac{2^6-1}{2-1}\right) = 2016 \ ,$$

odnosno

$$2^n \cdot 63 = 2016 \ , \quad 2^n = 32 \quad \text{pa je} \quad n = 5 \ .$$

Ako je $a = 3$, dobivamo jednadžbu $3^n \cdot 364 = 2016$ koja nema cjelobrojnih rješenja.
Ako je $a = 4$, vrijedi $4^n \cdot 1365 = 2016$. Takav prirodan broj n ne postoji.
Uočimo da je $4^n \cdot 1365 \geq 4 \cdot 1365 = 5460 > 2016$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Kako vrijednost izraza

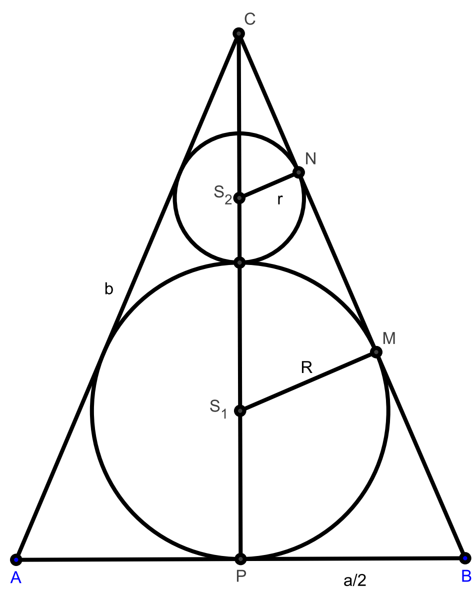
$$a^n\left(\frac{a^6-1}{a-1}\right)$$

raste za sve prirodne brojeve a i n , njegova vrijednost je za sve $a \geq 4$ veća od 2016 pa dana jednažba nema rješenja.
Dakle, jedino rješenje je $a = 2$, $n = 5$.

Zadatak B-1.3.

U jednakokračnom trokutu nalaze se dvije kružnice. Prva ima polumjer R i dodiruje sve stranice trokuta, a drugoj je polumjer r i dodiruje krakove trokuta i prvu kružnicu. Odredite opseg trokuta.

Rješenje.



Neka je duljina visine $|\overline{PC}| = h$.
Kako je $\overline{S_1M} \perp \overline{BC}$ i $\overline{S_2N} \perp \overline{BC}$, trokuti $\triangle S_2NC$, $\triangle S_1MC$ i $\triangle BPC$ imaju sukladne kuteve pa su slični.
Iz sličnosti slijede ovi omjeri:

$$|PB| : |BC| = |S_1M| : |S_1C| = |S_2N| : |S_2C|$$

tj.

$$\frac{a}{2} : b = R : (h-R) = r : (h-2R-r)$$

Iz $R : (h-R) = r : (h-2R-r)$ dobivamo

$$h = \frac{2R^2}{R-r} \ . \ (*)$$

Iz $\frac{a}{2} : b = R : (h-R)$ dobivamo

$$b = \frac{a(h-R)}{2R}$$

što uz (*) daje

$$b = \frac{a(R+r)}{2(R-r)} \ . \ (**)$$

U jednakokračnom trokutu vrijedi $b^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$. Zamijenimo li u toj jednakosti b i h sa (*) i (**) dobit ćemo

$$\frac{a^2(R+r)^2}{4(R-r)^2} = \frac{4R^4}{(R-r)^2} + \frac{a^2}{4} \ .$$

Odatle se dobiva

$$a^2 = \frac{4R^3}{r} \quad \text{, tj.} \quad a = 2R\sqrt{\frac{R}{r}} \ .$$

Nadalje, uvrstimo li dobiveni a u (**) slijedi

$$b = \frac{R\sqrt{R}(R+r)}{\sqrt{r}(R-r)} \ .$$

Tada je opseg trokuta

$$o = a + 2b = 2R\sqrt{\frac{R}{r}} + 2\frac{R\sqrt{R}(R+r)}{\sqrt{r}(R-r)} = \frac{4R^2}{R-r}\sqrt{\frac{R}{r}} \ .$$

Zadatak B-1.4.

U svakoj od pet košara nalazi se određeni broj kuglica. Iz prve košare prebacimo jednu petinu kuglica u drugu košaru. Zatim iz druge košare prebacimo jednu petinu kuglica u treću košaru. Nakon toga iz treće košare petinu kuglica prebacimo u četvrtu košaru. Zatim petinu kuglica iz četvrte košare prebacimo u petu košaru. Na kraju iz pete košare prebacimo petinu kuglica u prvu košaru. Sada u svakoj kutiji imamo točno 32 kuglice! Koliko je kuglica bilo u svakoj pojedinoj košari na početku?

Prvo rješenje.

