ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

U ovisnosti o realnom parametru m odredi za koje realne brojeve x vrijedi

$$\frac{x-m}{x^2}+x \geqslant 2\left(1-\frac{m}{x}\right)+m.$$

Rješenje.

Uočimo da x mora biti različit od nule kako bi svi izrazi imali smisla. 1 bod

Prebacivanjem svih pribrojnika na istu stranu imamo

$$\frac{x-m}{x^2}-2\cdot\frac{x-m}{x}+x-m \geqslant 0. \qquad \text{1 bod}$$

Daljnjim sređivanjem slijedi

$$(x-m)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right) \geqslant 0, \qquad \text{2 boda}$$

odnosno

$$(x-m)\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 \geqslant 0. \qquad \text{2 boda}$$

Budući da uvijek vrijedi $\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 \geqslant 0$, slijedi $x \geqslant m$ ili je $x=1$. 1 bod

Ako je $m>1$, rješenje je $x \in \{1\} \cup [m,+\infty\rangle$. 1 bod

Ako je $0<m \leqslant 1$, rješenje je $x \in [m,+\infty\rangle$. 1 bod

Ako je $m \leqslant 0$, rješenje je $x \in [m,+\infty\rangle \setminus \{0\}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne isključi mogućnost $x=0$ ili ne uključi mogućnost $x=1$, gubi po 2 boda za svaki od tih slučajeva.

Zadatak A-1.2.

Odredi sve uređene trojke (a,b,c) prirodnih brojeva za koje vrijedi $a \leqslant b \leqslant c$ i

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}.$$

Prvo rješenje.

Množenjem cijelog izraza s $7abc$ imamo

$$3abc = 7(bc + c + 1) = (7b + 7)c + 7.$$ 1 bod

Budući da je lijeva strana jednakosti djeljiva s c, mora biti i desna, odnosno 7 je nužno djeljivo s c, tj. vrijedi $c = 1$ ili $c = 7$. 3 boda

Ako je $c = 1$, iz $a \leqslant b \leqslant c$ zaključujemo $a = b = c = 1$, za što uvrštavanjem vidimo da nije rješenje. Stoga zaključujemo $c = 7$. 1 bod

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu imamo $3ab \cdot 7 = (7b+7) \cdot 7+7$, odnosno $3ab = 7b+8$.

Kao ranije, nužno vrijedi da je 8 djeljivo s b, odnosno $b = 1, 2, 4$ ili 8. 1 bod

Za $b = 1$ slijedi $3a = 15$, odnosno $a = 5$, što nije moguće zbog $a \leqslant b$. 1 bod

Za $b = 2$ slijedi $6a = 22$, što nije moguće. 1 bod

Za $b = 4$ slijedi $12a = 36$, odnosno $a = 3$. 1 bod

Slučaj $b = 8$ nije moguć zbog $b \leqslant c$. 1 bod

Prema tome, jedino moguće rješenje je $(a, b, c) = (3, 4, 7)$.

Drugo rješenje.

Zbog $a \leqslant b \leqslant c$ imamo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}.$$ 2 boda

Ako je $a \geqslant 4$, vrijedi

$$\frac{3}{7} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{21}{64},$$

što nije istina. Dakle, mora vrijediti $a \leqslant 3$. 2 boda

S druge strane, vrijedi

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} = \frac{3}{7},$$

odnosno $a > \frac{7}{3}$. Prema tome, vrijedi $a = 3$. 1 bod

Uvrštavanjem imamo $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3bc}$, tj. $\frac{2}{7} = \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}$.

Kao ranije, za $b \geqslant 5$ imamo

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} \leqslant \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{6}{25},$$

što nije istina. Dakle, mora vrijediti $b \leqslant 4$. 2 boda

Također vrijedi

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = \frac{2}{7},$$

odnosno $b > \frac{7}{2}$, tj. $b \geqslant 4$. 2 boda

Prema tome, mora vrijediti $b = 4$. Uvrštavanjem vidimo da za $a = 3$ i $b = 4$ slijedi $c = 7$ i jedino moguće rješenje je $(a, b, c) = (3, 4, 7)$. 1 bod

Zadatak A-1.3.

Neka su x, y i z različiti realni brojevi od kojih nijedan nije jednak nuli, takvi da vrijedi

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2y^2z^2$.

Rješenje.

Iz $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z}$ množenjem s yz imamo $xyz + z = y^2z + y$, odnosno

$$yz(x - y) = y - z.$$ 2 boda

Budući da su x i y različiti, dijeljenjem s $x - y$ dobivamo

$$yz = \frac{y - z}{x - y}.$$ 3 boda

Iz preostale dvije jednakosti analogno je

$$zx = \frac{z - x}{y - z} \qquad \text{i} \qquad xy = \frac{x - y}{z - x}.$$ 3 boda

Množenjem sada slijedi

$$yz \cdot zx \cdot xy = \frac{y - z}{x - y} \cdot \frac{z - x}{y - z} \cdot \frac{x - y}{z - x},$$

odakle je $x^2y^2z^2 = 1$. 2 boda

Zadatak A-1.4.

Nad stranicom $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$ nacrtan je jednakostraničan trokut BEC tako da je točka E izvan kvadrata. Točke M i N su redom polovišta dužina $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$.

Odredi mjeru kuta $\sphericalangle MNC$.

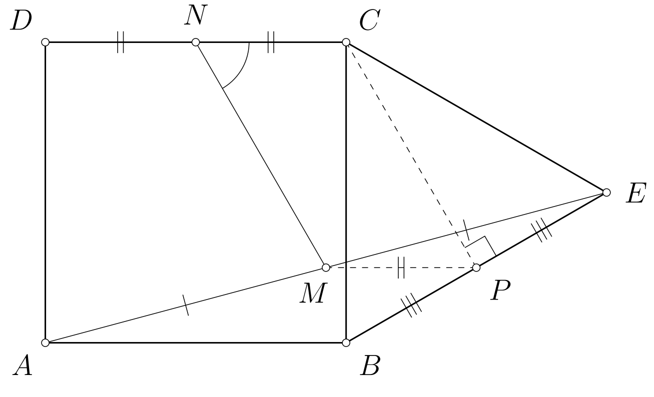
Rješenje.

Označimo s P polovište dužine $\overline{BE}$. 2 boda

Tada je $\overline{PM}$ srednjica trokuta ABE, pa vrijedi $|PM| = \frac{1}{2}|AB|$ i $PM \parallel AB$. 2 boda

S druge strane, vrijedi $|CN| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AB|$, iz čega slijedi $|PM| = |CN|$. 2 boda

Također vrijedi i $PM \parallel AB \parallel CN$, pa možemo zaključiti da je $PCNM$ paralelogram. 2 boda



Kako je trokut BEC jednakostraničan, težišnica $\overline{CP}$ je ujedno i visina tog trokuta, pa je $\sphericalangle BCP = 30°$. Slijedi da je $\sphericalangle PCD = \sphericalangle PCB + \sphericalangle BCN = 30° + 90° = 120°$. 1 bod

Budući da je $PCNM$ paralelogram, slijedi

$$\sphericalangle MNC = 180° - \sphericalangle MND = 180° - \sphericalangle PCD = 60°.$$ 1 bod

Zadatak A-1.5.

