Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

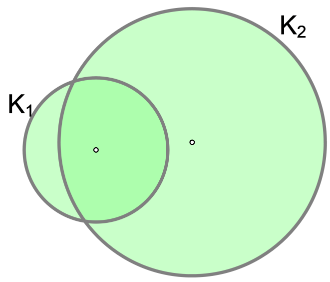
ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

1. Ako je $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{3}{2}$ i $\dfrac{c}{b-c}=\dfrac{4}{5}$, koliko je $\dfrac{c-a}{c}$?

2. Dva se kruga K_1 i K_2, osjenčana bojom, sijeku tako da se izvan njihova presjeka nalazi 10% površine kruga K_1 i 60% površine kruga K_2. Izračunajte omjer polumjera krugova K_1 i K_2. Koliko iznosi zbroj tih polumjera, ako je ukupna osjenčana površina jednaka 94π ?



3. Izračunajte

$$\frac{2020^2-2019^2+2018^2-2017^2+2016^2-2015^2+\cdots+2^2-1^2}{1010}.$$

4. Skratite sljedeći razlomak do razlomka koji se više ne može skratiti

$$\frac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}.$$

5. Zlatar ima dvije slitine srebra i zlata. U prvoj je slitini omjer srebra i zlata $4:5$, a u drugoj $2:5$. U kojem omjeru treba pomiješati te dvije slitine da bi omjer srebra i zlata u novoj slitini bio $7:11$?

* * *

6. Odredite sve prirodne brojeve x, y i z takve da je $x<y<z$, za koje vrijedi

$$xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1=2020.$$

7. Duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC iznosi a. Točka E nalazi se na stranici $\overline{AB}$ i udaljena je od vrha B za $\dfrac{1}{3}a$. Trokut $A'B'C'$ je osnosimetrična slika trokuta ABC u odnosu na pravac koji prolazi točkom E okomito na stranicu $\overline{AB}$. Ako je opseg nastalog lika (unije trokuta ABC i trokuta $A'B'C'$) $12\,\text{cm}$, kolika mu je površina?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

1. Riješite jednadžbu $\sqrt{3-\frac{1}{2020x}}=1-\frac{1}{2020x}$.

2. Odredite sve realne brojeve m tako da za rješenja x_1, x_2 jednadžbe $x^2+m-3x=mx-2$ vrijedi $\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}<1$.

3. Maksimalna vrijednost funkcije $f(x)=-3x^2-2(k-5)x+k-9$ jednaka je minimalnoj vrijednosti funkcije $g(x)=x^2-2(k-1)x+k+7$. Odredite sve takve funkcije f i g.

4. Središta dviju kružnica udaljena su $44\,\mathrm{cm}$. Ako su polumjeri tih kružnica $15\,\mathrm{cm}$ i $37\,\mathrm{cm}$, kolika je duljina njihove zajedničke tetive?

5. Na koliko se načina iz skupa $\{1,2,3,\ldots,12\}$ mogu odabrati tri broja čiji je zbroj djeljiv s 3 ?

$*\quad *\quad *$

6. Tijekom skraćivanja razlomka $\frac{\overline{200\ldots0x}}{\overline{300\ldots0y}}$ $(x,y\neq 0)$ u kojem između 2 i x te između 3 i y ima po 2020 nula, Matko je zanemario nule i napisao $\frac{\overline{200\ldots0x}}{\overline{300\ldots0y}}=\frac{\overline{2x}}{\overline{3y}}$ te dobio točan rezultat. Odredite sve vrijednosti znamenaka x i y za koje je opisanim skraćivanjem Matko mogao dobiti točan rezultat.

7. Unutar kvadrata $ABCD$ nalaze se točke E, F, G i H takve da su trokuti ABE, BCF, CDG i DAH jednakostranični. U kojem su omjeru površina kvadrata $ABCD$ i površina četverokuta $EFGH$?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

1. Riješite nejednadžbu $1 - 27^x \leqslant 6 \cdot 9^{3x}$.

2. Ako je $\log_2 3 = a$ i $\log_7 2 = b$, koliko je $\log_6 28$?

3. Ako je $f(x) = 4\sin^2 \frac{3x}{2} - 4\cos^2 \frac{3x}{2}$, odredite $f\left(\frac{2020\pi}{9} + 2021k\pi\right)$ u ovisnosti o cijelom broju k.

4. Koliko rješenja na intervalu $[0, 2020\pi]$ ima jednadžba $\frac{1}{2}\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$?

5. U skupu cijelih brojeva riješite jednadžbu $a^2 + b^2 + 50 = 8a + 12b$.

* * *

6. Jedna je kateta pravokutnog trokuta ABC dvostruko dulja od druge. Trokut $A'B'C$ nastaje rotacijom trokuta ABC oko vrha pravog kuta C za $30°$. Točke A, A', B, B' i C vrhovi su konveksnog peterokuta čija je površina $20 + 8\sqrt{3}$. Izračunajte duljine kateta trokuta ABC.

7. Za koje vrijednosti realnog broja t jednadžba

$$x^2 + \frac{1}{\sqrt{\cos t}}\, 2x + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2}$$

ima točno jedno rješenje?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

1. Odredite koordinate sjecišta krivulja zadanih jednadžbama $x^2 + 2y^2 = 2$ i $2x^2 + y^2 = 2$, te površinu konveksnog mnogokuta čiji su vrhovi te točke.

2. Učenici su u parovima pisali objave za Instagram kojima pozivaju na "Večer matematike". Par koji zajedno sakupi najviše lajkova očekuje nagrada. Maja je sakupila 3731, Matko 2754, ali tvrde da zajedno imaju 6705, zbog čega ostali parovi sumnjaju na prevaru.

Ako dopustimo mogućnost da brojevi nisu zapisani u dekadskom sustavu, mogu li Maja i Matko biti u pravu? Obrazložite.

3. Zadan je kompleksan broj $z = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$. Izračunajte $\sqrt[3]{z^{2020}}$.

4. U razvoju binoma $(a+b)^n$ treći je član jednak $\frac{56}{9}$, četvrti član je $\frac{70}{3}$, a binomni koeficijenti trećeg i šestog člana su jednaki. Odredite brojeve a, b i n.

5. Na satu hrvatskog jezika djeca su se nadmetala u slaganju riječi od pet slova. Pri tome su mogli koristiti samo slova riječi SNIJEG (jedno su slovo mogli koristiti i više puta). Jedini je uvjet bio da u svakoj riječi moraju upotrijebiti slovo E i to točno dva puta. Koliko je najviše različitih riječi (ne nužno smislenih) mogao netko složiti?

$$* \quad * \quad *$$

6. Odredite sve prirodne brojeve x za koje vrijedi jednakost

$$3 \cdot \binom{2x^2 - 10x + 16}{x^2 - 5x + 9} = 2 \cdot \binom{2x^2 - 10x + 17}{x^2 - 5x + 7}.$$

7. Leda i Una se igraju plastelinom u obliku valjka kojemu je visina 6 puta veća od promjera baze. Leda je uzela dio tog plastelina i napravila veću, a Una je od ostatka napravila manju kuglicu. Koliko je puta obujam Ledine kuglice veći od obujma Unine kuglice, ako je zbroj njihovih polumjera 3 puta veći od polumjera baze valjka?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.