ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Ako je $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{3}{2}$ i $\dfrac{c}{b-c}=\dfrac{4}{5}$, koliko je $\dfrac{c-a}{c}$?

Prvo rješenje.

Iz $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{3}{2}$ slijedi $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$. 1 bod

Iz $\dfrac{c}{b-c}=\dfrac{4}{5}$ slijedi $\dfrac{b-c}{c}=\dfrac{b}{c}-1=\dfrac{5}{4}$ pa je $\dfrac{b}{c}=\dfrac{9}{4}$. 2 boda

Vrijedi $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{8}$. 1 bod

Sada je $\dfrac{c-a}{c}=1-\dfrac{a}{c}=1-\dfrac{9}{8}=-\dfrac{1}{8}$. 2 boda

Drugo rješenje.

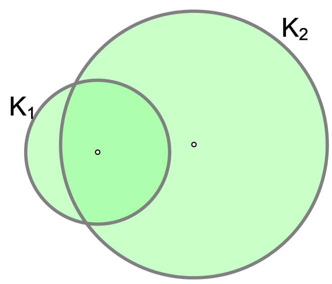
Iz $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{3}{2}$ slijedi $2a+2b=3b$, odnosno $2a=b$. 1 bod

Iz $\dfrac{c}{b-c}=\dfrac{4}{5}$ slijedi $5c=4b-4c$, odnosno $9c=4b$. 2 boda

Iz $9c=4b$ i $2a=b$ slijedi $9c=8a$. 1 bod

Sada je $\dfrac{c-a}{c}=\dfrac{9c-9a}{9c}=\dfrac{8a-9a}{8a}=\dfrac{-a}{8a}=-\dfrac{1}{8}$. 2 boda

Zadatak B-1.2.



Dva se kruga K_1 i K_2, osjenčana bojom, sijeku tako da se izvan njihova presjeka nalazi 10% površine kruga K_1 i 60% površine kruga K_2. Izračunajte omjer polumjera krugova K_1 i K_2. Koliko iznosi zbroj tih polumjera, ako je ukupna osjenčana površina jednaka 94π ?

Rješenje.

Ako se 10% površine kruga K_1 nalazi izvan zajedničkoga presjeka, tada je površina presjeka jednaka 90% površine kruga K_1.

Ako se 60% površine kruga K_2 nalazi izvan zajedničkoga presjeka, tada je površina presjeka jednaka 40% površine kruga K_2. 1 bod

Označimo li s R_1 polumjer kruga K_1, s R_2 polumjer kruga K_2, dobivamo

$$\frac{90}{100}\,R_1^2\pi = \frac{40}{100}\,R_2^2\pi,$$ 1 bod

odnosno $\dfrac{R_1^2}{R_2^2} = \dfrac{4}{9}$ i konačno $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{2}{3}$. 1 bod

Ukupnu osjenčanu površinu računamo kao $P(K_1) + 60\%P(K_2)$ ili $P(K_2) + 10\%P(K_1)$ ili $P(K_1) + P(K_1) - P(K_1 \cap K_2)$.

Tako dobivamo

$$P(K_1) + P(K_1) - P(K_1 \cap K_2) = R_1^2\pi + R_2^2\pi - 0,90R_1^2\pi = 94\pi.$$ 1 bod

Slijedi $R_1^2 + R_2^2 - 0,90R_1^2 = 94$, odnosno zbog $R_2^2 = \dfrac{9}{4}\,R_1^2$,

$R_1^2 + \dfrac{9}{4}\,R_1^2 - 0,90R_1^2 = 94$,

$\dfrac{94}{40}\,R_1^2 = 94$, te je $R_1^2 = 40$. 1 bod

Odavde dobivamo $R_1 = 2\sqrt{10}$, $R_2 = 3\sqrt{10}$

i konačno $R_1 + R_2 = 5\sqrt{10}$. 1 bod

Napomena: Omjer polumjera može se izračunati i na sljedeći način.

Ako je 10% površine kruga K_1 i 60% površine kruga K_2 izvan zajedničkog presjeka, tada zajednički presjek zauzima 30% ukupne površine $K_1 \cup K_2$.

Sada je

$$\frac{P(K_1)}{P(K_2)} = \frac{(10\% + 30\%)P(K_1 \cup K_2)}{(60\% + 30\%)P(K_1 \cup K_2)} = \frac{40\%}{90\%} = \frac{4}{9}.$$

Slijedi $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{2}{3}$ (jer se kvadrati polumjera odnose kao i površine).

Ovaj dio vrijedi 3 boda. Dalje kao u gore navedenom rješenju.

Zadatak B-1.3.

Izračunajte

$$\frac{2020^2 - 2019^2 + 2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - 2015^2 + \cdots + 2^2 - 1^2}{1010}.$$

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
&\frac{2020^2-2019^2+2018^2-2017^2+\cdots+2^2-1^2}{1010}\\
&=\frac{(2020-2019)(2020+2019)+(2018-2017)(2018+2017)+\cdots+(2-1)(2+1)}{1010} && \text{2 boda}\\
&=\frac{1\cdot(2020+2019)+1\cdot(2018+2017)+\cdots+1\cdot(2+1)}{1010}\\
&=\frac{2020+2019+2018+2017+\cdots+2+1}{1010} && \text{1 bod}\\
&=\frac{(2020+1)+(2019+2)+(2018+3)+\cdots+(1011+1010)}{1010} && \text{1 bod}\\
&=\frac{1010\cdot 2021}{1010}=2021 && \text{2 boda}
\end{aligned}
$$

Napomena: Ako učenik riješi zadatak koristeći formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva treba dobiti sve bodove.

Zadatak B-1.4.

Skratite sljedeći razlomak do razlomka koji se više ne može skratiti

$$\frac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}.$$

Rješenje.