Koliko najmanje brojeva treba ukloniti iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ tako da nastali skup ne sadrži umnožak svojih dvaju različitih elemenata?

Rješenje.

Točan odgovor je 44. 1 bod

Dokažimo da barem 44 broja moraju biti uklonjena iz danog skupa. Kao prvo, broj 1 mora biti uklonjen iz skupa, jer bi u suprotnom s bilo kojim drugim elementom a iz skupa činio umnožak $1 \cdot a = a$. 1 bod

Pogledajmo tročlane skupove

$$\{2, 87, 174\}, \{3, 86, 258\}, \ldots, \{44, 45, 1980\},$$

odnosno skupove oblika $\{k, 89-k, k\cdot(89-k)\}$, za $k = 2, 3, \ldots, 44$. 4 boda

Iz svakog od ta 43 skupa moramo ukloniti barem jedan broj, pa zaključujemo da zajedno s brojem 1 ukupno moramo ukloniti barem 44 broja. 2 boda

Primjer takvog skupa iz kojeg smo uklonili 44 broja je onaj u kojem smo uklonili brojeve $1, 2, 3, \ldots, 44$, tj. skup $\{45, 46, \ldots, 2020\}$. 1 bod

Umnožak bilo koja dva elementa tog skupa je barem $45 \cdot 46 = 2070 > 2020$, pa se sigurno ne nalazi u skupu. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$x^2 + y^2 = 5, \qquad xz + y = 7, \qquad yz - x = 1.$$

Prvo rješenje.

Iz druge jednadžbe imamo $y = 7 - xz$.

Uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $x = yz - 1 = (7 - xz)z - 1 = 7z - xz^2 - 1$, odnosno $x(1 + z^2) = 7z - 1$.

Kako za realni z vrijednost $1 + z^2$ nikad nije nula, sređivanjem i uvrštavanjem imamo

$$x = \frac{7z - 1}{1 + z^2}, \qquad y = 7 - xz = \frac{z + 7}{1 + z^2}.$$ 3 boda

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} 5 = x^2 + y^2 &= \left(\frac{7z - 1}{1 + z^2}\right)^2 + \left(\frac{z + 7}{1 + z^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(1 + z^2)^2}\left(49z^2 - 14z + 1 + z^2 + 14z + 49\right) \\ &= \frac{50(z^2 + 1)}{(1 + z^2)^2} = \frac{50}{1 + z^2}. \end{aligned}$$ 3 boda

Slijedi $1 + z^2 = 10$, odnosno $z^2 = 9$, tj. $z = \pm 3$. 1 bod

Sada x i y možemo izračunati iz prvih jednadžbi gdje smo izrazili te varijable preko z.

Za $z = 3$ slijedi $x = \frac{20}{10} = 2$, $y = \frac{10}{10} = 1$. 1 bod

Za $z = -3$ slijedi $x = -\frac{22}{10} = -\frac{11}{5}$, $y = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. 1 bod

Druga i treća jednadžba su zadovoljene jer smo x i y dobili kao rješenja sustava dviju linearnih jednadžbi, a prva jednadžba je zadovoljena jer smo tako odredili z. Prema tome, rješenja su $(2, 1, 3)$ i $\left(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, -3\right)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Iz drugih dviju jednadžbi vidimo jednakosti

$$zx = 7 - y \qquad \text{i} \qquad yz = 1 + x.$$

Pomnožimo prvu s y, drugu s x i oduzmimo ih. Dobivamo $x + x^2 = 7y - y^2$, odnosno $x^2 + y^2 = 7y - x$. 3 boda

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $7y - x = 5$, odnosno $x = 7y - 5$. 1 bod

Uvrštavanjem opet u prvu jednadžbu dobivamo $(7y - 5)^2 + y^2 = 5$, odnosno vrijedi $50y^2 - 70y + 20 = 0$. 2 boda

Rješenja te kvadratne jednadžbe su $y_1 = 1$ i $y_2 = \dfrac{2}{5}$. 1 bod

Za $y = 1$ iz $7y - x = 5$ imamo $x = 2$, te potom iz druge ili treće jednadžbe slijedi $z = 3$. 1 bod

Za $y = \dfrac{2}{5}$ iz $7y - x = 5$ imamo $x = -\dfrac{11}{5}$, te potom slijedi $z = -3$. 1 bod

Direktnom provjerom vidimo da su trojke $(2, 1, 3)$ i $\left(-\dfrac{11}{5}, \dfrac{2}{5}, -3\right)$ zaista rješenja. 1 bod

Treće rješenje.

Uočimo da za proizvoljne realne brojeve x, y i z vrijedi

$$(x^2 + y^2)(z^2 + 1) = (xz + y)^2 + (x - yz)^2.$$ 5 bodova

Uvrštavajući vrijednosti iz zadatka u zagrade, dobivamo $5(z^2 + 1) = 50$, odnosno $z^2 + 1 = 10$, odakle je $z = \pm 3$. 2 boda

Rješavajući dva linearna sustava s dvije nepoznanice x i y, dobivamo rješenja $(2, 1, 3)$ i $\left(-\dfrac{11}{5}, \dfrac{2}{5}, -3\right)$. Prva jednadžba je zadovoljena zbog identiteta s početka rješenja. 3 boda

Zadatak A-2.2.

Odredi sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva takve da je $V(a, b) - D(a, b) = \dfrac{ab}{5}$.

Prvo rješenje.

Označimo $V(a, b) = m$ i $D(a, b) = d$. Znamo da vrijedi $ab = md$. 2 boda

Iz jednakosti $m - d = \frac{md}{5}$ slijedi $5m - 5d = md$.

Sređivanjem imamo

$$\begin{aligned} 25 + 5m - 5d - md &= 25, \\ (5 + m)(5 - d) &= 25. \end{aligned}$$ 3 boda

Djelitelji broja 25 su ± 1, ± 5 i ± 25. Zbog $m > 0$ mora vrijediti $5 + m > 5$, pa je jedina mogućnost $5 + m = 25$, $5 - d = 1$. 2 boda

Prema tome, $m = 20$ i $d = 4$. 1 bod

Sada treba odrediti a i b takve da je $D(a, b) = 4$ i $V(a, b) = 20$. Kako su oba broja a i b nužno djeljiva s 4, a umnožak im je $ab = md = 80$, jedina moguća rješenja su $a = 4, b = 20$ i $a = 20, b = 4$. 2 boda

Napomena: Iz $5m - 5d = md$ možemo zapisati $m = \frac{5d}{5-d} = \frac{25}{5-d} - 5$, pa zaključiti da $5 - d$ mora biti pozitivan djelitelj broja 25. To znači da je $5 - d = 1$ i dalje dovršavamo na isti način.

Drugo rješenje.