Nakon posljednjeg prebacivanja petine kuglica, iz pete košare u prvu košaru, u petoj košari su ostale 32 kuglice. Ako je x broj kuglica u petoj košari prije prebacivanja petine kuglica u prvu košaru, vrijedi

$$\frac{4}{5} \cdot x = 32 \ .$$

Tada je $x = \frac{5}{4} \cdot 32 = 40$ kuglica.
Dakle, u prvu košaru je prebačeno $\frac{1}{5}x = \frac{40}{5} = 8$ kuglica. U prvoj je košari nakon prebacivanja petine u drugu bilo $32 - 8 = 24$ kuglice,
što znači da je na početku u prvoj košari bilo $\frac{5}{4} \cdot 24 = 30$ kuglica.
Nadalje iz prve košare prebacimo petinu tj. $\frac{30}{5} = 6$ kuglica u drugu košaru u kojoj je na početku bilo npr. b kuglica. Vrijedi

$$\frac{4}{5} \cdot (b + 6) = 32 \ ,$$

pa je početni broj kuglica u drugoj košari 34.
Dakle u drugoj košari je, nakon prebacivanja petine iz prve, $34 + 6 = 40$ kuglica. Petinu tog broja, dakle 8 kuglica prebacujemo u treću košari u kojoj se nalazi c kuglica i vrijedi

$$\frac{4}{5} \cdot (c + 8) = 32 \ .$$

Početni broj kuglica u trećoj košari je 32.
Analogno zaključujemo da su i u četvrtoj i petoj košari na početku bile

$$40 - \frac{40}{5} = 32$$

kuglice. Dakle u košarama je bilo redom 30, 34, 32, 32, 32 kuglice.

Drugo rješenje.
Zadatak se može riješiti i postavljanjem sustava od pet jednadžbi s pet nepoznanica. Neka su a, b, c, d, e redom brojevi kuglica u prvoj, drugoj,..., petoj košari. Tada je iz uvjeta zadatka

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}a+b\right)=32\\
&\frac{4}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}a+b\right)+c\right]=32\\
&\frac{4}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}a+b\right)+c\right)+d\right]=32\\
&\frac{4}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}a+b\right)+c\right)+d\right)+e\right]=32\\
&\frac{4}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}a+b\right)+c\right)+d\right)+e\right]+\frac{4}{5}a=32
\end{aligned}$$

Riješimo li sustav, dobivamo $a=30$, $b=34$, $c=32$, $d=32$ i $e=32$.

Zadatak B-1.5.

Odredite posljednje dvije znamenke broja čiji kvadrat završava sa 44.

Rješenje.
Neka su x, y posljednje dvije znamenke prirodnog broja n s danim svojstvom. Broj n možemo zapisati kao

$$n=100a+10x+y \quad \text{gdje je } a\in\mathbb{N}\ , \quad x,y\in\{0,1,2\ldots,9\}$$

Tada je

$$n^2=(100a+10x+y)^2=(100a)^2+100x^2+y^2+2000ax+200ay+20xy\ ,$$

odnosno u obliku $n^2=100b+y^2+20xy$, $b\in\mathbb{N}$, a kako su posljednje dvije znamenke broja n^2 jednake 4, izraz $y^2+20xy=\ldots 44$ završava s 44.
Očito y^2 ima zadnju znamenku 4, pa su jedine mogućnosti $y=2$, $y=8$.

Ako je $y=2$, onda je $4+40x=\ldots 44$ i neposrednom provjerom ($x\in\{0,1,2\ldots,9\}$) možemo zaključiti da je $x=1$, $x=6$.
Ako je $y=8$, onda je $64+160x=\ldots 44$ neposrednom provjerom ($x\in\{0,1,2\ldots,9\}$) možemo zaključiti da je $x=3$, $x=8$.

Dakle posljednje dvije znamenke broja n mogu biti 12, 62, 38, 88.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Od svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju jednakost

$$\left|\frac{z-i}{z-3i}\right|=\frac{1}{2}\,,$$

odredite onaj koji ima najveći modul.

Prvo rješenje.
Neka je $z=x+yi$. Iz danog uvjeta slijedi

$$\left|\frac{x+(y-1)i}{x+(y-3)i}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

Nakon kvadriranja i provedenih računskih operacija dobit ćemo da za kompleksni broj z vrijedi

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}y-\frac{5}{3}=0 \quad (*)$$

što možemo zapisati u obliku

$$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Zaključujemo da se z nalazi na kružnici sa središtem na osi y u $S\left(0,\frac{1}{3}\right)$, polumjera $r=\frac{4}{3}$. Točka na toj kružnici koja je najudaljenija od ishodišta je tražena točka. Zato je rješenje kompleksni broj čiji je realni dio jednak 0, a imaginarni $\frac{5}{3}$, odnosno radi se o broju $z=\frac{5}{3}i$.

Drugo rješenje.
Do uvjeta (*) dolazimo kao i u prvom rješenju. Za modul kompleksnog broja z, uz dobiveni uvjet (*), vrijedi

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{2}{3}y + \frac{5}{3}\ ,$$

a ovo će biti maksimalno za maksimalni iznos od y. Iz

$$x^2 = -y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3} - y\right)(1+y)$$

zaključujemo da je $\left(\frac{5}{3} - y\right)(1+y) \geq 0$, odnosno $y \in \left[-1, \frac{5}{3}\right]$. Slijedi da maksimalna vrijednost za y iznosi $\frac{5}{3}$, a za $y = \frac{5}{3}$ iz (*) dobivamo $x = 0$.
Dakle, rješenje je broj $z = \frac{5}{3}i$.

Zadatak B-2.2.

