ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Za pozitivne realne brojeve a i b definira se $a \star b = \dfrac{a-b}{a+b}$. Koliko je

$$\frac{(a \star b)+1}{(b \star a)-1}+\frac{(a \star b)+2}{(b \star a)-2}+\ldots+\frac{(a \star b)+k}{(b \star a)-k}+\ldots+\frac{(a \star b)+2020}{(b \star a)-2020} \quad ?$$

Rješenje.

$$\frac{(a \star b)+1}{(b \star a)-1}=\frac{\frac{a-b}{a+b}+1}{\frac{b-a}{b+a}-1}=\frac{a-b+(a+b)}{b-a-(b+a)}=\frac{2a}{-2a}=-1$$ 2 boda

$$\frac{(a \star b)+2}{(b \star a)-2}=\frac{\frac{a-b}{a+b}+2}{\frac{b-a}{b+a}-2}=\frac{a-b+2(a+b)}{b-a-2(b+a)}=\frac{3a+b}{-b-3a}=-1$$ 1 bod

$$\ldots$$

$$\frac{(a \star b)+k}{(b \star a)-k}=\frac{\frac{a-b}{a+b}+k}{\frac{b-a}{b+a}-k}=\frac{a-b+k(a+b)}{b-a-k(b+a)}=\frac{(k+1)a+(k-1)b}{(1-k)b-(1+k)a}=-1$$ 2 boda

Svi pribrojnici imaju vrijednost -1 iz čega slijedi da je rješenje -2020. 1 bod

Napomena: Ako je učenik dobio točan rezultat bez provjere općeg slučaja, dodijeliti 4 boda.

Zadatak B-1.2.

Riješite nejednadžbu $\left(1-\dfrac{4x^3-x}{x-2x^2}\right)^{-3}>0.$

Prvo rješenje.

Uočimo da se brojnik i nazivnik razlomka u zagradi mogu faktorizirati i skratiti, pa dobivamo

$$\left(1+\frac{x(2x-1)(2x+1)}{x(2x-1)}\right)^{-3}>0,$$ 2 boda

a odatle uz uvjet $x\neq 0$, $x\neq \frac{1}{2}$ 1 bod

$(2x+2)^{-3}>0$ odnosno $\dfrac{1}{(2x+2)^3}>0.$ 1 bod

Slijedi $2x+2>0$, odnosno $x>-1$, pa je 1 bod

$$x\in\langle -1,+\infty\rangle\setminus\left\{0,\frac{1}{2}\right\}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Prikažimo izraz u zagradi kao razlomak. Dana nejednadžba je redom ekvivalentna s

$$\left(\frac{x-2x^2-4x^3+x}{x-2x^2}\right)^{-3}>0$$

$$\left(\frac{2x-2x^2-4x^3}{x-2x^2}\right)^{-3}>0$$

$$\left(\frac{2x(1+x)(1-2x)}{x(1-2x)}\right)^{-3}>0$$ 2 boda

Ovaj izraz nakon skraćivanja, uz uvjet $x\neq 0$, $x\neq \frac{1}{2}$ 1 bod

prelazi u $(2x+2)^{-3}>0$ odnosno $\dfrac{1}{(2x+2)^3}>0.$ 1 bod

Slijedi $2x+2>0$, odnosno $x>-1$, pa je 1 bod

$$x\in\langle -1,+\infty\rangle\setminus\left\{0,\frac{1}{2}\right\}.$$ 1 bod

Napomena: Ako učenik nije napisao uvjet, ali je isključio brojeve 0 i 0.5 dobiva sve bodove, a ako nije napisao uvjet i nije isključio brojeve 0 i 0.5 oduzeti 2 boda. Ako je napisao uvjet, ali nije isključio brojeve 0 i 0.5 oduzeti 1 bod.

Zadatak B-1.3.

Neka su a, b, c i d realni brojevi različiti od nule takvi da je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$ i $a+b+c+d+abcd=0$. Izračunajte $\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.

Prvo rješenje.