Neka je $d = D(a, b)$. Tada postoje relativno prosti prirodni brojevi a' i b' takvi da je $a = a'd$ i $b = b'd$. Iz $D(a, b)V(a, b) = ab$ imamo $V(a, b) = da'b'$. 2 boda

Uvrštavajući u jednadžbu dobivamo

$$da'b' - d = \frac{a'b'd^2}{5},$$

odakle slijedi

$$a'b'(5 - d) = 5.$$ 4 boda

Sada vidimo da je broj $5 - d$ djelitelj broja 5 te je pozitivan (jer su svi ostali brojevi u jednakosti prirodni). Također, kako je d prirodan, nužno je $5 - d < 5$, pa preostaje samo mogućnost $5 - d = 1$, odnosno $d = 4$. 2 boda

Sada imamo da je $a'b' = 5$, pa su jedine mogućnosti za (a', b') parovi $(1, 5)$ i $(5, 1)$. 1 bod

Vraćajući u početne varijable, jedina rješenja za (a, b) su $(4, 20)$ i $(20, 4)$. 1 bod

Zadatak A-2.3.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$3\sqrt[3]{(14-x)^2} - 2\sqrt[3]{(14+x)^2} = 5\sqrt[3]{x^2 - 196}.$$

Rješenje.

Uočimo da $x = 14$ i $x = -14$ nisu rješenja jednadžbe.

Označimo $a = \sqrt[3]{14-x}$, $b = \sqrt[3]{14+x}$. Tada je $ab = \sqrt[3]{196 - x^2}$, te početnu jednadžbu možemo zapisati kao $3a^2 - 2b^2 = -5ab$. 3 boda

Kada bi b bio jednak nuli, tada bi x bio jednak -14, za što smo se uvjerili da nije rješenje jednadžbe. Dakle, $b \neq 0$. 1 bod

Dijeljenjem s b^2 imamo

$$3 \cdot \frac{a^2}{b^2} - 2 = -5 \cdot \frac{a}{b}.$$

Uvrštavanjem $t = \frac{a}{b}$ i sređivanjem slijedi $3t^2 + 5t - 2 = 0$. 2 boda

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = -2$. 2 boda

Za $\frac{\sqrt[3]{14-x}}{\sqrt[3]{14+x}} = \frac{1}{3}$ slijedi $\frac{14-x}{14+x} = \frac{1}{27}$, odnosno $x_1 = 13$. 1 bod

Slično, za $\frac{\sqrt[3]{14-x}}{\sqrt[3]{14+x}} = -2$ dobivamo drugo rješenje $x_2 = -18$. 1 bod

Napomena: Umjesto dijeljenja s b^2 i uvođenja supstitucije t, jednadžbu $3a^2-2b^2+5ab=0$ se može zapisati kao $(3a-b)(a+2b)=0$, što nosi 3 boda. Nakon toga slučaj $3a=b$ i dobivanje rješenja $x=13$ nosi 2 boda, a slučaj $a=-2b$ i $x=-18$ još 2 boda.

Zadatak A-2.4.

Neka je T težište trokuta ABC, a P polovište stranice $\overline{AC}$. Pravac kroz točku T paralelan s pravcem BC siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E.

Dokaži da jednakost $\sphericalangle AEC = \sphericalangle PTC$ vrijedi ako i samo ako vrijedi $\sphericalangle ACB = 90°$.

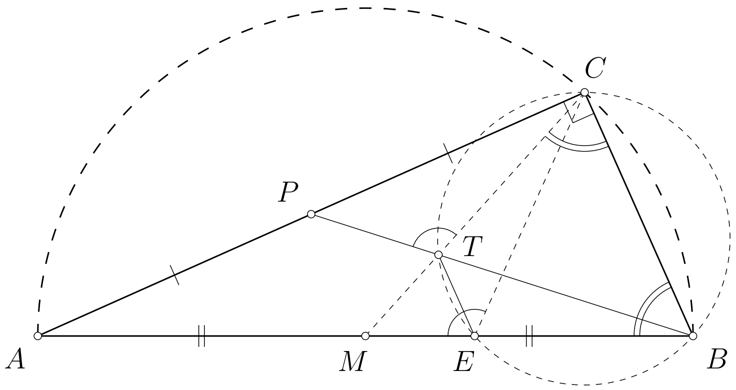
Rješenje.

Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$.

Neka je $\sphericalangle ACB = 90°$. Tada je M središte kružnice opisane trokutu ABC, pa vrijedi $|BM| = |CM| = |AM|$. Zato je trokut BCM jednakokračan. 1 bod

Budući da su pravci TE i BC paralelni, trokut ETM je također jednakokračan. Slijedi $|ME| = |MT|$. Prema S–K–S poučku zaključujemo da su trokuti CME i BMT sukladni. 2 boda

Sada slijedi $\sphericalangle AEC = \sphericalangle MEC = \sphericalangle MTB = \sphericalangle PTC$. 1 bod



Obratno, ako je $\sphericalangle AEC = \sphericalangle PTC$, onda je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BTC$, tj. četverokut $BETC$ je tetivan. 2 boda

Četverokut $BETC$ je tetivni trapez, pa je jednakokračan, tj. vrijedi $\sphericalangle EBC = \sphericalangle BCT$. 2 boda

Iz toga slijedi da je trokut BCM jednakokračan. 1 bod

Dakle, $|AM| = |BM| = |CM|$, pa je $\overline{AB}$ promjer kružnice opisane trokutu ABC, što povlači da je kut $\sphericalangle ACB$ pravi. 1 bod

Napomena: Dokaz da $\sphericalangle AEC = \sphericalangle PTC$ povlači $\sphericalangle ACB = 90°$ se sastoji od ekvivalencija, pa se isti argumenti mogu koristiti umjesto prvog dijela dokaza.

Zadatak A-2.5.

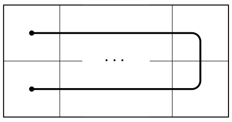
Neka je $n > 1$ prirodni broj. Na koliko se načina u polja ploče dimenzija $2 \times n$ mogu upisati brojevi $1, 2, \ldots, 2n$ tako da uzastopni brojevi budu u poljima sa zajedničkom stranicom?

Rješenje.

Obojimo polja ploče šahovski, tj. crnom i bijelom bojom tako da susjedna polja budu različite boje. (Ako je 1 na bijelom, onda je $2n$ na crnom polju i obratno.) 1 bod

Umjesto nizanja brojeva, razmišljajmo o povlačenju *linije* koja prolazi svakim poljem točno jednom. Vidjet ćemo da je linija zapravo određena svojim početnim poljem (1) i završnim poljem ($2n$).