Rastavimo brojnik i nazivnik danog algebarskog razlomka na faktore.

$$x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4) \qquad \text{2 boda}$$

$$
\begin{aligned}
x^4-4x^3+8x^2-16x+16&=(x^4-4x^3+4x^2)+(4x^2-16x+16)\\
&=x^2(x-2)^2+4(x-2)^2 && \text{2 boda}\\
&=(x^2+4)(x-2)^2 && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

Zato je

$$\frac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}=\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x^2+4)(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-1.5.

Zlatar ima dvije slitine srebra i zlata. U prvoj je slitini omjer srebra i zlata 4 : 5, a u drugoj 2 : 5. U kojem omjeru treba pomiješati te dvije slitine da bi omjer srebra i zlata u novoj slitini bio 7 : 11 ?

Rješenje.

Označimo sa x količinu prve slitine i y količinu druge slitine. Količina srebra u novoj slitini je $\frac{4}{9}x + \frac{2}{7}y$, a količina zlata u novoj slitini $\frac{5}{9}x + \frac{5}{7}y$. 2 boda

Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$\left(\frac{4}{9}x + \frac{2}{7}y\right) : \left(\frac{5}{9}x + \frac{5}{7}y\right) = 7 : 11. \quad \text{1 bod}$$

Riješimo dobivenu jednadžbu:

$$\frac{28x + 18y}{63} : \frac{35x + 45y}{63} = 7 : 11$$

$$11(28x + 18y) = 7(35x + 45y) \quad \text{1 bod}$$

$$308x + 198y = 245x + 315y, \quad 63x = 117y$$

$$7x = 13y \quad \text{1 bod}$$

Traženi omjer je $x : y = 13 : 7$. 1 bod

Napomena: Umjesto postavljene jednadžbe možemo zapisati uvjet za količinu srebra $\frac{4}{9}x + \frac{2}{7}y = \frac{7}{18}(x + y)$ odnosno zlata $\frac{5}{9}x + \frac{5}{7}y = \frac{11}{18}(x + y)$.
Postavljanje jednadžbe vrijedi 3 boda, a njeno rješavanje još 3 boda.

Zadatak B-1.6.

Odredite sve prirodne brojeve x, y i z takve da je $x < y < z$, za koje vrijedi

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2020.$$

Rješenje.

Rastavimo lijevu stranu jednadžbe na faktore.

$$\begin{aligned} xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 &= (xyz + xy) + (xz + x) + (yz + y) + (z + 1) \\ &= xy(z + 1) + x(z + 1) + y(z + 1) + (z + 1) \\ &= (xy + x + y + 1)(z + 1) && \text{2 boda} \\ &= (x(y + 1) + (y + 1))(z + 1) \\ &= (x + 1)(y + 1)(z + 1) && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Kako je $2020 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, 1 bod

i vrijedi $2 \leqslant x + 1 < y + 1 < z + 1$, dobivamo tri mogućnosti:

(i) $x + 1 = 2$, $y + 1 = 5$, $z + 1 = 202$

(ii) $x + 1 = 2$, $y + 1 = 10$, $z + 1 = 101$

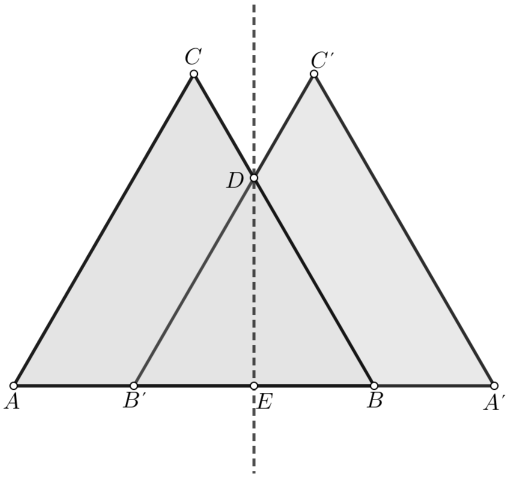
(iii) $x + 1 = 4$, $y + 1 = 5$, $z + 1 = 101$ 3 boda

odakle dobivamo tražena rješenja $(x, y, z) \in \{(1, 4, 201), (1, 9, 100), (3, 4, 100)\}$. 3 boda

Zadatak B-1.7.

Duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC iznosi a. Točka E nalazi se na stranici $\overline{AB}$ i udaljena je od vrha B za $\frac{1}{3}a$. Trokut $A'B'C'$ je osnosimetrična slika trokuta ABC u odnosu na pravac koji prolazi točkom E okomito na stranicu $\overline{AB}$. Ako je opseg nastalog lika (unije trokuta ABC i trokuta $A'B'C'$) $12\,\text{cm}$, kolika mu je površina?

Prvo rješenje.



Slika s jasno označenim vrhovima ili zaključkom da se zadanom osnom simetrijom dobije peterokut $AA'C'DC$ 2 boda

Trokut $B'BD$ je jednakostraničan trokut duljine stranice $\frac{2}{3}a$. 1 bod

$P(B'BD) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}a\right)^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4a^2\sqrt{3}}{9} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. 1 bod

$$\begin{aligned} P(AA'C'DC) &= P(ABC) + P(A'B'C') - P(B'BD) && \text{2 boda} \\ &= 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{9} = \frac{7\sqrt{3}}{18}\,a^2 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Opseg nastalog peterokuta je $3|AB| + 3|BA'| = 3a + 3\cdot\frac{a}{3} = 4a$, 1 bod

pa je $a = 3\,\text{cm}$. 1 bod

Tražena je površina $P(AA'C'DC) = \frac{7\cdot 9\sqrt{3}}{18} = \frac{7\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$. 1 bod

Drugo rješenje.