Za prirodni broj kažemo da je palindrom ako je u dekadskom zapisu isti pročitan s lijeva i s desna. Palindrome možemo poredati po veličini. Odredite 2010.–ti palindrom po redu.

Rješenje.
Ima 9 jednoznamenkastih (1, 2, 3, ..., 9),

9 dvoznamenkastih (11, 22, 33, ..., 99),

90 troznamenkastih (brojevi oblika xyx),

90 četveroznamenkastih (brojevi oblika $xyyx$),

900 peteroznamenkastih ($xyzyx$),

900 šesteroznamenkastih ($xyzzyx$) palindroma.

To je ukupno 1998 palindroma.

Prebrojimo 7–znamenkaste. Brojeva oblika $100x001$ ima 10. Zato je 1010101 2009. palindrom, a 2010. je 1011101.

Zadatak B-2.3.

U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$4^{2x+\sqrt{-1+x^2}} - 5 \cdot 2^{2x-1+\sqrt{-1+x^2}} = 6 \ .$$

Rješenje.
Zadatak rješavamo supstitucijom $2x + \sqrt{-1+x^2} = y$ uz uvjet $x^2 - 1 \geq 0$.
(Ili supstitucijom $2^{2x+\sqrt{-1+x^2}} = t$.)
Tada je $2 \cdot (2^y)^2 - 5 \cdot 2^y - 12 = 0$.
Rješenje je samo $2^y = 4$ jer $2^y > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$. Tada je $y = 2$.
Slijedi $2x + \sqrt{-1+x^2} = 2$, odnosno

$$\sqrt{-1+x^2} = 2 - 2x \ .$$

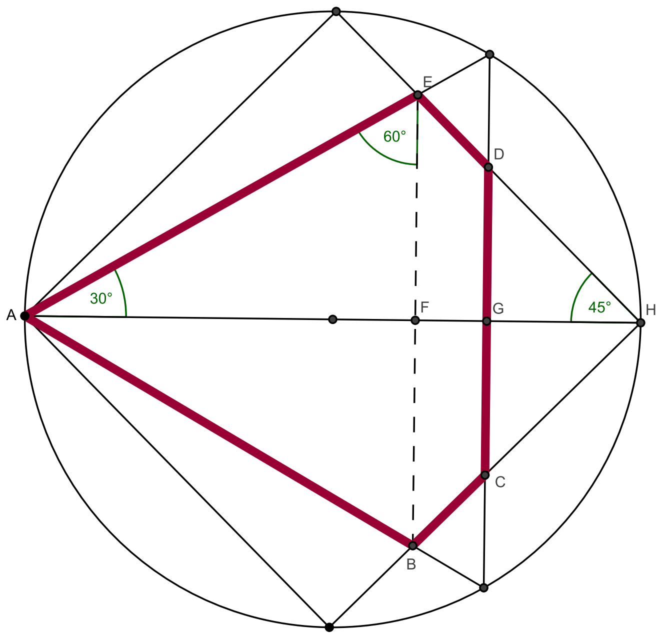
Nakon kvadriranja uz uvjet $2 - 2x \geq 0$ dobit ćemo

$$3x^2 - 8x + 5 = 0 \ , \quad x_1 = 1 \ , x_2 = \frac{5}{3} \ .$$

Samo rješenje $x = 1$ zadovoljava dane uvjete.

Zadatak B-2.4. Kvadrat i jednakostraničan trokut upisani su u kružnicu polumjera 1 tako da imaju jedan vrh zajednički. Odredite površinu zajedničkog dijela kvadrata i trokuta.

Rješenje.



Tražena površina je

$$P_{ABCDE} = 2(P_{AHE} - P_{GHD}) \; .$$

Stranica upisanog jednakostraničnog trokuta je

$$a = \frac{3r}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \; .$$

Osnovica trokuta $\triangle AHE$ je

$$|AH| = 2r = 2 \; .$$

Odredimo visinu $|EF|$ tog trokuta. Iz jednakokračnog pravokutnog trokuta $\triangle FHE$ je

$$|EF| = |FH| = 2 - |AF| \; ,$$

a iz trokuta $\triangle AFE$ imamo

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|AF|}{|EF|} \quad , \text{ odnosno } \quad |AF| = \sqrt{3}|EF| \; .$$

Iz ove dvije jednakosti dobivamo $|EF| = 2 - \sqrt{3}|EF|$ pa je visina

$$|EF| = \sqrt{3} - 1 \; .$$

Slijedi

$$P_{\triangle AHE} = \frac{|AH| \cdot |EF|}{2} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3} - 1 \; .$$

Trokut $\triangle GHD$ je jednakokračan pravokutan trokut, tj.

$$|DG| = |GH| = 2r - |AG| = 2r - \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \; .$$

Slijedi

$$P_{\triangle GHD} = \frac{|GH| \cdot |GD|}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} \; .$$

Tada je tražena površina

$$P_{ABCDE} = 2(P_{AHE} - P_{GHD}) = 2\left((\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{8} \right) = 2\sqrt{3} - \frac{9}{4} \; .$$

Zadatak B-2.5.

Iz mjesta A u mjesto B krenuo je autobus. 50 minuta kasnije iz mjesta A je krenuo automobil koji je u mjesto B stigao 10 minuta prije autobusa. Da su krenuli istovremeno jedan iz mjesta A, a drugi iz mjesta B (jedan drugome u susret), sreli bi se nakon jednog sata i 12 minuta. Vozi li istim putem i istom brzinom, koliko vremena će trebati autobusu da se vrati iz mjesta B u mjesto A?