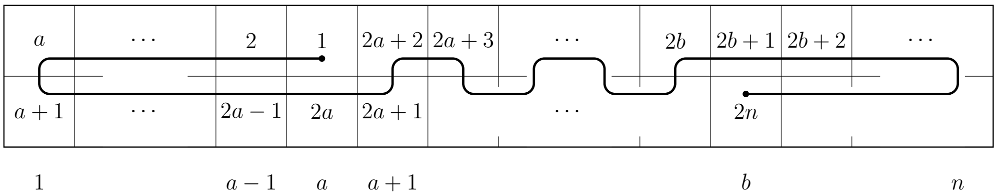
Ako su krajevi linije oba u prvom ili oba u zadnjem stupcu, onda postoji točno jedna linija. 1 bod



Ne postoji linija čiji su početak i kraj u istom stupcu koji nije na rubu ploče. U suprotnome bi linija morala samu sebe presjeći, tj. u neko polje ploče bismo upisali dva različita broja. 1 bod

Neka su krajevi linije u različitim stupcima, recimo u stupcu a i u stupcu b, pri čemu je $1 < a < b < n$. S obzirom na to da linija mora proći kroz polja prvog stupca, određeno je kako prolazi stupcima od 1 do a: od krajnje točke u stupcu a ravno istim retkom do prvog stupca, i zatim drugim retkom do stupca a. Analogno vrijedi i za dio linije koji prolazi stupcima od b do n.

Dio između stupaca a i b linija mora proći tako da prođe kroz oba polja stupca $a+1$, zatim oba polja stupca $a+2$ i tako dalje do stupca $b-1$. Dakle, za svaki odabir brojeva a i b imamo dvije linije kojima su krajevi u tim stupcima. 4 boda



Prvo polje možemo odabrati na $2n$ načina, a zadnje polje može biti bilo koje od $n-1$ polja suprotne boje osim onoga u istom stupcu s prvim poljem.

Tako dobijemo $2n \cdot (n-1)$ linija. 2 boda

Tom broju treba pridodati mogućnosti kada su krajnja polja u istom stupcu, prvom ili zadnjem. Za prvo polje postoje 4 mogućnosti, a zadnje polje je onda ispod ili iznad njega. Stoga je konačno rješenje $2n(n-1)+4$. 1 bod

Napomena: Učenik koji ne uzima u obzir mogućnost da početak i kraj linije mogu biti u istom stupcu na rubu ploče gubi 2 boda.

Napomena: Nije nužno spominjati bojenje ploče. Dovoljno je uočiti da parni i neparni brojevi imaju određena mjesta u njoj.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Duljina jedne stranice trokuta jednaka je aritmetičkoj sredini duljina drugih dviju stranica. Dokaži da mjera srednjeg (po veličini) kuta tog trokuta nije veća od $60°$.

Prvo rješenje.

Označimo duljine stranica trokuta s a, b i c, te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a \leqslant b \leqslant c$. 1 bod

To znači da postoji nenegativan realni broj x takav da je

$$a = b - x \qquad \text{i} \qquad c = b + x.$$ 2 boda

Neka je β mjera kuta nasuprot stranice duljine b. Moramo dokazati da je $\beta \leqslant 60°$.

Koristeći poučak o kosinusu računamo

$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{b^2 + 2x^2}{2b^2 - 2x^2}$$ 1 bod

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + 2x^2}{b^2 - x^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$ 3 boda

Zadnja nejednakost vrijedi zato što je $b^2 + 2x^2 \geqslant b^2 \geqslant b^2 - x^2 > 0$. 2 boda

Dakle, uistinu je $\beta \leqslant 60°$. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo duljine stranica trokuta s a, b i c, te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a \leqslant b \leqslant c$. To znači da je

$$b = \frac{a + c}{2}.$$ 1 bod

Neka je β mjera kuta nasuprot stranice duljine b. Moramo dokazati da je $\beta \leqslant 60°$.

Koristeći poučak o kosinusu računamo

$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{a^2 + c^2 - \frac{1}{4}(a^2 + 2ac + c^2)}{2ac}$$ 2 boda

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2 + 3c^2 - 2ac}{2ac} = \frac{3}{8}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}.$$ 3 boda

Budući da prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2, \qquad \text{2 boda}$$

slijedi

$$\cos \beta \geqslant \frac{3}{8} \cdot 2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

odakle je $\beta \leqslant 60^{\circ}$. 1 bod

Napomena: Svođenje na oblik $\cos \beta=\dfrac{3 a^{2}+3 c^{2}-2 a c}{8 a c}$ nosi 3 boda. Nakon toga 2 boda nosi zaključak da je dovoljno pokazati

$$\frac{3 a^{2}+3 c^{2}-2 a c}{8 a c} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Budući da su a i c pozitivni brojevi, ovaj uvjet je ekvivalentan nejednakosti

$$3 a^{2}+3 c^{2}-2 a c \geqslant 4 a c,$$

odnosno $a^{2}-2 a c+c^{2} \geqslant 0$. Budući da je $a^{2}-2 a c+c^{2}=(a-c)^{2}$, zaključujemo da posljednja nejednakost vrijedi, pa vrijedi i nejednakost koju je trebalo pokazati. Ovaj dio dokaza nosi 5 bodova.

Zadatak A-3.2.

Odredi najmanju i najveću vrijednost izraza

$$\frac{1}{\sin ^{4} x+\cos ^{2} x}+\frac{1}{\sin ^{2} x+\cos ^{4} x}.$$

Odredi sve realne brojeve x za koje se te vrijednosti postižu.

Prvo rješenje.

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
\sin ^{4} x+\cos ^{2} x & =\sin ^{2} x \cdot\left(1-\cos ^{2} x\right)+\cos ^{2} x \\
& =\sin ^{2} x+\cos ^{2} x \cdot\left(1-\sin ^{2} x\right) \\
& =\sin ^{2} x+\cos ^{4} x . && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Dakle, trebamo odrediti najmanju i najveću vrijednost izraza

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sin ^{4} x+\cos ^{2} x} & =\frac{2}{\sin ^{2} x \cdot\left(1-\cos ^{2} x\right)+\cos ^{2} x} && \text{1 bod} \\
& =\frac{2}{1-\frac{1}{4} \sin ^{2}(2 x)}=\frac{8}{4-\sin ^{2}(2 x)} . && \text{3 boda}
\end{aligned}$$

Za svaki realni broj t vrijedi $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, odnosno $0 \leqslant \sin ^{2} t \leqslant 1$. 1 bod

To znači da je $3 \leqslant 4-\sin ^{2}(2 x) \leqslant 4$ za svaki realni broj x. 1 bod

Zaključujemo da je najmanja vrijednost danog izraza jednaka 2 i ona se postiže ako i samo ako je x realan broj takav da je $\sin^2(2x) = 0$, tj. ako i samo ako je $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, za neki cijeli broj k. 1 bod

Slično, najveća vrijednost danog izraza jednaka je $\frac{8}{3}$ i ona se postiže ako i samo ako je x realan broj takav da je $\sin^2(2x) = 1$, tj. ako i samo ako je $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, za neki cijeli broj k. 1 bod

Drugo rješenje.