Slika s jasno označenim vrhovima ili zaključkom da se zadanom osnom simetrijom dobije peterokut $AA'C'DC$ 2 boda

Trokut CDC' je jednakostraničan trokut duljine stranice $\frac{a}{3}$. 1 bod

Površinu peterokuta $AA'C'DC$ dobijemo tako da od površine jednakokračnog trapeza $AA'C'C$ oduzmemo površinu jednakostraničnog trokuta CDC'. 1 bod

Vrijedi

$$P(AA'C'C) = \frac{|AA'| + |C'C|}{2} \cdot v = \frac{\frac{4}{3}\,a + \frac{1}{3}\,a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{12}, \qquad \text{1 bod}$$

$$P(CDC') = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{36}. \qquad \text{1 bod}$$

Tada je površina peterokuta

$$P(AA'C'DC) = \frac{5a^2\sqrt{3}}{12} - \frac{a^2\sqrt{3}}{36} = \frac{14a^2\sqrt{3}}{36} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{18}. \qquad \text{1 bod}$$

Opseg nastalog peterokuta je $3|AB| + 3|BA'| = 3a + a = 4a$, 1 bod

pa je $a = 3\,\text{cm}$. 1 bod

Tražena je površina jednaka $P(AA'C'DC) = \frac{7 \cdot 9\sqrt{3}}{18} = \frac{7\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Riješite jednadžbu $\sqrt{3-\frac{1}{2020x}}=1-\frac{1}{2020x}$.

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $t=\frac{1}{2020x}$, $x \neq 0$.

Tada jednadžba prelazi u $\sqrt{3-t}=1-t$,

uz uvjete $3-t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$ odnosno $t \leqslant 1$.

Nakon kvadriranja slijedi $3-t=1-2t+t^2$, odnosno $t^2-t-2=0$. 2 boda

Sada je $t=-1$ ili $t=2$. 1 bod

Zbog gornjeg je uvjeta jedino moguće rješenje $t=-1$. 1 bod

Slijedi $\frac{1}{2020x}=-1$ pa je $x=-\frac{1}{2020}$. 1 bod

Provjerimo rješenje uvrštavanjem u zadanu jednadžbu. Dobivamo

$$\sqrt{3-(-1)}=1-(-1)$$

što je točno, pa je to rješenje zadane jednadžbe. 1 bod

Napomena: Ako učenik nije napisao uvjete, ne treba mu oduzeti bodove ukoliko je vidljivo da je oba dobivena rješenja provjerio.

U slučaju da učenik nije napisao uvjete i nije provjerio dobivena rješenja koja su točna, oduzeti 2 boda.

Ako učenik ne koristi supstituciju, dobit će jednadžbu $2 \cdot 2020^2 x^2+2020x-1=0$.

Zadatak B-2.2.

Odredite sve realne brojeve m tako da za rješenja x_1, x_2 jednadžbe $x^2+m-3x=mx-2$ vrijedi $\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}<1$.

Rješenje.

Jednadžbu $x^2+m-3x=mx-2$ pišemo u obliku $x^2-(m+3)x+m+2=0$. Lijevu stranu dane nejednakosti možemo pisati kao

$$\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)+x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{2x_1x_2+x_1+x_2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}.$$ 1 bod

Prema Vieteovim formulama slijedi:

$$x_1+x_2=m+3, \qquad x_1x_2=m+2,$$ 1 bod

Sada iz $\dfrac{2x_1x_2+x_1+x_2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}<1$ slijedi

$$\frac{2(m+2)+(m+3)}{(m+2)+(m+3)+1}<1$$

$$\frac{3m+7}{2m+6}<1$$ 1 bod

$$\frac{m+1}{2m+6}<0.$$ 1 bod

Ova je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi $(m+1)(2m+6)<0$ čije je rješenje $m\in\langle -3,-1\rangle$. 2 boda

Zadatak B-2.3.

Maksimalna vrijednost funkcije $f(x)=-3x^2-2(k-5)x+k-9$ jednaka je minimalnoj vrijednosti funkcije $g(x)=x^2-2(k-1)x+k+7$. Odredite sve takve funkcije f i g.

Rješenje.

Minimalna ili maksimalna vrijednost kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ je $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

Zato je maksimalna vrijednost funkcije f

$$\frac{4\cdot(-3)\cdot(k-9)-4(k-5)^2}{4\cdot(-3)}=\frac{k^2-7k-2}{3},$$ 1 bod

a minimalna vrijednost funkcije g

$$\frac{4\cdot 1\cdot(k+7)-4(k-1)^2}{4}=-k^2+3k+6.$$ 1 bod

S obzirom da te vrijednosti moraju biti jednake, slijedi $\dfrac{k^2-7k-2}{3}=-k^2+3k+6$. 1 bod

Sređivanjem dobivamo $k^2-4k-5=0$

pa su rješenja $k=-1$ i $k=5$. 1 bod

Tražene funkcije su

$$f_1(x)=-3x^2+12x-10, \quad g_1(x)=x^2+4x+6,$$ 1 bod

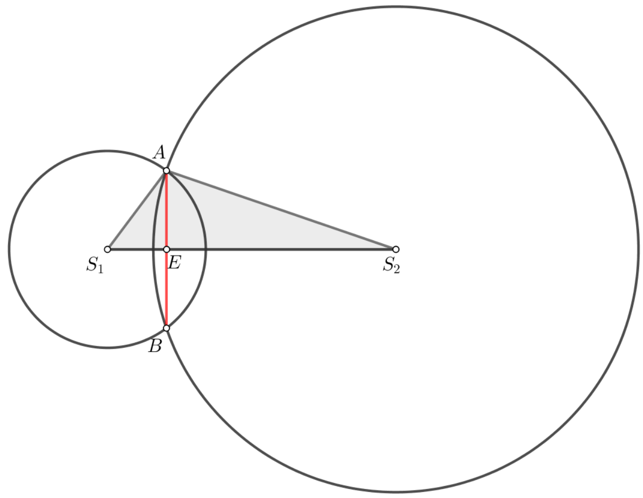
$$f_2(x)=-3x^2-4, \quad g_2(x)=x^2-8x+12.$$ 1 bod

Zadatak B-2.4.