Rješenje.
Autobus je na putu između mjesta A i B proveo x sati, a automobil $x-1$ sat, pa mora vrijediti $x>1$.
Brzina autobusa je $\frac{s}{x}$ (gdje je s udaljenost između mjesta A i B).
Brzina automobila je $\frac{s}{x-1}$.
Krenuvši iz mjesta A, autobus je za 1 sat i 12 minuta (što je $\frac{6}{5}$ sata) prešao $\frac{6}{5} \cdot \frac{s}{x}$ km puta.
Krenuvši iz mjesta B, automobil je za 1 sat i 12 minuta prešao $\frac{6}{5} \cdot \frac{s}{x-1}$ km puta.
Tada je

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{s}{x}+\frac{6}{5} \cdot \frac{s}{x-1}=s$$

odnosno

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{5}{6} .$$

Sređivanjem dobit ćemo jednadžbu $5x^2-17x+6=0$ čija su rješenja 3 i $\frac{2}{5}$.
Kako x mora biti veći od 1, zaključujemo da je vrijeme potrebno da autobus prijeđe put od mjesta B do A (ili obratno) 3 sata.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Odredite sve četveroznamenkaste prirodne brojeve djeljive s 45 kojima je razlika kvadrata znamenke stotica i znamenke desetica jednaka 24.

Rješenje. Neka je traženi broj $\overline{abcd}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}&\overline{abcd} = 45 \cdot x,\\ &b^2 - c^2 = 24.\end{aligned}$$

Kako umnožak $45 \cdot x$ završava znamenkom 0 ili 5, broj $\overline{abcd}$ je oblika $\overline{abc0}$ ili $\overline{abc5}$.

Iz $b^2 - c^2 = 24$ slijedi $(b-c)(b+c) = 24$ i $b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $b < c$.

Kako je $b + c < 18$, možemo broj 24 zapisati u obliku umnoška brojeva:

$$2 \cdot 12, \quad 3 \cdot 8 \quad \text{i} \quad 4 \cdot 6.$$

Tada je

(a)

$$(b-c)(b+c) = 2 \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b - c = 2 \\ b + c = 12 \end{cases}$$

odnosno $b = 7$, $c = 5$,

(b)

$$(b-c)(b+c) = 3 \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b - c = 3 \\ b + c = 8 \end{cases}$$

pa $b, c \notin \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$,

(c)

$$(b-c)(b+c) = 4 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b - c = 4 \\ b + c = 6 \end{cases}$$

odnosno $b = 5$, $c = 1$.

Mogući oblici brojeva $\overline{abcd}$ sada su $\overline{a750}$, $\overline{a510}$, $\overline{a755}$ ili $\overline{a515}$.

Svaki od tih brojeva djeljiv je s 5, a da bi bio djeljiv s 45 mora još biti djeljiv i s 9. Zbroj znamenaka svakog od brojeva mora biti djeljiv s 9.

Za $\overline{a750}$ zbroj znamenaka je $a + 7 + 5 + 0 = a + 12$, što uz $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ daje $a = 6$.

Za $\overline{a510}$ zbroj znamenaka je $a + 5 + 1 + 0 = a + 6$ pa je $a = 3$.

Za $\overline{a755}$ zbroj znamenaka je $a+7+5+5=a+17$ pa je $a=1$.

Za $\overline{a515}$ zbroj znamenaka je $a+5+1+5=a+11$ pa je $a=7$.

Dakle, traženi brojevi su 6750, 3510, 1755 i 7515.

Zadatak B-3.2. Riješite nejednadžbu

$$\cos(2010x+y) \geq y^4 - 2y^2 + 2.$$

Rješenje.

Desna strana dane nejednakosti je funkcija $f(y) = y^4 - 2y^2 + 2$. Zapišimo f u sljedećem obliku:

$$f(y) = \left(y^2-1\right)^2 + 1.$$

Tada je $f(y) \geq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

S druge strane je $\cos(2010x+y) \leq 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Zaključujemo da dana nejednadžba može imati rješenje jedino ako je $\left(y^2-1\right)^2 + 1 = 1$ i ako je $\cos(2010x+y) = 1$.

Iz prve jednakosti dobivamo da je $y = \pm 1$.

Iz $\cos(2010x+y) = 1$ dobivamo $2010x + y = 2k\pi$.

Tada je za $y = \pm 1$, $x = \mp\frac{1}{2010} + \frac{k\pi}{1005}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak B-3.3. Matko i njegovi prijatelji, igrajući se uz obalu mora, kod jedne palme (udaljene od mora 20–ak metara) iskopali su kutijicu u kojoj je bio pažljivo umotan papirus. Odmotali su papirus na kojem je pisalo: "Palma kod koje stojiš je ishodište koordinatnog sustava kojemu je os apscisa paralelna s obalom mora. Kreni od palme, tako da ti je more iza leđa, 5 jedinica po pravcu koeficijenta smjera $\frac{4}{3}$. Doći ćeš u točku A. Iz točke A okomito na prethodni pravac stižeš do točke B koja pripada pravcu $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$. Točka C je na pravcu $x - 2y - 10 = 0$ i vrijedi da je zbroj udaljenosti od nje do točaka A i B najmanji moguć. U težištu trokuta ABC zakopano je blago."