Isto kao i u prvom rješenju zaključimo da zapravo tražimo najmanju i najveću vrijednost izraza

$$\frac{2}{\sin^4 x + \cos^2 x}.$$ 3 boda

Primijetimo da je taj izraz jednak

$$\frac{2}{1 - \sin^2 x + \sin^4 x}.$$ 1 bod

Neka je $t = \sin^2 x \in [0, 1]$ i promotrimo kvadratnu funkciju $1 - t + t^2$. 1 bod

Primijetimo da je

$$1 - t + t^2 = t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$ 1 bod

Najmanja vrijednost ovog izraza je $\frac{3}{4}$ i postiže se za $t = \frac{1}{2}$. 1 bod

Najveća vrijednost ovog izraza je 1 i postiže se za $t = 0$ i $t = 1$. 1 bod

Konačno, zaključujemo da je najveća vrijednost danog izraza jednaka $\frac{8}{3}$ i ona se postiže ako i samo ako je $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, za neki cijeli broj k. 1 bod

Najmanja vrijednost danog izraza je 2 i ona se postiže ako i samo ako je $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, za neki cijeli broj k. 1 bod

Zadatak A-3.3.

U trokutu ABC, kut u vrhu C je tupi, a točka D je nožište visine iz vrha C. Točke P i Q nalaze se na dužini $\overline{AB}$ i vrijedi $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACQ = 90°$. Dokaži da je

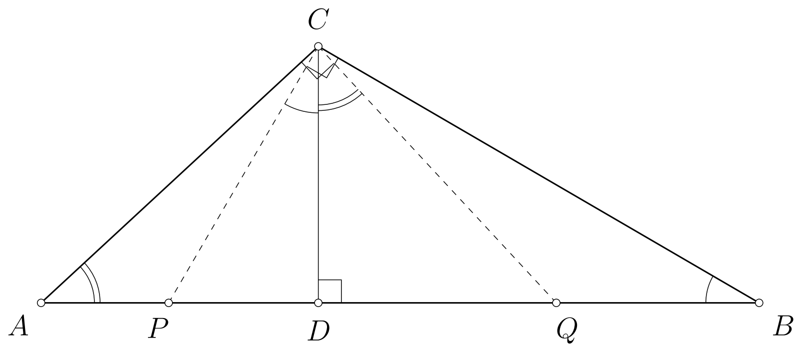
$$|AP| \cdot |DQ| = |PD| \cdot |QB|.$$

Prvo rješenje.

Tvrdnja zadatka je ekvivalentna sljedećim jednakostima

$$\begin{aligned}\frac{|AP|}{|PD|} &= \frac{|BQ|}{|QD|},\\ \frac{|AP|}{|PD|}+1 &= \frac{|BQ|}{|QD|}+1,\\ \frac{|AD|}{|PD|} &= \frac{|BD|}{|QD|}.\end{aligned}$$

3 boda



Primijetimo da je

$$\sphericalangle PCD = 90^\circ - \sphericalangle DPC = 90^\circ - \sphericalangle BPC = \sphericalangle CBP = \sphericalangle CBD.$$

2 boda

Dakle, pravokutni trokuti PCD i CBD su slični. 1 bod

Računamo

$$\frac{|PD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BD|}, \qquad \text{tj.} \quad |PD| = \frac{|CD|^2}{|BD|}.$$

2 boda

Analogno je $\sphericalangle DCQ = \sphericalangle DAC$, tj. pravokutni trokuti DCQ i DAC su slični. Računamo

$$\frac{|QD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|AD|}, \qquad \text{tj.} \quad |QD| = \frac{|CD|^2}{|AD|}.$$

1 bod

Konačno je

$$\frac{|AD|}{|PD|} = \frac{|AD|}{\frac{|CD|^2}{|BD|}} = \frac{|AD|\cdot|BD|}{|CD|^2} = \frac{|BD|}{\frac{|CD|^2}{|AD|}} = \frac{|BD|}{|QD|}.$$

1 bod

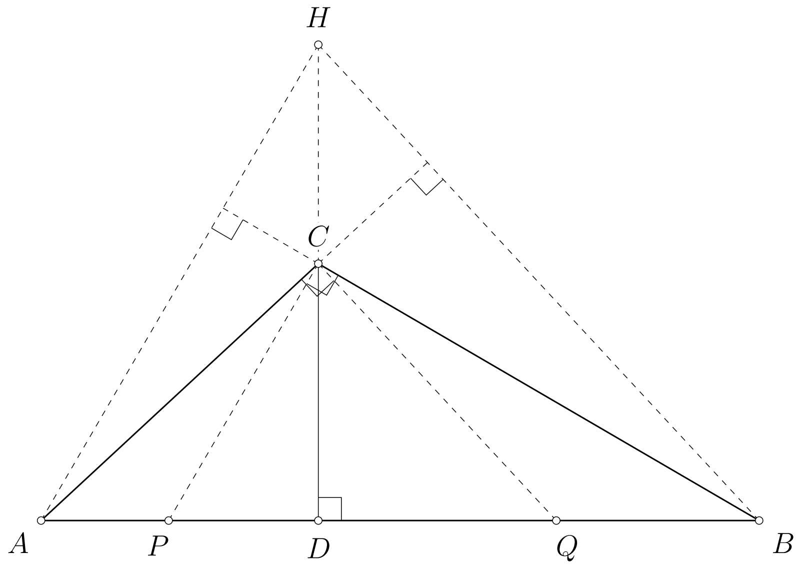
Napomena: Umjesto sličnosti, uz $\sphericalangle CAD = \alpha$ i $\sphericalangle CBD = \beta$, može se uočiti da je

$$|AD| : |CD| = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \text{i} \qquad |PD| : |CD| = \operatorname{tg}\beta,$$

pa je $|AD| : |PD| = \operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$. Taj zaključak nosi 3 boda. Analogno pokazujemo $|BD| : |QD| = \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{tg}\alpha$, što je isti omjer. To daje posljednja 2 boda.

Drugo rješenje.

Neka je H ortocentar trokuta ABC. Pravci AH i BC su okomiti, što znači da su dužine $\overline{AH}$ i $\overline{PC}$ paralelne. 2 boda



Prema Talesovom poučku o proporcionalnosti vrijedi

$$\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|HC|}{|CD|}.$$ 3 boda

Analogno je

$$\frac{|BQ|}{|QD|} = \frac{|HC|}{|CD|}.$$ 3 boda

Stoga je konačno $\dfrac{|AP|}{|PD|} = \dfrac{|BQ|}{|QD|}$, odnosno $|AP| \cdot |DQ| = |PD| \cdot |QB|$. 2 boda

Treće rješenje.

Neka je $a = |BC|$, $b = |CA|$, $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle CBA$.

Kao u prvom rješenju, zaključujemo da je

$$\sphericalangle DCQ = \sphericalangle BAC = \alpha \qquad \text{i} \qquad \sphericalangle PCD = \sphericalangle CBA = \beta.$$ 2 boda

Iz pravokutnih trokuta CAD i CPD redom imamo $|CD| = b \sin\alpha$ i

$$|PD| = |CD| \operatorname{tg}\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta}.$$ 2 boda

Prema poučku o sinusima za trokut APC imamo

$$\frac{|AP|}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{b}{\sin(90^\circ + \beta)},$$ 2 boda

iz čega slijedi

$$|AP| = b \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}. \qquad \text{2 boda}$$

Analogno je

$$|DQ| = a \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} \qquad \text{i} \qquad |QB| = a \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}, \qquad \text{2 boda}$$

pa je očito $|AP| \cdot |DQ| = |PD| \cdot |QB|$.

