Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

1. Ako su a, b, c duljine stranica pravokutnog trokuta, dokažite da vrijedi
(10)

$$(a^4 + b^4 + c^4)^2 = 2(a^8 + b^8 + c^8) \ .$$

2. Odredite sve prirodne brojeve a i n takve da je
(10)

$$a^n + a^{n+1} + a^{n+2} + a^{n+3} + a^{n+4} + a^{n+5} = 2016 \ .$$

3. U jednakokračnom trokutu nalaze se dvije kružnice. Prva ima polumjer R i dodiruje
(10) sve stranice trokuta, a drugoj je polumjer r i dodiruje krakove trokuta i prvu kružnicu. Odredite opseg trokuta.

4. U svakoj od pet košara nalazi se određeni broj kuglica. Iz prve košare prebacimo
(10) jednu petinu kuglica u drugu košaru. Zatim iz druge košare prebacimo jednu petinu kuglica u treću košaru. Nakon toga iz treće košare petinu kuglica prebacimo u četvrtu košaru. Zatim petinu kuglica iz četvrte košare prebacimo u petu košaru. Na kraju iz pete košare prebacimo petinu kuglica u prvu košaru. Sada u svakoj kutiji imamo točno 32 kuglice! Koliko je kuglica bilo u svakoj pojedinoj košari na početku?

5. Odredite posljednje dvije znamenke broja čiji kvadrat završava sa 44.
(10)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

1. (10) Od svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju jednakost

$$\left|\frac{z-i}{z-3i}\right| = \frac{1}{2} ,$$

odredite onaj koji ima najveći modul.

2. (10) Za prirodni broj kažemo da je palindrom ako je u dekadskom zapisu isti pročitan s lijeva i s desna. Palindrome možemo poredati po veličini. Odredite 2010.–ti palindrom po redu.

3. (10) U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$4^{2x+\sqrt{-1+x^2}} - 5 \cdot 2^{2x-1+\sqrt{-1+x^2}} = 6 .$$

4. (10) Kvadrat i jednakostraničan trokut upisani su u kružnicu polumjera 1 tako da imaju jedan vrh zajednički. Odredite površinu zajedničkog dijela kvadrata i trokuta.

5. (10) Iz mjesta A u mjesto B krenuo je autobus. 50 minuta kasnije iz mjesta A je krenuo automobil koji je u mjesto B stigao 10 minuta prije autobusa. Da su krenuli istovremeno jedan iz mjesta A, a drugi iz mjesta B (jedan drugome u susret), sreli bi se nakon jednog sata i 12 minuta. Vozi li istim putem i istom brzinom, koliko vremena će trebati autobusu da se vrati iz mjesta B u mjesto A?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

1. (10) Odredite sve četveroznamenkaste prirodne brojeve djeljive s 45 kojima je razlika kvadrata znamenke stotica i znamenke desetica jednaka 24.

2. (10) Riješite nejednadžbu
$$\cos(2010x + y) \geq y^4 - 2y^2 + 2.$$

3. (10) Matko i njegovi prijatelji, igrajući se uz obalu mora, kod jedne palme (udaljene od mora 20–ak metara) iskopali su kutijicu u kojoj je bio pažljivo umotan papirus. Odmotali su papirus na kojem je pisalo: "Palma kod koje stojiš je ishodište koordinatnog sustava kojemu je os apscisa paralelna s obalom mora. Kreni od palme, tako da ti je more iza leđa, 5 jedinica po pravcu koeficijenta smjera $\frac{4}{3}$. Doći ćeš u točku A. Iz točke A okomito na prethodni pravac stižeš do točke B koja pripada pravcu $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$. Točka C je na pravcu $x - 2y - 10 = 0$ i vrijedi da je zbroj udaljenosti od nje do točaka A i B najmanji moguć. U težištu trokuta ABC zakopano je blago."

   Nađite koordinate točke u kojoj je zakopano blago.

4. (10) U trapezu $ABCD$ s okomitim dijagonalama poznate su duljine osnovica $|AB| = a = 4$, $|DC| = c = 3$. Ako krak $\overline{BC}$ s osnovicom a zatvara kut $60°$, kolika je njegova duljina?

5. (10) Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da je
$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2.$$

   Dokažite da je $ABCD$ paralelogram.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 29. travnja 2010.

1. (10) Neka su a i b prirodni brojevi veći od 1 takvi da su brojevi $\log_b a$, $\log_{2b} 2a$ i $\log_{4b} 4a$ (u tom poretku) uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokažite da su brojevi a i b jednaki.

2. (10) Neka je ABC jednakostraničan trokut. Na pravcu AB odabrana je točka P tako da točka A leži između točke P i točke B. Neka je a duljina stranice trokuta ABC, r_1 polumjer upisane kružnice trokutu PAC i r_2 polumjer kružnice pripisane trokutu PBC u odnosu na stranicu BC. Odredite zbroj $r_1 + r_2$ kao funkciju od a.

3. (10) Koliko ima jednakokračnih trapeza, s osnovicama različitih duljina, kojima su duljine stranica cjelobrojne, a opseg im je 2010?

4. (10) Neka je kompleksan broj $z = (a + \cos\theta) + \left(\sqrt{3}\,a - \sin\theta\right) i$. Odredite za koje realne brojeve a je $|z| \leq 3$, za sve $\theta \in \mathbb{R}$.

5. (10) U trokutu ABC dana je duljina osnovice $|AB| = 2a$. Dokažite da vrh C, za svaki izbor kutova α, β (na osnovici) takvih da je $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -9$, leži na istoj hiperboli. Odredite njezinu veliku i malu poluos.