Nađite koordinate točke u kojoj je zakopano blago.

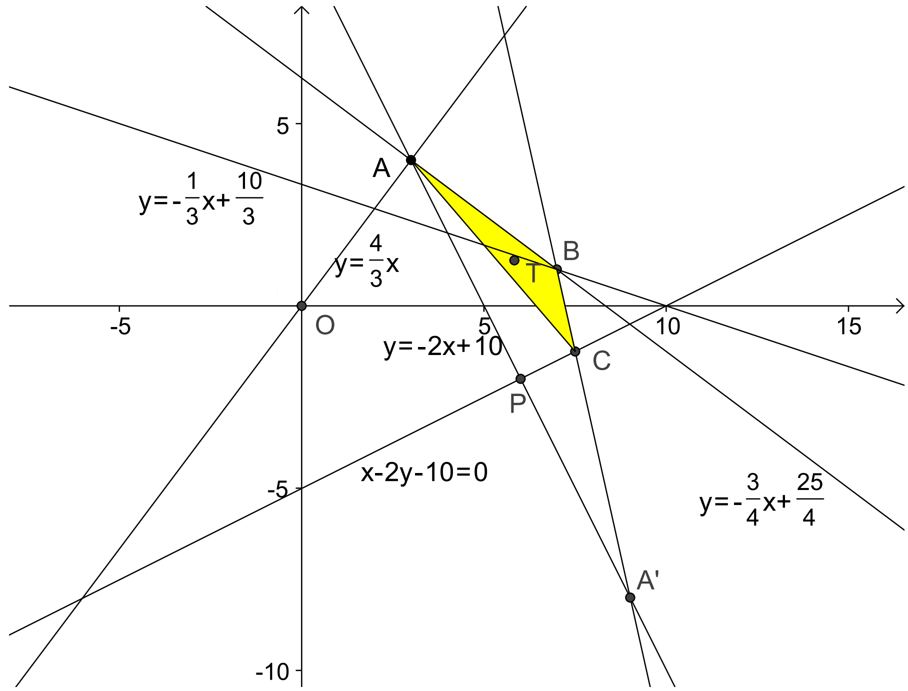
Rješenje.

Točka A je očito $(3,4)$ jer je $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Pravac okomit na $y = \frac{4}{3}x$ ima koeficijent smjera $-\frac{3}{4}$ i prolazi točkom A, pa ima jednadžbu $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Točka B je presjek tog pravca i pravca $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$, odnosno $B(7,1)$.

Ako $|AC| + |BC|$ mora biti minimalno, prvo ćemo odrediti točku A' koja je simetrična točki A s obzirom na pravac $p \ldots x - 2y - 10 = 0$.



Jednadžba pravca okomitog na p s koeficijentom smjera -2, kroz točku A, je $y=-2x+10$. Presjek dobivenog pravca i pravca p je točka $P(6,-2)$, polovište dužine AA'.

Vrijedi

$$6=\frac{3+x'}{2},\quad x'=9$$
$$-2=\frac{4+y'}{2},\quad y'=-8$$

Dakle, $A'(9,-8)$.

Pravac kroz točke B i A' je $y=-\frac{9}{2}x+\frac{65}{2}$ i siječe pravac p u točki $C\left(\frac{15}{2},-\frac{5}{4}\right)$ za koju vrijedi zadani uvjet, jer točke B, C i A' leže na istom pravcu i vrijedi $|AC|=|A'C|$.

(Ako učenik traži simetričnu točku točki B, onda je $P(8,-1)$, $B'(9,-3)$, pravac $AB'\ldots y=-\frac{7}{6}x+\frac{45}{6}$)

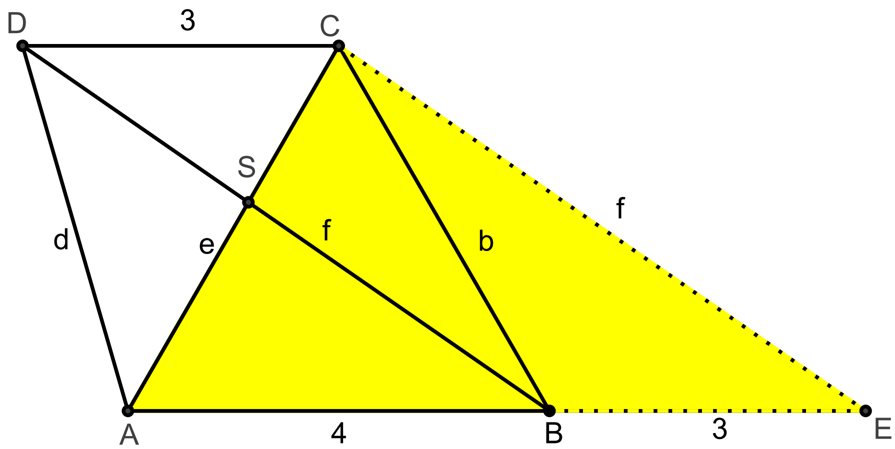
Koordinate težišta trokuta su

$$x=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{35}{6},\quad y=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{5}{4}.$$

Tada je blago u točki $T\left(\frac{35}{6},\frac{5}{4}\right)$.