Napomena: Na drugačiji način možemo računati

$$|AP| = |AD| - |PD| = b\cos\alpha - b \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} = b \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

Prve dvije jednakosti nose po 1 bod, a primjena adicijske formule 2 boda.

Zadatak A-3.4.

Odredi sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva za koje je $(a+b^2)(a^2+b)$ potencija broja 2.

Rješenje.

Kako je $(a+b^2)(a^2+b)$ potencija broja 2, zaključujemo da su oba broja $a+b^2$ i a^2+b potencije broja 2. Primijetimo da su oba ta broja jednaka barem 2, pa postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $a+b^2 = 2^m$ i $a^2+b = 2^n$. 1 bod

Kako je broj $a+b^2$ paran, zaključujemo da su brojevi a i b iste parnosti. 1 bod

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a \leqslant b$, što znači da je $n \leqslant m$. 1 bod

Računamo

$$2^n(2^{m-n}-1) = 2^m - 2^n = b^2 - a^2 - (b-a) = (b-a)(b+a-1). \qquad \text{2 boda}$$

Budući da su a i b iste parnosti, zaključujemo da je broj $b+a-1$ neparan. 1 bod

To znači da 2^n dijeli $b-a$, a kako je $2^n = a^2+b$, zaključujemo da je broj a^2+b djelitelj broja $b-a$. 1 bod

Ako je $b-a>0$, onda je $a^2+b \leqslant b-a$, što je kontradikcija. 1 bod

Dakle, vrijedi $a=b$, što znači da je $a^2+a = a(a+1)$ potencija broja 2. 1 bod

Konačno, oba broja a i $a+1$ su potencije broja 2, što je moguće jedino ako je $a=1$. Stoga je jedino rješenje $(a,b) = (1,1)$. 1 bod

Zadatak A-3.5.

Baza piramide je pravilni n-terokut. Svaka stranica baze obojena je crnom bojom, dok su svaka dijagonala baze i svaki pobočni brid piramide obojeni ili crvenom ili plavom bojom. Odredi najmanji prirodni broj $n \geqslant 4$ za koji nužno postoji trokut čiji vrhovi su vrhovi piramide i kojemu su sve tri stranice jednake boje.

Rješenje.

Odgovor je $n = 9$. 1 bod

Označimo vrh piramide V. Ako je $n = 9$, onda po Dirichletovom principu zaključujemo da je barem pet pobočnih bridova obojeno istom bojom. Bez smanjenja općenitosti neka je ta boja crvena i neka su to bridovi $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ i $\overline{VE}$. 1 bod

Ako su X i Y različite točke iz skupa $\{A, B, C, D, E\}$ takve da je dužina $\overline{XY}$ crvena, onda stranice trokuta XYV imaju istu boju. 1 bod

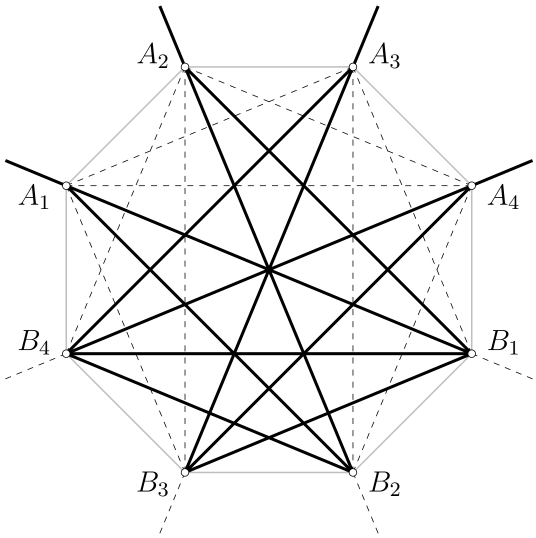
U suprotnom su sve dužine određene točkama A, B, C, D, E plave ili crne. Među tih pet točaka moraju postojati dvije koje nisu susjedni vrhovi deveterokuta, a između kojih se ne pojavljuje nijedna od tih točaka. Pretpostavimo da su to A i E, te da su točke A, B, C, D, E poredane tih redom u smjeru kazaljke na satu. 2 boda

Dužine $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ i $\overline{EA}$ su dijagonale deveterokuta u bazi piramide pa su sve plave boje. Dakle, trokut ACE je jednobojan. 1 bod

Pokažimo sada da za $n = 8$ postoji bojenje dijagonala baze piramide i pobočnih bridova za koje ne postoji jednobojan trokut. Uočimo da od tog primjera uklanjanjem vrhova u bazi dobivamo primjer piramide s istim svojstvom za $n < 8$.

Neka su vrhovi pravilnog osmerokuta koji čini bazu piramide redom (npr. u smjeru kazaljke na satu) $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$. Neka su pobočni bridovi $\overline{VA_i}$ plavi, a $\overline{VB_i}$ crveni, za $i = 1, 2, 3, 4$. Sve dijagonale osmerokuta u bazi kojima su krajnje točke u skupu $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ neka su crvene, a sve one dijagonale kojima su krajnje točke u skupu $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ neka su plave. Primijetimo da smo na taj način osigurali da niti jedan trokut čiji je neki vrh jednak V nije jednobojan. 1 bod

Za $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ neka je boja dužine $\overline{A_iB_j}$ plava ako se i i j istovremeno nalaze u skupu $\{1, 2\}$ ili u skupu $\{3, 4\}$. U suprotnom, neka je boja dijagonale $\overline{A_iB_j}$ crvena. 1 bod



Pokažimo da niti jedan trokut čiji se vrhovi nalaze u vrhovima baze nije jednobojan. Promotrimo npr. trokut $A_iB_jA_k$ (analogno je za trokut $B_iA_jB_k$). Ako je $|i - k| = 1$, onda je dužina $\overline{A_iA_k}$ crna pa trokut sigurno nije jednobojan. Ako je $|i - k| > 1$, onda su dužine $\overline{A_iB_j}$ i $\overline{A_kB_j}$ različitih boja pa trokut opet nije jednobojan. 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo kompleksan broj

$$a_n = (1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

Izračunaj

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{2019} - a_{2020}|.$$

Rješenje.

Za svaki $n \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ imamo

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n+1}| &= \left|a_n - a_n\left(1+\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right)\right| && \text{2 boda} \\ &= |a_n| \cdot \left|\frac{i}{\sqrt{n+1}}\right| = \frac{|a_n|}{\sqrt{n+1}}. && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} |a_n| &= |1+i| \cdot \left|1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right| \cdot \left|1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right| \cdots \left|1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right| && \text{1 bod} \\ &= \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{3}} \cdots \sqrt{1+\frac{1}{n}} && \text{1 bod} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \cdots \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} && \text{1 bod} \\ &= \sqrt{n+1}. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Zato je $|a_n - a_{n+1}| = 1$ za sve $n \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$. 1 bod

Konačno je

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{2019} - a_{2020}| = 2019 \cdot 1 = 2019. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak A-4.2.