Središta dviju kružnica udaljena su 44 cm. Ako su polumjeri tih kružnica 15 cm i 37 cm, kolika je duljina njihove zajedničke tetive?

Prvo rješenje.

Uvedimo oznake kao na slici.



Izračunajmo površinu trokuta AS_1S_2 po Heronovoj formuli. Za $a = |SS_1| = 44\,\text{cm}$, $b = |S_2A| = 37\,\text{cm}$, $c = |S_1A| = 15\,\text{cm}$, dobivamo $s = \frac{1}{2}(15 + 37 + 44) = 48\,\text{cm}$,

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{48 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 33} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11 = 264\,\text{cm}^2.$$ 2 boda

S druge strane, površina trokuta AS_1S_2 je $P = \frac{1}{2} \cdot |S_1S_2| \cdot |AE|$. 2 boda

Sada iz $264 = \dfrac{1}{2} \cdot 44 \cdot |AE|$ slijedi $|AE| = 12\,\text{cm}$. 1 bod

Duljina zajedničke tetive tih dviju kružnica iznosi $|AB| = 2|AE| = 24\,\text{cm}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $|AE| = v$ i $|S_1E| = x$. Tada je $|S_2E| = 44 - x$. 1 bod

Primijenimo Pitagorin poučak na trokute AES_1 i AES_2

$$x^2 + v^2 = 15^2,$$ 1 bod

$$v^2 + (44 - x)^2 = 37^2$$ 1 bod

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo $88x - 44^2 = 15^2 - 37^2$, 1 bod

odakle dobivamo $x = 9$. 1 bod

Konačno, iz $x^2 + v^2 = 15^2$ slijedi $v = 12$,

a tražena duljina tetive iznosi $|AB| = 2v = 24\,\text{cm}$. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Na koliko se načina iz skupa $\{1,2,3,\ldots,12\}$ mogu odabrati tri broja čiji je zbroj djeljiv s 3 ?

Rješenje.

Neka su to brojevi x, y, z. Njihov je zbroj djeljiv s 3 ako sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 ili ako sva tri broja daju različite ostatke pri dijeljenju s 3. 2 boda

U danom skupu su četiri broja koja daju ostatak 0, četiri broja koja daju ostatak 1 i četiri broja koja daju ostatak 2 pri dijeljenju s 3.

Od četiri broja koja daju ostatak 0 njih tri možemo odabrati na 4 načina (na 4 načina možemo odabrati jedan broj koji ne želimo). Analogno i za ostale ostatke.

To znači da 3 broja, koja daju isti (ali ne unaprijed određeni) ostatak pri dijeljenju s 3 možemo odabrati na $3 \cdot 4 = 12$ načina. 2 boda

Tri broja koji daju različite ostatke pri dijeljenju s 3 možemo odabrati na ukupno $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ načina. 1 bod

Ukupno je traženih odabira $64 + 12 = 76$. 1 bod

Napomena: Ako je učenik ispisivanjem dobio točan rezultat treba dobiti sve bodove.

Ako je ispisao sve kombinacije brojeva koji su djeljivi s tri ($\{3,6,9\}$, $\{3,6,12\}$, $\{3,9,12\}$, $\{6,9,12\}$) dobiva 1 bod.

Analogno, za sve kombinacije brojeva koji daju ostatak 1 ($\{1,4,7\}$, $\{1,4,10\}$, $\{1,7,10\}$, $\{4,7,10\}$) i za sve kombinacije brojeva koji daju ostatak 2 ($\{2,5,8\}$, $\{2,5,11\}$, $\{2,8,11\}$, $\{5,8,11\}$) učenik dobiva po 1 bod.

Ako je ispisao sve 64 kombinacije brojeva koji daju različite ostatke pri dijeljenju s 3 dobiva 3 boda.

U slučaju sistematskog i preglednog ispisivanja, ako je izostavio jednu ili dvije kombinacije, oduzima se 1 bod, a inače se boduje kako je prethodno opisano.

U slučaju nesistematskog ispisivanja kombinacija, za svaku izostavljenu kombinaciju brojeva oduzima se 1 bod.

Zadatak B-2.6.

Tijekom skraćivanja razlomka $\dfrac{\overline{200\ldots0x}}{\overline{300\ldots0y}}$ $(x, y \neq 0)$ u kojem između 2 i x te između 3 i y ima po 2020 nula, Matko je zanemario nule i napisao $\dfrac{\overline{200\ldots0x}}{\overline{300\ldots0y}} = \dfrac{\overline{2x}}{\overline{3y}}$ te dobio točan rezultat. Odredite sve vrijednosti znamenaka x i y za koje je opisanim skraćivanjem Matko mogao dobiti točan rezultat.

Rješenje.

Iz zapisa $\frac{\overline{200\ldots0x}}{\overline{300\ldots0y}}=\frac{\overline{2x}}{\overline{3y}}$ proizlazi jednadžba $\frac{2\cdot10^{2021}+x}{3\cdot10^{2021}+y}=\frac{20+x}{30+y}$. 2 boda

Nakon sređivanja dobivamo

$$6\cdot10^{2022}+20y+3x\cdot10^{2021}+xy=6\cdot10^{2022}+30x+2y\cdot10^{2021}+xy, \qquad \text{1 bod}$$

$$20y+3x\cdot10^{2021}=30x+2y\cdot10^{2021}, \qquad \text{1 bod}$$

$$10^{2021}(3x-2y)=10(3x-2y), \qquad \text{1 bod}$$

$$(10^{2021}-10)(3x-2y)=0. \qquad \text{1 bod}$$

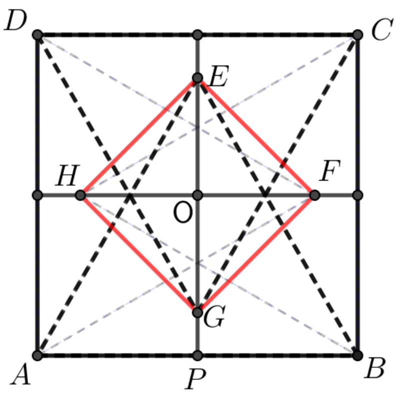
Ova će jednakost biti točna samo ako je $3x-2y=0$ odnosno $3x=2y$. 2 boda

Kako su x i y znamenke različite od 0, rješenja su $(x,y)\in\{(2,3),(4,6),(6,9)\}$. 2 boda

Zadatak B-2.7.