Zadatak B-3.4. U trapezu $ABCD$ s okomitim dijagonalama poznate su duljine osnovica $|AB| = a = 4$, $|DC| = c = 3$. Ako krak $\overline{BC}$ s osnovicom a zatvara kut $60°$, kolika je njegova duljina?

Prvo rješenje.



Povučemo li paralelu s dijagonalom BD kroz vrh C i točku presjeka usporednice i produžetka stranice AB označimo s E, dobit ćemo pravokutan trokut AEC čija je hipotenuza duljine $a+c$, a katete su dijagonale AC i BD ($|EC| = |BD|$). Tada je po Pitagorinom poučku $|AC|^2 + |BD|^2 = (a+c)^2$ odnosno $e^2 + f^2 = 49$.

Dijagonale ćemo računati primjenom kosinusovog poučka na trokute ABC i BCD. Tada je

$$4^2 + b^2 - 2 \cdot 4 \cdot b \cos 60° + 3^2 + b^2 - 2 \cdot 3 \cdot b \cos 120° = 49$$

što daje kvadratnu jednadžbu

$$2b^2 - b - 24 = 0$$

čije je pozitivno rješenje $b = \dfrac{1+\sqrt{193}}{4}$.

Drugo rješenje.

Zadatak možemo riješiti i vektorski, primjenom skalarnog umnoška.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

Kako su vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$ okomiti, njihov je skalarni umnožak nula.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$$
$$|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos 120° + |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{c}| \cdot \cos 180° + |\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos 0° + |\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{c}| \cdot \cos 60° = 0$$
$$4b \cdot (-0.5) + 4 \cdot 3 \cdot (-1) + b^2 + 3b \cdot (0.5) = 0$$
$$2b^2 - b - 24 = 0.$$

Dakle, $b = \dfrac{1+\sqrt{193}}{4}$.

Zadatak B-3.5. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da je

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2.$$

Dokažite da je $ABCD$ paralelogram.

Prvo rješenje. Zadatak rješavamo koristeći vektore. Dana jednakost ekvivalentna je sljedećoj

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2, \text{ tj.}$$
$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2.$$

Odavde redom dobivamo:

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{BC}^2$$
$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right)^2 - \overrightarrow{BC}^2$$
$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{DC}|^2 + |\overrightarrow{BA}|^2 + 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$$

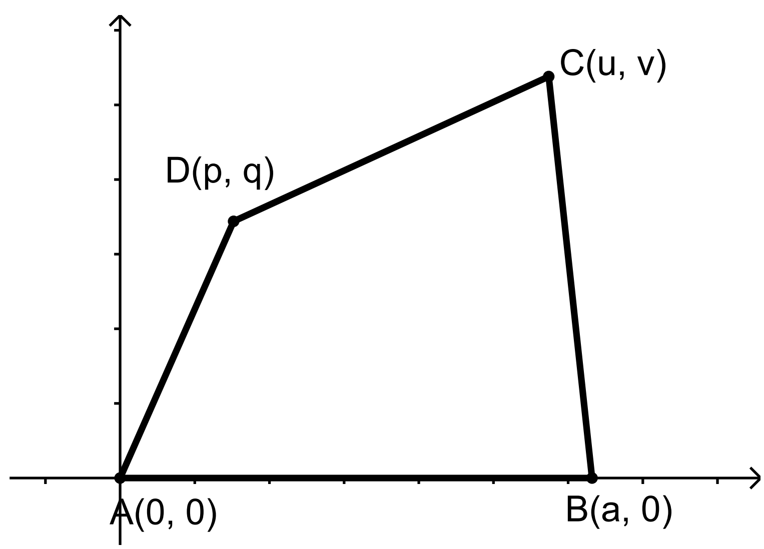
Slijedi

$$0 = |DC|^2 + |BA|^2 + 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA},$$

odnosno $\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}\right)^2 = 0$, odakle je $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Time smo dokazali da je $ABCD$ paralelogram.

Drugo rješenje.



Smjestimo četverokut u koordinatni sustav tako da je $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(u,v)$, $D(p,q)$. Izračunat ćemo kvadrate udaljenosti:

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$$
$$u^2 + v^2 + (p-a)^2 + q^2 = a^2 + (u-a)^2 + v^2 + (p-u)^2 + (q-v)^2 + p^2 + q^2.$$

Nakon provedenog kvadriranja dobivamo:

$$\begin{aligned}
&a^2+p^2+q^2+u^2+v^2-2ua+2pa-2pu-2vq=0\\
&(q^2-2vq+v^2)+(a^2+p^2+u^2+2ap-2au-2pu)=0\\
&(q-v)^2+[a-(u-p)]^2=0
\end{aligned}$$

Ovo je moguće jedino ako je $q=v$, $a=u-p$. (*)

Sada je $A(0,0)$, $B(u-p,0)$, $C(u,v)$ i $D(p,v)$.