Skup svih točaka (x, y) za koje vrijedi $y^2+2xy+40|x| = 400$ dijeli ravninu na nekoliko dijelova od kojih je samo jedan omeđen. Odredi površinu tog dijela ravnine.

Rješenje.

Primijetimo da je $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ ekvivalentno sa

$$y^2 + 2xy + x^2 = x^2 - 40|x| + 400,$$

odnosno

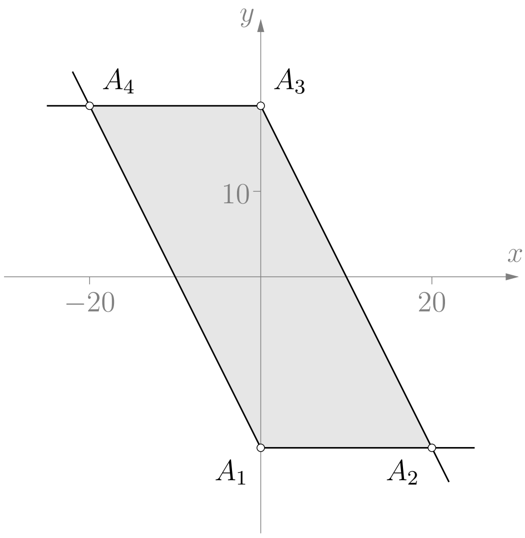
$$(y + x)^2 = (|x| - 20)^2, \qquad \text{2 boda}$$

pa je $y + x = \pm(|x| - 20)$. 1 bod

Skup svih danih točaka su zapravo četiri polupravca određena sljedećim jednadžbama:

$y = -x + (-x - 20) = -2x - 20$	za $x \leqslant 0$,	1 bod
$y = -x + (x - 20) = -20$	za $x \geqslant 0$,	1 bod
$y = -x - (-x - 20) = 20$	za $x \leqslant 0$,	1 bod
$y = -x - (x - 20) = -2x + 20$	za $x \geqslant 0$,	1 bod

a jedini omeđeni dio ravnine koji određuju je paralelogram čiji su vrhovi $A_1(0, -20)$, $A_2(20, -20)$, $A_3(0, 20)$ i $A_4(-20, 20)$. 2 boda



Njegova površina je $|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| = 20 \cdot 40 = 800$. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Na kocki stranice duljine 1 istaknuta je mreža koja se sastoji od 14 točaka i 36 dužina. Točke su vrhovi kocke i središta njezinih strana. Dužine su svi bridovi kocke i još po četiri dužine na svakoj strani kocke koje spajaju središte te strane s njezinim vrhovima.

Kolika je duljina najkraćeg puta po toj mreži koji prolazi kroz svih 14 točaka?

Rješenje.

Dana mreža je sastavljena od 14 točaka, 12 dužina duljine 1 te 24 dužine duljine $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1 bod

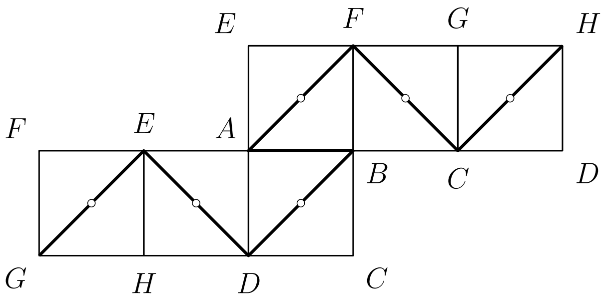
Svaki put koji prolazi kroz svih 14 točaka mora se sastojati od barem 13 dužina. 2 boda

Vrhova u središtima strana kocke ima 6, a kako se svakim mora proći točno jednom, zaključujemo da se na traženom putu nalazi točno 12 bridova duljine $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3 boda

Stoga duljina najkraćeg puta koji prolazi kroz svih 14 točaka mora iznositi barem $6\sqrt{2}+1$. 1 bod

Preostaje pokazati da postoji takav put. Vrhove kocke označimo $ABCDEFGH$.

Primjer puta duljine $6\sqrt{2}+1$ koji prolazi svim točkama mreže je dan na slici.



3 boda

Zadatak A-4.4.

Dani su cijeli brojevi a, b, c i d. Dokaži da je broj parova (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi $x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$ beskonačan ako i samo ako je $a^2 - 4b = c^2 - 4d$.

Prvo rješenje.

Neka su x i y cijeli brojevi. Jednadžba

$$x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$$

nadopunjavanjem do potpunih kvadrata prelazi u

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 4b}{4} = \left(y + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2 - 4d}{4}.$$ 3 boda

Ako je $a^2 - 4b = c^2 - 4d$, onda imamo beskonačno mnogo parova (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Naime, za bilo koji cijeli broj x jednakost je zadovoljena za

$$y = x + \frac{a - c}{2},$$ 1 bod

te je tako definiran broj y cijeli jer iz $a^2 - 4b = c^2 - 4d$ slijedi da a i c moraju biti iste parnosti. 1 bod

Ako je $a^2 - 4b \neq c^2 - 4d$, onda početnu jednadžbu pomnožimo sa 4 i primjenom razlike kvadrata zapišemo u obliku

$$(2x + a - 2y - c)(2x + a + 2y + c) = (a^2 - 4b) - (c^2 - 4d).$$ 2 boda

Ne desnoj strani jednakosti je cijeli broj različit od nule, koji se može prikazati kao umnožak dva broja na samo konačno mnogo načina. Svaki takav rastav daje linearni sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koji ima jedinstveno rješenje. Dakle, u tom slučaju sigurno nema beskonačno mnogo rješenja početne jednadžbe. 3 boda

Drugo rješenje.

Trebamo pokazati da jednakost

$$a^2 - 4b = c^2 - 4d$$

vrijedi ako i samo ako za beskonačno mnogo cijelih brojeva n postoje cijeli brojevi x i y takvi da je

$$x^2 + ax + b = n \qquad \text{i} \qquad y^2 + cy + d = n.$$ 1 bod

Neka je $a^2 - 4b = c^2 - 4d = D$. Rješenja kvadratnih jednadžbi

$$x^2 + ax + b = n \qquad \text{i} \qquad y^2 + cy + d = n.$$

su

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{D + 4n}}{2} \qquad \text{i} \qquad y_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{D + 4n}}{2}.$$ 1 bod

Uočimo da su brojevi a, c i D iste parnosti, pa su navedena rješenja cjelobrojna ako i samo ako je broj $D + 4n$ kvadrat cijelog broja. 1 bod

