

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

1. Za pozitivne realne brojeve a i b definira se $a \star b = \frac{a-b}{a+b}$. Koliko je

$$\frac{(a \star b) + 1}{(b \star a) - 1} + \frac{(a \star b) + 2}{(b \star a) - 2} + \dots + \frac{(a \star b) + k}{(b \star a) - k} + \dots + \frac{(a \star b) + 2020}{(b \star a) - 2020} \quad ?$$

2. Riješite nejednadžbu $\left(1 - \frac{4x^3 - x}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0$.

3. Neka su a , b , c i d realni brojevi različiti od nule takvi da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ i $a + b + c + d + abcd = 0$. Izračunajte $\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$.

4. Gađajući u metu Karlo je nekoliko puta pogodio devetku, nekoliko puta osmicu. Sedmicu je pogodio dvostruko manje puta nego devetku, a broj pogodaka u peticu je za tri manji nego u osmicu. Ukupno je sakupio 200 bodova.

Koliko je puta Karlo gađao u metu ako nijednom nije promašio niti je pogodio neki drugi broj? (Pogodak u devetku donosi 9 bodova, u osmicu 8 bodova, ...)

5. Unutarnji se kutovi trokuta odnose kao $2 : 3 : 7$. Odredite duljinu najdulje stranice trokuta, ako najkraća stranica ima duljinu 1 cm.

* * *

6. U nizu brojeva

20, 202, 2020, 20202, 202020, ...

svaki se sljedeći broj dobije dopisivanjem znamenke 2 ili 0 prethodnom broju, naizmjenice. Izračunajte zbroj znamenaka prvih sto brojeva toga niza koji su djeljivi s 202.

7. Duljine stranica šiljastokutnog trokuta su tri broja od kojih je najveći za četiri veći od najmanjeg, a srednji po veličini je aritmetička sredina preostala dva. Visina trokuta povučena na srednju stranicu po duljini dijeli trokut na dijelove čije su površine u omjeru $3 : 2$. Odredite opseg zadanog trokuta.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

1. Odredite najmanji i najveći cijeli broj x za koji je broj $x^4 - 2021x^2 + 2020$ negativan.
2. Funkcija $f(x) = x^2 + px + q$ poprima negativne vrijednosti samo za $x \in \langle -3, 14 \rangle$. Koliko cjelobrojnih vrijednosti iz skupa $[-100, -10]$ može poprimiti funkcija f ?
3. Do vrha stepeništa ima 8 stuba. Na koliko načina možemo stići na vrh ako se možemo penjati po jednu stubu ili po dvije stube?
4. Duljine stranica trokuta ABC su $|BC| = 27$, $|AC| = 36$, $|AB| = 45$. Neka su P i Q redom točke na stranicama \overline{AB} i \overline{BC} takve da je $|AP| = |BQ|$ i $AC \parallel PQ$. Izračunajte površinu trokuta PBQ .
5. Ako je $x = 2017 \cdot 2018 \cdot 2021 \cdot 2022 + 4$, izračunajte $\sqrt{x} - 2020^2$.

* * *

6. Pravokutnik $ABCD$, u kojem je $|AB| > |AD|$, zarotira se oko vrha D u pravokutnik $EFGD$ tako da se vrh A preslika u točku E na dijagonali \overline{BD} . Sjecište stranica \overline{DC} i \overline{EF} je točka H . Površina pravokutnika $ABCD$ odnosi se prema površini četverokuta $BCHE$ kao $5 : 2$. Ako je $\varphi = \sphericalangle ADB$, izračunajte $\frac{\sin^2 \varphi + 1}{\cos^2 \varphi + 1}$.
7. Luka je predložio Mili, Niki i Tini da zajedno rješavaju zadatke. Do tog je trenutka svaka od djevojaka već riješila određeni broj zadataka i to različitih u odnosu na ostale. Djevojke su odlučile prihvatiti Lukin prijedlog samo ako otkrije koliko je svaka od njih tri već riješila zadataka. Zbroj brojeva zadataka koje su Mila i Nika riješile i umnoška tih brojeva je 14. Za Milu i Tinu taj zbroj iznosi 11, a za Niku i Tinu 19. Koje brojeve Luka mora dobiti?

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

1. Za kompleksne brojeve z i w vrijedi $|z + w| = \sqrt{3}$ i $|z| = |w| = 1$. Izračunajte $|z - w|$.

2. Riješite sustav jednačbi

$$\begin{aligned}y^{2020x} &= 10, \\6060x + 2 \log y &= 7.\end{aligned}$$

3. Riješite nejednačbu

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi x) - 1}{\operatorname{tg}(\pi x) + 1} > 1.$$

4. Tena i Ante igraju igru: prvo Tena kaže broj 0, pa Ante kaže broj za 1 veći. Zatim Tena kaže broj za 2 veći od Antinog, Ante kaže broj za 3 veći od Teninog ...

Igra završava kad netko kaže broj veći od 5050. Koji je to broj? Tko će pobijediti?

5. Duljine dviju stranica trokuta su 7 cm i 4 cm. Kut nasuprot dulje stranice je dva puta veći od kuta nasuprot kraće stranice. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

* * *

6. Odredite $\cos x$ ako je

$$\log_{27} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = \frac{1}{3} + \log_3 (-\cos x).$$

7. Dječje igralište ima oblik trokuta čiji je opseg 36 m, a površina $30\sqrt{3} \text{ m}^2$. Ako je mjera jednog kuta 60° , odredite duljine stranica tog igrališta.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

1. Riješite nejednadžbu $3^{3x} + 3^4 \leq 3^{2x+2} + 3^{x+2}$.
2. Pravci s jednadžbama $y = k_1x + 2$ i $y = k_2x - 3$ su tangente parabole s jednadžbom $y^2 = 2px$, $p > 0$, a zatvaraju kut od 45° . Odredite jednadžbe svih takvih parabola.
3. Ako je $26! = 403\,291\,x61\,126\,605\,635\,58x\,y00\,000$, odredite znamenke x i y .
4. Za svaki prirodni broj n , zbroj prvih n članova nekog niza je $S_n = 2.5n^2 - 4.5n$. Koji članovi tog niza poprimaju vrijednosti između 10 085 i 10 095?
5. Dana su tri paralelna pravca a , b i c . Na pravcu a istaknute su točke A , B i C , na pravcu b točke D , E , F i G , a na pravcu c točke H , I , J , K i L . Koliko je najviše trokuta određeno točkama iz skupa $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$?

* * *

6. Odredite površinu skupa svih točaka pridruženih kompleksnim brojevima z za koje vrijedi

$$|z| \leq \left| \frac{1}{z} \right| \quad \text{i} \quad \frac{28277\pi}{12} \leq \arg \left(\frac{z^{2020}}{1+i} \right) \leq \frac{40397\pi}{12}.$$

7. Riješite nejednadžbu

$$\log_{\sqrt{5}}(3^{x^2-x-1} + 2) + \log_5(3^{x^2-x-1} + 2) + \log_{25}(3^{x^2-x-1} + 2) + \\ \log_{625}(3^{x^2-x-1} + 2) + \dots + \log_{5^{2^k}}(3^{x^2-x-1} + 2) + \dots \leq 4.$$