Izračunajmo koordinate polovišta dužine $\overline{AC}$ i polovišta dužine $\overline{BD}$.

$$P_{AC}=\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right),\quad P_{BD}=\left(\frac{u-p+p}{2},\frac{v}{2}\right)=\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right).$$

Kako se polovišta podudaraju, dijagonale danog četverokuta se raspolavljaju pa je četverokut paralelogram.

Da je dani četverokut paralelogram, može se zaključiti iz (*) i tako da se uoči:

udaljenost $|AB|=|CD|=a$ te $|AD|=|BC|$, a pravci AB i CD su paralelni (koeficijent smjera je 0), kao i pravci AD i BC (koeficijent smjera je $\frac{v}{p}$).

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Neka su a i b prirodni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $\log_b a$, $\log_{2b} 2a$ i $\log_{4b} 4a$ (u tom poretku) uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokažite da su brojevi a i b jednaki.

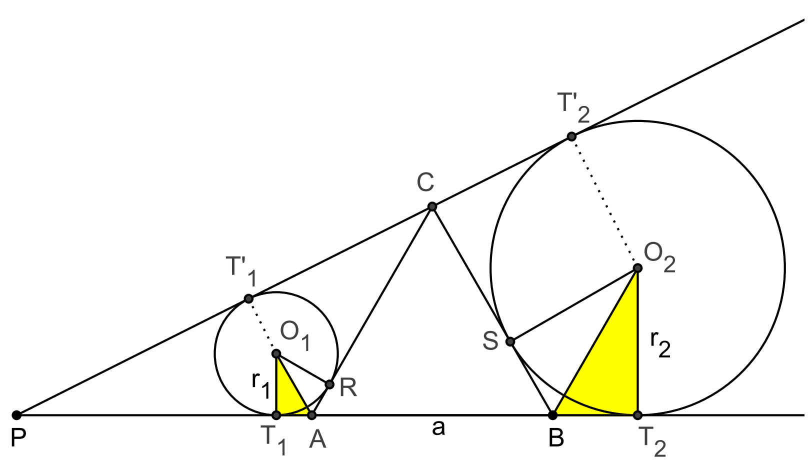
Rješenje. Srednji član aritmetičkog niza je aritmetička sredina susjednih, tj.

$$2 \cdot \log_{2b} 2a = \log_b a + \log_{4b} 4a$$
$$2 \cdot \frac{\log_2 2a}{\log_2 2b} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{\log_2 4a}{\log_2 4b}$$
$$2 \cdot \frac{1 + \log_2 a}{1 + \log_2 b} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} + \frac{2 + \log_2 a}{2 + \log_2 b}$$

Zamjenom $x = \log_2 a$ i $y = \log_2 b$ i množenjem sa zajedničkim nazivnikom dobit ćemo $x = y$ pa je i $a = b$.

Zadatak B-4.2. Neka je ABC jednakostraničan trokut. Na pravcu AB odabrana je točka P tako da točka A leži između točke P i točke B. Neka je a duljina stranice trokuta ABC, r_1 polumjer upisane kružnice trokutu PAC i r_2 polumjer kružnice pripisane trokutu PBC u odnosu na stranicu BC. Odredite zbroj $r_1 + r_2$ kao funkciju od a.

Rješenje.



$\angle T_1O_1R = 60^\circ$ (suplement kuta $\angle T_1AR = 120^\circ$)
$\angle AO_1T_1 = 30^\circ$

$$|T_1T_2| = |T_1A| + |AB| + |BT_2| \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|T_1A|}{r_1}, \quad |T_1A| = r_1 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r_1}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

Analogno, $\angle BO_2T_2 = 30^\circ$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|BT_2|}{r_2}, \quad |BT_2| = r_2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r_2}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

Uvrstimo (2) i (3) u (1).

$$|T_1T_2| = \frac{r_1}{\sqrt{3}} + a + \frac{r_2}{\sqrt{3}} = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} + a.$$

$$\begin{aligned}
&|T_1'T_2'| = |T_1'C| + |CT_2'| = |CR| + |CS| = (a - |RA|) + (a - |BS|)\\
&|AR| = |T_1A| \quad \text{i} \quad |BS| = |BT_2|\\
&|T_1'T_2'| = 2a - \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Kako je $|T_1T_2| = |T_1'T_2'|$, imamo:

$$\begin{aligned}
&2a - \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} = \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} + a\\
&2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} = a\\
&r_1 + r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak B-4.3.

Koliko ima jednakokračnih trapeza, s osnovicama različitih duljina, kojima su duljine stranica cjelobrojne, a opseg im je 2010?

Rješenje. Neka su a i c $(a > c)$ osnovice trapeza, a b je krak trapeza. Tada iz nejednakosti trokuta zaključujemo da je

$$a < 2b + c \ .$$

Ako na obje strane dodamo a, dobivamo

$$2a < a + 2b + c = 2010 \quad \text{ili} \quad a < \frac{2010}{2} = 1005 \ .$$

Dakle $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 1004\}$.
Ako je $a = 1004$, $c < a$, onda je

$$b = \frac{2010 - a - c}{2} = \frac{1006 - c}{2} \ .$$

Zaključujemo da je c paran broj manji od 1003, odnosno $c \in \{2, 4, 6, \ldots, 1002\}$, a takvih je 501.
Ako je $a = 1003$, $c < a$, onda je

$$b = \frac{2010 - a - c}{2} = \frac{1007 - c}{2} \ .$$

Zaključujemo da je c neparan broj manji od 1004, odnosno $c \in \{1, 3, 5, \ldots, 1001\}$, a takvih je 501.
Ako je $a = 1002$, $c < a$, onda je

$$b = \frac{2010 - a - c}{2} = \frac{1008 - c}{2} \ .$$

Zaključujemo da je c paran broj manji od 1002, odnosno $c \in \{2, 4, 6, \ldots, 1000\}$, a takvih je 500.
Analogno za $a = 1001$ dobivamo novih 500 trapeza, te istim postupkom nastavljamo sve do $a = 4$, $a = 3$ za koje postoji samo jedan traženi trapez. a ne može biti 1 ili 2.
Ukupan broj svih trapeza s danim svojstvom je