Unutar kvadrata $ABCD$ nalaze se točke E, F, G i H takve da su trokuti ABE, BCF, CDG i DAH jednakostranični. U kojem su omjeru površina kvadrata $ABCD$ i površina četverokuta $EFGH$?

Rješenje.



1 bod

Točke E i G su vrhovi jednakostraničnih trokuta s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, pa se nalaze na simetrali tih dužina. Analogno, točke F i H su na simetrali dužina $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$. 1 bod

Kako su te simetrale međusobno okomite, trokuti OFE, OGF, OHG i OEH su sukladni pravokutni trokuti.

Neka je duljina stranice zadanog kvadrata jednaka a.

Tada je $|PG|=a-\frac{a\sqrt{3}}{2}=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 2 boda

$|GO|=\frac{a}{2}-|PG|=a\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 1 bod

i analogno $|FO|=|EO|=|HO|=|GO|=a\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 1 bod

Trokuti OFE, OGF, OHG i OEH su sukladni pravokutni trokuti, a četverokut $EFGH$ je kvadrat. 1 bod

Njegova je površina jednaka $P = \dfrac{1}{2}d^2$, gdje je $d = 2|FO|$ duljina dijagonale toga kvadrata.

$P = \dfrac{1}{2}\left(2 \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = a^2(2-\sqrt{3})$. 2 boda

Traženi omjer površina je $\dfrac{P(ABCD)}{P(EFGH)} = \dfrac{a^2}{a^2(2-\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. 1 bod

Napomena: Učenik koji umjesto omjera $\frac{P(ABCD)}{P(EFGH)}$ izračuna omjer $\frac{P(EFGH)}{P(ABCD)} = 2-\sqrt{3}$ treba dobiti sve bodove.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Riješite nejednadžbu $1 - 27^x \leqslant 6 \cdot 9^{3x}$.

Rješenje.

Zapišimo potencije iz nejednadžbe s bazom 3

$$1 - 3^{3x} \leqslant 6 \cdot 3^{6x}.$$ 1 bod

Ako uvedemo supstituciju $t = 3^{3x}$, dobivamo kvadratnu nejednadžbu $6t^2 + t - 1 \geqslant 0$. 1 bod

Rješavanjem dobivamo $t \leqslant -\frac{1}{2}$ ili $t \geqslant \frac{1}{3}$. 2 boda

No, kako je $t > 0$, mora biti $t \geqslant \frac{1}{3}$ pa slijedi $3^{3x} \geqslant 3^{-1}$ 1 bod

i konačno $x \geqslant -\frac{1}{3}$. 1 bod

Zadatak B-3.2.

Ako je $\log_2 3 = a$ i $\log_7 2 = b$, koliko je $\log_6 28$?

Rješenje.

$$\log_6 28 = \frac{\log_2 28}{\log_2 6}$$ 1 bod

$$= \frac{\log_2(4 \cdot 7)}{\log_2(2 \cdot 3)} = \frac{\log_2 4 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 3}$$ 2 boda

$$= \frac{2 + \frac{1}{\log_7 2}}{1 + \log_2 3}$$ 2 boda

$$= \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + a} = \frac{2 + b + 1}{b + ab}$$ 1 bod

Zadatak B-3.3.

Ako je $f(x)=4\sin^2\frac{3x}{2}-4\cos^2\frac{3x}{2}$, odredite $f\left(\frac{2020\pi}{9}+2021k\pi\right)$ u ovisnosti o cijelom broju k.

Rješenje.

Funkciju f možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$f(x)=4\sin^2\frac{3x}{2}-4\cos^2\frac{3x}{2}=-4\left(\cos^2\frac{3x}{2}-\sin^2\frac{3x}{2}\right)=-4\cos 3x.$$ 2 boda

Zato je

$$f\left(\frac{2020\pi}{9}+2021k\pi\right)=-4\cos\left(3\left(\frac{2020\pi}{9}+2021k\pi\right)\right)=-4\cos\left(\frac{2020\pi}{3}+6063k\pi\right).$$

Imamo dva slučaja.

1° ako je k paran, gornji izraz je jednak
$-4\cos\left(\frac{2020\pi}{3}\right)=-4\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-4\left(-\frac{1}{2}\right)=2.$ 2 boda

2° ako je k je neparan, gornji izraz je jednak
$-4\cos\left(\frac{2020\pi}{3}+\pi\right)=-4\left(-\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=4\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=4\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.$ 2 boda

Zadatak B-3.4.

Koliko rješenja na intervalu $[0,2020\pi]$ ima jednadžba $\frac{1}{2}\sin 2x+1=\sin x+\cos x$?

Rješenje.

