Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

1. U ovisnosti o realnom parametru m odredi za koje realne brojeve x vrijedi

$$\frac{x-m}{x^2}+x \geqslant 2\left(1-\frac{m}{x}\right)+m.$$

2. Odredi sve uređene trojke (a, b, c) prirodnih brojeva za koje vrijedi $a \leqslant b \leqslant c$ i

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}.$$

3. Neka su x, y i z različiti realni brojevi od kojih nijedan nije jednak nuli, takvi da vrijedi

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2y^2z^2$.

4. Nad stranicom $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$ nacrtan je jednakostraničan trokut BEC tako da je točka E izvan kvadrata. Točke M i N su redom polovišta dužina $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$.

Odredi mjeru kuta $\sphericalangle MNC$.

5. Koliko najmanje brojeva treba ukloniti iz skupa $\{1,2,3,\ldots,2020\}$ tako da nastali skup ne sadrži umnožak svojih dvaju različitih elemenata?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

1. Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$x^2 + y^2 = 5, \qquad xz + y = 7, \qquad yz - x = 1.$$

2. Odredi sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva takve da je $V(a, b) - D(a, b) = \dfrac{ab}{5}$.

3. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$3\sqrt[3]{(14-x)^2} - 2\sqrt[3]{(14+x)^2} = 5\sqrt[3]{x^2 - 196}.$$

4. Neka je T težište trokuta ABC, a P polovište stranice $\overline{AC}$. Pravac kroz točku T paralelan s pravcem BC siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E.

Dokaži da jednakost $\sphericalangle AEC = \sphericalangle PTC$ vrijedi ako i samo ako vrijedi $\sphericalangle ACB = 90°$.

5. Neka je $n > 1$ prirodni broj. Na koliko se načina u polja ploče dimenzija $2 \times n$ mogu upisati brojevi $1, 2, \ldots, 2n$ tako da uzastopni brojevi budu u poljima sa zajedničkom stranicom?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

1. Duljina jedne stranice trokuta jednaka je aritmetičkoj sredini duljina drugih dviju stranica. Dokaži da mjera srednjeg (po veličini) kuta tog trokuta nije veća od $60°$.

2. Odredi najmanju i najveću vrijednost izraza

$$\frac{1}{\sin^4 x + \cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x + \cos^4 x}.$$

Odredi sve realne brojeve x za koje se te vrijednosti postižu.

3. U trokutu ABC, kut u vrhu C je tupi, a točka D je nožište visine iz vrha C. Točke P i Q nalaze se na dužini $\overline{AB}$ i vrijedi $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACQ = 90°$. Dokaži da je

$$|AP| \cdot |DQ| = |PD| \cdot |QB|.$$

4. Odredi sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva za koje je $(a + b^2)(a^2 + b)$ potencija broja 2.

5. Baza piramide je pravilni n-terokut. Svaka stranica baze obojena je crnom bojom, dok su svaka dijagonala baze i svaki pobočni brid piramide obojeni ili crvenom ili plavom bojom. Odredi najmanji prirodni broj $n \geqslant 4$ za koji nužno postoji trokut čiji vrhovi su vrhovi piramide i kojemu su sve tri stranice jednake boje.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

1. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo kompleksan broj

$$a_n = (1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

Izračunaj

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{2019} - a_{2020}|.$$

2. Skup svih točaka (x, y) za koje vrijedi $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ dijeli ravninu na nekoliko dijelova od kojih je samo jedan omeđen. Odredi površinu tog dijela ravnine.

3. Na kocki stranice duljine 1 istaknuta je mreža koja se sastoji od 14 točaka i 36 dužina. Točke su vrhovi kocke i središta njezinih strana. Dužine su svi bridovi kocke i još po četiri dužine na svakoj strani kocke koje spajaju središte te strane s njezinim vrhovima.

Kolika je duljina najkraćeg puta po toj mreži koji prolazi kroz svih 14 točaka?

4. Dani su cijeli brojevi a, b, c i d. Dokaži da je broj parova (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi $x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$ beskonačan ako i samo ako je $a^2 - 4b = c^2 - 4d$.

5. U prostoriji se nalazi n kutija visina $1, 2, 3, \ldots, n$ koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše 1 viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.