$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + 501) = 2 \cdot \frac{501 \cdot (1 + 501)}{2} = 251502 \ .$$

Zadatak B-4.4.

Neka je kompleksan broj $z = (a + \cos\theta) + \left(\sqrt{3}\,a - \sin\theta\right) i$. Odredite za koje realne brojeve a je $|z| \leq 3$, za sve $\theta \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

$$|z|^2 = (a + \cos\theta)^2 + \left(\sqrt{3}\,a - \sin\theta\right)^2.$$

Nako sređivanja dobivamo

$$|z|^2 = 4a^2 + 1 + 2a\left(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right) = 4a^2 + 1 + 4a\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right),$$

odnosno

$$|z|^2 = 4a^2 + 1 + 4a\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right).$$

Iz uvjeta $|z| \leq 3$ slijedi

$$4a^2 + 1 + 4a\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \leq 9,$$

odnosno

$$a\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \leq 2 - a^2.$$

Jedna mogućnost je $a = 0$. (1)

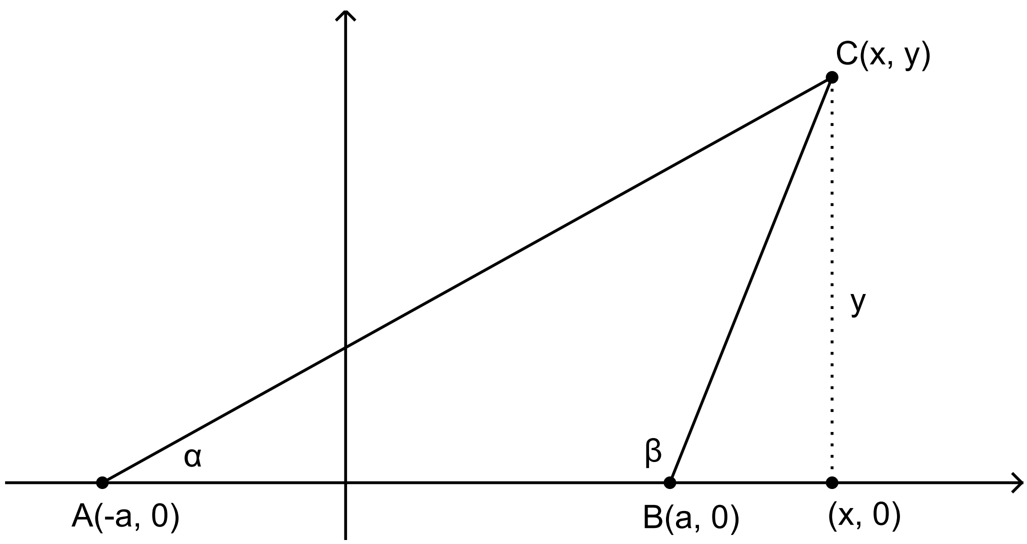
Za $a > 0$ vrijedi $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \leq \frac{2 - a^2}{a}$. To će vrijediti za sve $\theta \in \mathbb{R}$ ako je $\frac{2 - a^2}{a} \geq -1$, odnosno ako je $a^2 - a - 2 \leq 0$. Zaključujemo $a \in \langle 0, 2]$. (2)

Za $a < 0$ vrijedi $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \geq \frac{2 - a^2}{a}$. To će vrijediti za sve $\theta \in \mathbb{R}$ ako je $\frac{2 - a^2}{a} \leq 1$, odnosno ako je $a^2 + a - 2 \leq 0$. Zaključujemo $a \in [-2, 0\rangle$. (3)

Iz (1), (2) i (3) slijedi $a \in [-2, 2]$.

Zadatak B-4.5. U trokutu ABC dana je duljina osnovice $|AB| = 2a$. Dokažite da vrh C, za svaki izbor kutova α, β (na osnovici) takvih da je $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -9$, leži na istoj hiperboli. Odredite njezinu veliku i malu poluos.

Rješenje. Smjestimo trokut ABC u koordinatni sustav kao što je prikazano na slici.



Trokut je tupokutan jer je umnožak tangensa dva njegova kuta negativan. Pretpostavimo da je kut β tupi kut.

Tada je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x+a}$, a $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\dfrac{y}{x-a}$.

Iz $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -9$ slijedi

$$\frac{y}{x+a} \cdot \frac{-y}{x-a} = -9,$$

a odavde dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9a^2} = 1,$$

odnosno jednadžbu hiperbole.

Velika poluos je a, a mala poluos je $3a$.