Traženi izraz jednak je

$$\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\frac{cd-ab}{abcd}\cdot\frac{d+c}{cd}=\frac{cd^2+c^2d-abd-abc}{abc^2d^2}.$$ 1 bod

Iz $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$ dobivamo $bcd+acd+abd+abc=0$,
odakle slijedi $bcd+acd=-abd-abc$. 1 bod

Stoga je

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)&=\frac{cd^2+c^2d-abd-abc}{abc^2d^2}\\&=\frac{cd^2+c^2d+bcd+acd}{abc^2d^2}=\frac{cd(d+c+b+a)}{abc^2d^2}\\&=\frac{d+c+b+a}{abcd}.\end{aligned}$$ 2 boda

Kako iz $a+b+c+d+abcd=0$ slijedi $a+b+c+d=-abcd$, 1 bod

dobivamo

$$\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\frac{d+c+b+a}{abcd}=\frac{-abcd}{abcd}=-1.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Dijeljenjem jednakosti $a+b+c+d+abcd=0$ s $abcd$ dobivamo

$$\frac{1}{bcd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{abc}+1=0,$$ 1 bod

a odatle

$$\frac{1}{cd}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{c}\right)=-1.$$ 2 boda

Kako je $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=-\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$ 1 bod

imamo

$$\frac{1}{cd}\left(-\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{c}\right)=-1.$$ 1 bod

Konačno, izlučivanjem dobivamo $\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{cd}\right)=-1.$ 1 bod

Zadatak B-1.4.

Gađajući u metu Karlo je nekoliko puta pogodio devetku, nekoliko puta osmicu. Sedmicu je pogodio dvostruko manje puta nego devetku, a broj pogodaka u peticu je za tri manji nego u osmicu. Ukupno je sakupio 200 bodova.

Koliko je puta Karlo gađao u metu ako nijednom nije promašio niti je pogodio neki drugi broj? (Pogodak u devetku donosi 9 bodova, u osmicu 8 bodova,...)

Rješenje.

Ako je Karlo devetku pogodio x puta, onda je sedmicu pogodio $\dfrac{x}{2}$ puta.

Ako je osmicu pogodio y puta, onda je peticu pogodio $y-3$ puta.

Tako je sakupio ukupno $9x+8y+7\cdot\dfrac{x}{2}+5(y-3)=200$ bodova. 2 boda

Tražimo prirodna rješenja (diofantske) jednadžbe $\frac{25}{2}x+13y=215$.

Iz $25x+26y=430$ slijedi $26y=430-25x$.

Pošto je desna strana jednakosti djeljiva s 5, i lijeva strana jednakosti mora biti djeljiva s 5. Broj 26 nije djeljiv s 5, pa mora biti y djeljiv s 5. 1 bod

Kako je $25x=430-26y>0$ slijedi $y<17$, pa je dovoljno provjeriti za $y=5$, $y=10$ i $y=15$. 1 bod

Za $y=5$ imamo $25x=430-26\cdot 5=300$ pa je $x=12$.

Za $y=10$ imamo $25x=430-26\cdot 10=170$ pa $x\notin\mathbb{N}$.

Za $y=15$ imamo $25x=430-26\cdot 15=40$ pa $x\notin\mathbb{N}$.

Dakle, jedino je rješenje $x=12$, $y=5$. 1 bod

Karlo je devetku pogodio 12 puta, osmicu 5 puta, sedmicu 6 puta i peticu 2 puta. Ukupno je gađao $12+5+6+2=25$ puta. 1 bod

Napomena: Za pogođeno rješenje, uz njegovu provjeru, a bez dokaza da je to jedino rješenje, učenik dobiva 2 boda.

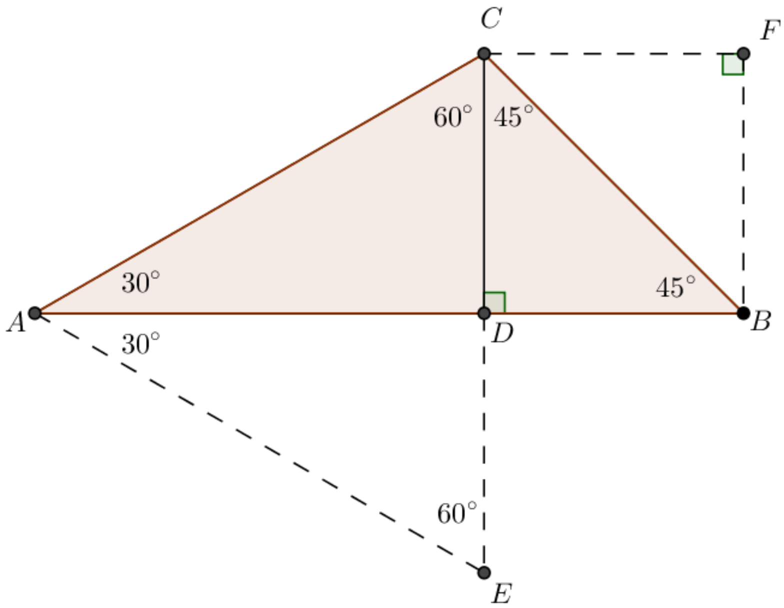
Zadatak B-1.5.