Trebamo pokazati da postoji beskonačno cijelih brojeva n za koje je $D + 4n$ kvadrat cijelog broja. No, to je očito jer je za bilo koji cijeli broj N iste parnosti kao D broj

$$n = \frac{N^2 - D}{4}$$ 1 bod

cijeli i vrijedi $D + 4n = N^2$. 1 bod

Pretpostavimo sada da postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva n za koje postoje cijeli brojevi x i y takvi da je

$$x^2 + ax + b = n \qquad \text{i} \qquad y^2 + cy + d = n.$$

To znači da su za beskonačno mnogo cijelih brojeva n diskriminante $a^2 - 4b + 4n$ i $c^2 - 4d + 4n$ kvadrati cijelih brojeva, tj. postoje cijeli brojevi A i C takvi da je

$$\begin{aligned} a^2 - 4b + 4n &= A^2 \\ c^2 - 4d + 4n &= C^2. \end{aligned}$$ 2 boda

No, ovo znači da postoji beskonačno mnogo parova (A, C) cijelih brojeva takvih da je

$$(a^2 - 4b) - (c^2 - 4d) = A^2 - C^2 = (A - C)(A + C).$$ 1 bod

Ako ovaj izraz nije jednak nuli, imamo konačno mnogo mogućnosti za $A - C$ i također konačno mnogo mogućnosti za $A + C$, tj. konačno mnogo mogućnosti za par (A, C) cijelih brojeva, što je kontradikcija. Dakle, uistinu je $a^2 - 4b = c^2 - 4d$. 2 boda

Zadatak A-4.5.

U prostoriji se nalazi n kutija visina $1, 2, 3, \ldots, n$ koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše 1 viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?

Prvo rješenje.

Za raspored kutija ćemo reći da je *dobar* ako Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju.

Neka je a_n traženi broj dobrih rasporeda kutija za prirodni broj n.

Za svaki dobar raspored n kutija uklanjanjem najviše kutije dobivamo dobar raspored $n-1$ kutija. 1 bod

Obratno, ako je dan dobar raspored kutija visina $1, 2, \ldots, n-1$, onda kutiju visine n možemo dodati na točno dva mjesta kako bismo i dalje dobili dobar raspored: možemo ju dodati na početak niza ili točno iza kutije visine $n-1$. 4 boda

Stoga je $a_n = 2a_{n-1}$. 2 boda

Iz toga slijedi da je

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} = \cdots = 2^{n-1} a_1.$$ 2 boda

Budući da je $a_1 = 1$, zaključujemo da je $a_n = 2^{n-1}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ispiše sve mogućnosti za $n = 1, 2, 3$ i točno odredi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i $a_3 = 4$, te na temelju tih primjera nasluti da je $a_n = 2^{n-1}$, treba dobiti 2 boda. Odgovor bez ikakvog obrazloženja nosi 1 bod.

Drugo rješenje.

Za raspored kutija ćemo reći da je *dobar* ako Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju. Kutiju visine n ćemo jednostavno zvati *kutija* n.

Neka je a_n traženi broj dobrih rasporeda kutija za prirodni broj n. Očito je $a_1 = 1$.

Kako bismo odredili vrijednost a_n, razmotrimo gdje se sve može nalaziti najviša kutija. 1 bod

Kutiju n uvijek možemo staviti na prvo mjesto, bez obzira na raspored preostalih kutija. Naime, Fiko s nje može skočiti na bilo koju drugu kutiju, budući da su sve ostale niže od n. Dakle, za svaki mogući dobri raspored $n-1$ kutija dobijemo jedan dobri raspored n kutija u kojemu je kutija n na prvom mjestu. 2 boda

Pretpostavimo da se kutija n nalazi na drugom mjestu. Primijetimo da tada na prvom mjestu mora biti kutija $n-1$; u suprotnom mačak Fiko nikako ne može s prve kutije skočiti na drugu. Dakle, za svaki mogući dobri raspored $n-2$ kutija dobijemo jedan dobri raspored n kutija u kojemu je kutija n na drugom mjestu. 1 bod

Analogno, ako se kutija n nalazi na k-tom mjestu, gdje je $k \in \{3, 4, \ldots, n\}$, onda se na mjestu $k-1$ mora nalaziti kutija $n-1$, na mjestu $k-2$ kutija $n-2$, itd. na mjestu 1 kutija $n-k+1$. Preostalih $n-k$ kutija možemo poredati u bilo koji od a_{n-k} dobrih rasporeda. 2 boda

Stoga vrijedi

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1.$$ 1 bod

Budući da je $a_1 = 1$, sada možemo računati $a_2 = 2$, $a_3 = 2 + 1 + 1 = 4$ i postavljamo slutnju da je $a_n = 2^{n-1}$. 2 boda

Tu tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Bazu već imamo, a ako pretpostavimo da je $a_k = 2^{k-1}$ za sve $k < n$, prema dobivenoj rekurzivnoj relaciji slijedi

$$a_n = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \cdots + 2^0 + 1 = 2^{n-1}.$$ 1 bod

Treće rješenje.

Primijetimo da pozicija najviše kutije, tj. kutije n, jedinstveno određuje raspored kutija lijevo od nje. Naime, ispred kutije n može biti jedino kutija $n-1$, a ispred nje onda jedino kutija $n-2$ itd. 2 boda

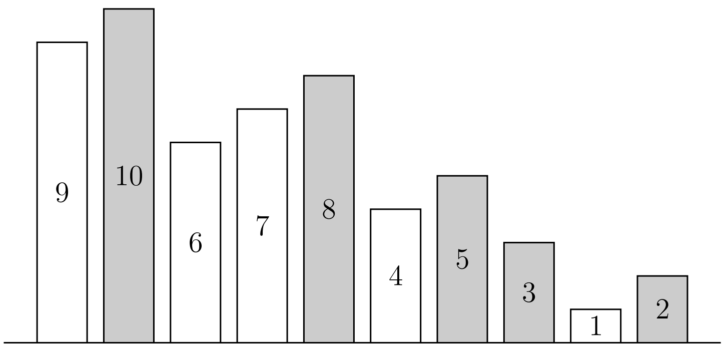
Za preostale kutije možemo razmišljati na isti način. Preciznije, neka se kutija n nalazi na poziciji $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. To znači da točno znamo raspored kutija $n-1$, $n-2$, $\ldots$, $n-k+1$. Preostalih $n-k$ kutija se nalazi na pozicijama $k+1, k+2, \ldots, n$ i one su raspoređene po istom pravilu. 2 boda

Pridružimo svakom rasporedu n kutija n-znamenkasti binarni niz kojemu je na zadnjem mjestu uvijek 1. 2 boda

Svako mjesto s kojeg Fiko mora skočiti dolje označimo s 1, a svako gdje mora skočiti gore s 0. 2 boda

Vrijedi i obratno, svaki takav binarni niz odgovara točno jednom rasporedu kutija po kojima Fiko može skakati. Prva jedinica u tom nizu određuje poziciju kutije visine n. Kao što smo vidjeli, sve kutije lijevo od te pozicije su onda jedinstveno određene. Druga jedinica neka određuje mjesto najviše kutije od preostalih, i tako dalje. 1 bod

Na slici je primjer koji odgovara binarnom nizu 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1.



Dakle, traženih rasporeda kutija ima jednako kao i binarnih nizova duljine n kojima je na zadnjem mjestu 1, odnosno ima ih 2^{n-1}. 1 bod