Primijenimo li formulu za sinus dvostrukog broja, jednadžba postaje

$$\sin x\cos x+1=\sin x+\cos x.$$

Ako sve članove prebacimo na lijevu stranu i faktoriziramo, slijedi

$$\begin{aligned}\sin x\cos x-\sin x-\cos x+1&=0\\ \sin x(\cos x-1)-(\cos x-1)&=0\\ (\sin x-1)(\cos x-1)&=0\end{aligned}$$ 2 boda

To znači da je $\sin x=0$ ili $\cos x=1$. 1 bod

Rješenja prve jednadžbe su $x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$,

a druge $x_2=2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. 1 bod

Na skupu $[0,2\pi\rangle$ dana jednadžba ima 2 rješenja $x=0$ i $x=\frac{\pi}{2}$,

pa će zbog periodičnosti na skupu $[0,2020\pi\rangle$ imati $2\cdot1010=2020$ rješenja, a na skupu $[0,2020\pi]$ točno 2021 rješenje. 2 boda

Zadatak B-3.5.

U skupu cijelih brojeva riješite jednadžbu $a^2 + b^2 + 50 = 8a + 12b$.

Rješenje.

Zapišemo li danu jednadžbu u obliku $a^2 - 8a + 16 + b^2 - 12b + 36 = 2$, vidimo da je ekvivalentna s jednadžbom $(a-4)^2 + (b-6)^2 = 2$. 2 boda

Ova će jednakost u skupu cijelih brojeva biti točna jedino ako je

$$a - 4 = \pm 1 \qquad \text{i} \qquad b - 6 = \pm 1.$$ 2 boda

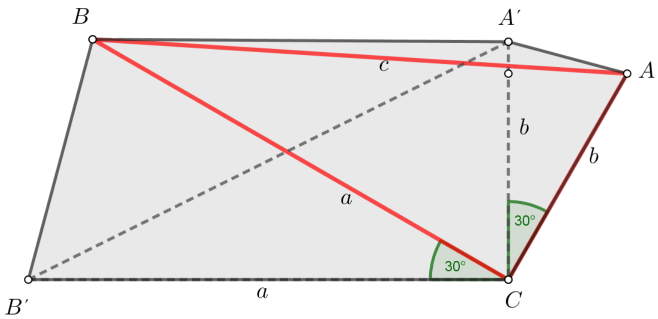
Dakle $a = 3$ ili $a = 5$, te $b = 5$ ili $b = 7$. Rješenja su

$$(a, b) \in \{(3,5), (3,7), (5,5), (5,7)\}.$$ 2 boda

Zadatak B-3.6.

Jedna je kateta pravokutnog trokuta ABC dvostruko dulja od druge. Trokut $A'B'C$ nastaje rotacijom trokuta ABC oko vrha pravog kuta C za $30°$. Točke A, A', B, B' i C vrhovi su konveksnog peterokuta čija je površina $20 + 8\sqrt{3}$. Izračunajte duljine kateta trokuta ABC.

Prvo rješenje.



1 bod

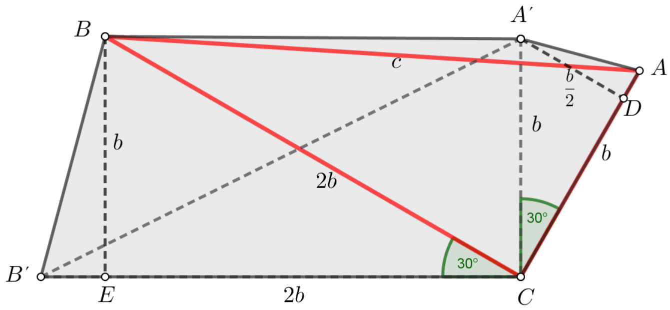
Površina peterokuta jednaka je zbroju površina triju trokuta. Uz oznake kao na slici vrijedi

$$\begin{aligned} P(AA'BB'C) &= P(CAA') + P(CA'B) + P(CBB') && \text{1 bod} \\ &= \frac{1}{2} b \cdot b \sin 30° + \frac{1}{2} a \cdot b \sin 60° + \frac{1}{2} a \cdot a \sin 30° && \text{3 boda} \\ &= \frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{4} 2b^2\sqrt{3} + \frac{1}{4} b^2 = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{4} b^2. && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Sada iz $\dfrac{5 + 2\sqrt{3}}{4} b^2 = 20 + 8\sqrt{3}$ 1 bod

slijedi $b^2 = 16$, odnosno $b = 4$ i $a = 8$. 2 boda

Drugo rješenje.



1 bod

$P(AA'BB'C) = P(CAA') + P(CA'B) + P(CBB')$ 1 bod

Trokut CDA' je polovica jednakostraničnog trokuta stranice duljine b iz čega slijedi $|A'D| = \frac{1}{2}b$. Zato je $P(CAA') = \dfrac{1}{2}\, b \cdot \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{4}\, b^2$. 1 bod

Analogno, kako je trokut BEC pola jednakostraničnog trokuta stranice duljine $2b$, dobivamo $P(BB'C) = \dfrac{1}{2} \cdot 2b \cdot b = b^2$. 1 bod

Trokuti $CA'B$ i BEC su sukladni (SKS: b, $60°$, $2b$) pa je

$P(CA'B) = P(BEC) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(2b)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$. 2 boda

Iz zadanog uvjeta slijedi $P(CAA') + P(CA'B) + P(CBB') = 20 + 8\sqrt{3}$, odnosno

$$\frac{1}{4}b^2 + b^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, b^2 = 20 + 8\sqrt{3}.$$ 1 bod

Tada je $5b^2 + 2b^2\sqrt{3} = 80 + 32\sqrt{3}$ 1 bod

te konačno $b^2 = 16$.

Duljine kateta zadanog trokuta su 4 i 8. 2 boda

Zadatak B-3.7.

Za koje vrijednosti realnog broja t jednadžba

$$x^2 + \frac{1}{\sqrt{\cos t}}\, 2x + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2}$$

ima točno jedno rješenje?

Rješenje.

Očito mora biti $\cos t > 0$ i $\sin t \neq 0$.