Unutarnji se kutovi trokuta odnose kao $2 : 3 : 7$. Odredite duljinu najdulje stranice trokuta, ako najkraća stranica ima duljinu $1\,\mathrm{cm}$.

Rješenje.

Iz $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 7$ i $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ dobivamo $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$ i $\gamma = 105°$. 1 bod

Stoga imamo sljedeću skicu.



Kako je α najmanji, a γ najveći kut, zaključujemo da je najkraća stranica $\overline{BC}$, a najdulja $\overline{AB}$. 1 bod

Kako je stranica $\overline{BC}$ dijagonala kvadrata $BFCD$ i kako je njezina duljina $1\,\mathrm{cm}$, slijedi da je $|BD| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm. 1 bod

Trokut AEC je jednakostraničan, stranice duljine $2|CD| = \sqrt{2}$. 1 bod

Dužina $\overline{AD}$ je visina jednakostraničnog trokuta AEC duljine stranice $\sqrt{2}$ te je $|AD| = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 1 bod

Stoga je duljina najdulje stranice $|AB| = |AD| + |DB| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ cm. 1 bod

Zadatak B-1.6.

U nizu brojeva

$$20, 202, 2020, 20202, 202020, \ldots$$

svaki se sljedeći broj dobije dopisivanjem znamenke 2 ili 0 prethodnom broju, naizmjence. Izračunajte zbroj znamenaka prvih sto brojeva toga niza koji su djeljivi s 202.

Rješenje.

Prvi broj u tom nizu koji je djeljiv s 202 ima na kraju znamenku 2. Kako se sljedeći broj u nizu dobije dodavanjem nule, odnosno množenjem s 10, to je i sljedeći broj djeljiv s 202. Dakle prvi par brojeva djeljiv s 202 je $a_2 = 202$, $a_3 = 202 \cdot 10$.

Dodavanje znamenke 2 znači prethodni broj množimo s 10 i dodajemo 2. Stoga slijedi da je

$$a_4 = a_3 \cdot 10 + 2 = 202 \cdot 100 + 2, \qquad a_5 = a_4 \cdot 10 = 202 \cdot 1000 + 20.$$

a ovaj par brojeva očito nije djeljiv s 202. 2 boda

Na isti način dobivamo da je sljedeći par brojeva djeljiv s 202:

$$a_6 = a_5 \cdot 10 + 2 = 202 \cdot 10^4 + 200 + 2 = 202 \cdot 10^4 + 202 = 202(10^4 + 1)$$
$$a_7 = a_6 \cdot 10 = 202(10^4 + 1) \cdot 10.$$

Analognim zaključivanjem vidimo da i dalje naizmjence dobivamo parove brojeva koji su djeljivi s 202 i koji nisu. 2 boda

Prvih 50 parova brojeva (prvih 100 brojeva) koji su djeljivi s 202 su

1. 202 i 2020
2. 2020202 i 20202020
3. 20202020202 i 202020202020

...

50. $2020 \ldots 202$ i $2020 \ldots 2020$ 2 boda

Prvi par sadrži ukupno 4 znamenke 2, drugi ukupno 8,..., pedeseti par 200 znamenki 2. 2 boda

Zbroj znamenaka ovih 100 brojeva iznosi

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + \ldots + 200 \cdot 2 &= 2(4 + 8 + 12 + \ldots + 200) \\ &= 8(1 + 2 + 3 + \ldots + 50) = 8 \cdot 50 \cdot 51/2 = 10200. \end{aligned}$$ 2 boda

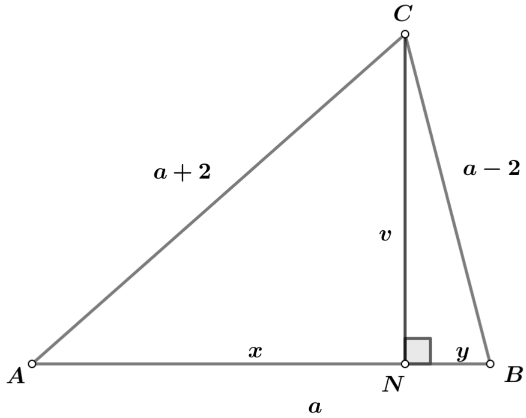
Napomena: Učenik mora argumentirati dobivenih 50 parova brojeva djeljivih s 202 i zašto ostali brojevi nisu djeljivi s 202. Ta argumentacija vrijedi 4 boda.