Da bi promatrana kvadratna jednadžba imala jedno rješenje, njena diskriminanta mora biti jednaka 0, odnosno treba biti

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\cos t}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sin t} - 2\sqrt{2}\right) = 0,$$ 1 bod

Sređivanjem dobivamo $\dfrac{4}{\cos t} - \dfrac{4}{\sin t} = -8\sqrt{2}$. 1 bod

Množimo s nazivnikom i preuredimo pa je $\cos t - \sin t = \sqrt{2}\sin 2t$.

Pomnožimo s $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ i primijenimo adicijsku formulu: $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right) = \sin 2t$. 2 boda

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} - t &= 2t + 2k\pi \qquad &\text{ili}\qquad &\frac{\pi}{4} - t = \pi - 2t + 2k\pi \\ 3t &= \frac{\pi}{4} - 2k\pi &\text{ili}\qquad &t = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ t &= \frac{\pi}{12} - \frac{2k\pi}{3} &\text{ili}\qquad &t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

2 boda (prvi red), 2 boda (treći red)

Ni za jedno od dobivenih rješenja $\sin t$ nije nula, ali pozitivan kosinus imaju samo rješenja $t = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pa su to tražene vrijednosti. 2 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Odredite koordinate sjecišta krivulja zadanih jednadžbama $x^2+2y^2=2$ i $2x^2+y^2=2$, te površinu konveksnog mnogokuta čiji su vrhovi te točke.

Rješenje.

Dane su krivulje elipse, a njihova sjecišta dobijemo rješavanjem sustava jednadžbi $x^2+2y^2=2$, $2x^2+y^2=2$.

Ako iz prve jednadžbe izrazimo x^2 i to uvrstimo u drugu, dobivamo $2(2-2y^2)+y^2=2$ odakle slijedi $3y^2=2$, te $y^2=\frac{2}{3}$, $x^2=\frac{2}{3}$. 2 boda

Sjecišta su točke

$$T_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad T_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad T_3\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad T_4\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$ 2 boda

Očito je dani četverokut kvadrat, pa je njegova površina jednaka

$$P=|T_1T_2|^2=\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{8}{3}.$$ 2 boda

Zadatak B-4.2.

Učenici su u parovima pisali objave za Instagram kojima pozivaju na "Večer matematike". Par koji zajedno sakupi najviše lajkova očekuje nagrada. Maja je sakupila 3731, Matko 2754, ali tvrde da zajedno imaju 6705, zbog čega ostali parovi sumnjaju na prevaru.

Ako dopustimo mogućnost da brojevi nisu zapisani u dekadskom sustavu, mogu li Maja i Matko biti u pravu? Obrazložite.

Rješenje.

Neka je b baza brojevnog sustava koji su Maja i Marko koristili.

$$3731_{(b)} + 2754_{(b)} = 6705_{(b)} \qquad \text{1 bod}$$
$$(3b^3 + 7b^2 + 3b + 1) + (2b^3 + 7b^2 + 5b + 4) = 6b^3 + 7b^2 + 0 \cdot b + 5 \qquad \text{1 bod}$$
$$b^3 - 7b^2 - 8b$$
$$b(b-8)(b+1) = 0 \qquad \text{2 boda}$$

Rješenja ove jednadžbe su 0, -1 i 8, te je jedina moguća baza 8.

Maja i Matko lajkove su zbrajali u oktalnom sustavu. 2 boda

Napomena: Učenik koji tvrdi i provjeri da baza $b = 8$ zadovoljava uvjet, ali ne dokaže da nema drugih rješenja, dobiva 3 boda.
Učenik koji tvrdi, bez provjere, da je jedino rješenje $b = 8$ dobiva 1 bod.

Zadatak B-4.3.

Zadan je kompleksan broj $z = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$. Izračunajte $\sqrt[3]{z^{2020}}$.

Rješenje.

Zapišimo broj z u trigonometrijskom obliku.

$$z = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = z = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \qquad \text{2 boda}$$

Tada je

$$z^{2020} = \cos \frac{11110\pi}{3} + i \sin \frac{11110\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}. \qquad \text{2 boda}$$

Odredimo sada kompleksne brojeve w za koje vrijedi $w^3 = z^{2020}$.

$$w_1 = \cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9}, \quad w_2 = \cos \frac{10\pi}{9} + i \sin \frac{10\pi}{9}, \quad w_3 = \cos \frac{16\pi}{9} + i \sin \frac{16\pi}{9}. \qquad \text{2 boda}$$

Napomena: Rješenje se može zapisati u obliku

$$w_k = \cos\left(\frac{1}{3}\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)\right) + i \sin\left(\frac{1}{3}\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Zadatak B-4.4.

U razvoju binoma $(a+b)^n$ treći je član jednak $\frac{56}{9}$, četvrti član je $\frac{70}{3}$, a binomni koeficijenti trećeg i šestog člana su jednaki. Odredite brojeve a, b i n.

Rješenje.

Ako su binomni koeficijenti trećeg i šestog člana jednaki, odnosno ako je $\binom{n}{2}=\binom{n}{5}$, onda je zbog svojstva simetrije binomnih koeficijenata $n=7$. 1 bod

Opći član u razvoju binoma je $\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$.

Stoga je treći član jednak $\binom{7}{2}a^{5}b^{2}=\frac{56}{9}$, a odatle je $a^{5}b^{2}=\frac{8}{27}$. 1 bod

Četvrti član je $\binom{7}{3}a^{4}b^{3}=\frac{70}{3}$, a odatle je $a^{4}b^{3}=\frac{2}{3}$. 1 bod

Podijelimo li dobivene jednakosti, dobivamo $\frac{a}{b}=\frac{a^{5}b^{2}}{a^{4}b^{3}}=\frac{8}{27}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4}{9}$, pa je $a=\frac{4}{9}b$. 1 bod

Iz prve jednadžbe slijedi $\left(\frac{4}{9}b\right)^{5}b^{2}=\frac{8}{27}$ te je $b^{7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-7}$ i konačno $b=\frac{3}{2}$. 1 bod

$a=\frac{4}{9}b=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$. 1 bod

Napomena: Učenik koji zamijeni a i b i tako riješi zadatak dobiva sve bodove.

Zadatak B-4.5.

Na satu hrvatskog jezika djeca su se nadmetala u slaganju riječi od pet slova. Pri tome su mogli koristiti samo slova riječi SNIJEG (jedno su slovo mogli koristiti i više puta). Jedini je uvjet bio da u svakoj riječi moraju upotrijebiti slovo E i to točno dva puta. Koliko je najviše različitih riječi (ne nužno smislenih) mogao netko složiti?

Rješenje.

Prvo ćemo smjestiti dva slova E na dva mjesta u riječi. Prvo slovo E možemo smjestiti na 5 načina, a drugo na 4. To bi bilo ukupno 20 načina, ali tu smo svaki razmještaj brojili dva puta, jer ne razlikujemo koje je slovo E na kojem mjestu. Stoga taj broj moramo podijeliti s 2. Dva slova E možemo smjestiti na 10 načina. 3 boda

Na svako od preostala tri mjesta možemo napisati bilo koje od preostalih pet slova (S, N, I, J, G), što možemo napraviti na $5\cdot5\cdot5=5^{3}$ načina. 2 boda

Ukupno je moguće složiti $10\cdot5^{3}=1250$ riječi. 1 bod

Napomena: Učenik može odmah napisati rješenje $\binom{5}{2}\cdot5\cdot5\cdot5=1250$ i dobiva sve bodove.

Zadatak B-4.6.

Odredite sve prirodne brojeve x za koje vrijedi jednakost

$$3\cdot\binom{2x^{2}-10x+16}{x^{2}-5x+9}=2\cdot\binom{2x^{2}-10x+17}{x^{2}-5x+7}.$$

Prvo rješenje.

Uočimo da su izrazi u binomnim koeficijentima u danoj jednakosti slični i uvedimo supstituciju $t = x^2 - 5x + 7$. Tada je $2t = 2x^2 - 10x + 14$ pa imamo

$$3 \cdot \binom{2t+2}{t+2} = 2 \cdot \binom{2t+3}{t}.$$ 1 bod

Tada je

$$3 \cdot \frac{(2t+2)!}{t!(t+2)!} = 2 \cdot \frac{(2t+3)!}{t!(t+3)!}$$ 2 boda

pa nakon skraćivanja dobivamo $3 = 2 \cdot \dfrac{2t+3}{t+3}$ 3 boda

odakle slijedi $3(t+3) = 2(2t+3)$, $t = 3$. 2 boda

Sada iz $x^2 - 5x + 7 = 3$ dobivamo $x = 1$ ili $x = 4$. 2 boda

Drugo rješenje.

Danu jednadžbu možemo zapisati ovako:

$$3 \cdot \frac{(2x^2 - 10x + 16)!}{(x^2 - 5x + 9)!(x^2 - 5x + 7)!} = 2 \cdot \frac{(2x^2 - 10x + 17)!}{(x^2 - 5x + 7)!(x^2 - 5x + 10)!}$$ 3 boda

a nakon skraćivanja dobivamo $3 = 2 \cdot \dfrac{2x^2 - 10x + 17}{x^2 - 5x + 10}$. 4 boda

Ovo se svodi na kvadratnu jednadžbu $x^2 - 5x + 4 = 0$ 1 bod

čija su rješenja $x = 1$ i $x = 4$. 2 boda

Zadatak B-4.7.

Leda i Una se igraju plastelinom u obliku valjka kojemu je visina 6 puta veća od promjera baze. Leda je uzela dio tog plastelina i napravila veću, a Una je od ostatka napravila manju kuglicu. Koliko je puta obujam Ledine kuglice veći od obujma Unine kuglice, ako je zbroj njihovih polumjera 3 puta veći od polumjera baze valjka?

Rješenje.

Označimo sa r polumjer baze valjka. Visina valjka je 6 promjera, odnosno 12 polumjera valjka, pa je obujam valjka $V_V = r^2\pi v = r^2\pi 12r = 12r^3\pi$. 1 bod

Neka je R_L polumjer kuglice koju je napravila Leda, a R_U polumjer kuglice koju je napravila Una. Zbroj obujmova tih kuglica jednak je obujmu valjka.

$$\frac{4}{3}R_L^3\pi + \frac{4}{3}R_U^3\pi = 12r^3\pi.$$ 1 bod

Slijedi $R_L^3 + R_U^3 = 9r^3$, a iz uvjeta u zadatku vrijedi i $R_L + R_U = 3r$. 1 bod

Riješimo ovaj sustav jednadžbi.

$$(3r - R_U)^3 + R_U^3 = 9r^3$$
$$27r^3 - 27r^2R_U + 9rR_U^2 = 9r^3$$
$$3r^2 - 3rR_U + R_U^2 = r^2$$ 2 boda
$$R_U^2 - 3rR_U + 2r^2 = 0$$ 1 bod

Odatle je $R_U = 2r$ ili $R_U = r$. 1 bod

Kako Ledina kuglica ima veći polumjer, slijedi $R_U = r$, $R_L = 3r - r = 2r$. 1 bod

Sada vidimo da je omjer obujmova $\dfrac{V_L}{V_U} = \left(\dfrac{R_L}{R_U}\right)^3 = \left(\dfrac{2r}{r}\right)^3 = 8$.

Obujam Ledine kuglice 8 puta je veći od obujma Unine kuglice. 2 boda

Napomena: U jednadžbi $R_L^3 + R_U^3 = 9r^3$ možemo prepoznati zbroj kubova te iskoristiti $R_L + R_U = 3r$. Nakon toga također dobivamo kvadratnu jednadžbu, bilo po R_U ili R_L ili po omjeru $\dfrac{R_L}{R_U}$.