Zadatak B-1.7.

Duljine stranica šiljastokutnog trokuta su tri broja od kojih je najveći za četiri veći od najmanjeg, a srednji po veličini je aritmetička sredina preostala dva. Visina trokuta povučena na srednju stranicu po duljini dijeli trokut na dijelove čije su površine u omjeru 3 : 2. Odredite opseg zadanog trokuta.

Rješenje.

Neka su duljine stranica $a-2$, a, $a+2$. 1 bod



Iz omjera površina slijedi $\frac{xv/2}{yv/2}=\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, odnosno $x=\frac{3}{2}y$. 2 boda

Primijenimo Pitagorin poučak na pravokutne trokute ANC i NBC sa slike.

$$v^2=(a+2)^2-x^2, \qquad v^2=(a-2)^2-y^2.$$ 2 boda

Nakon izjednačavanja desnih strana dobivenu jednakost možemo pisati u obliku $(a+2)^2-(a-2)^2=x^2-y^2$.

Slijedi $8a=(x-y)(x+y)$, 1 bod

a kako je $x+y=a$, dobivamo $8a=(x-y)a$,

pa je $x-y=8$. 1 bod

Iz $x=\frac{3}{2}y$ i $x-y=8$ slijedi $y=16$, $x=24$, 1 bod

$a=x+y=40$. 1 bod

Opseg zadanog trokuta je $o=(a-2)+a+(a+2)=3a=120$. 1 bod

Napomena: Ako su stranice a, $a+2$, $a+4$ dobivamo:

$$\begin{aligned}v^2=(a+4)^2-x^2&=a^2-y^2\\(a+4)^2-a^2&=x^2-y^2\\8a+16&=(x-y)(x+y)\\8(a+2)&=(x-y)(a+2)\end{aligned}$$

dakle $x-y=8$ te dalje nastavljamo kao u gornjem rješenju.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite najmanji i najveći cijeli broj x za koji je broj $x^4 - 2021x^2 + 2020$ negativan.

Rješenje.

Tražimo rješenja nejednadžbe $x^4 - 2021x^2 + 2020 < 0$.

Faktorizirajmo izraz na lijevoj strani.

$$x^4 - 2020x^2 - x^2 + 2020 < 0 \qquad \text{1 bod}$$
$$x^2(x^2 - 2020) - (x^2 - 2020) < 0$$
$$(x^2 - 2020)(x^2 - 1) < 0 \qquad \text{1 bod}$$

Odavde je $1 < x^2 < 2020$, pa slijedi $1 < |x| < \sqrt{2020}$, odnosno

$$x \in \langle -\sqrt{2020}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{2020}\rangle. \qquad \text{2 boda}$$

Kako je $44 = \sqrt{1936} < \sqrt{2020} < \sqrt{2025} = 45$, najmanji cijeli broj za koji je dani izraz negativan je broj -44, a najveći 44. 2 boda

Zadatak B-2.2.

Funkcija $f(x) = x^2 + px + q$ poprima negativne vrijednosti samo za $x \in \langle -3, 14\rangle$. Koliko cjelobrojnih vrijednosti iz skupa $[-100, -10]$ može poprimiti funkcija f ?

Rješenje.

Ako funkcija f poprima negativne vrijednosti samo na intervalu $\langle -3, 14\rangle$, brojevi -3 i 14 su njezine nultočke. 1 bod

Tada je prema Vieteovim formulama

$$-3 + 14 = -p,\ -3 \cdot 14 = q, \quad \text{odnosno} \quad p = -11,\ q = -42, \qquad \text{2 boda}$$

odnosno $f(x) = x^2 - 11x - 42$.

Minimalna vrijednost ove funkcije je

$$y_{\min} = f\left(\frac{-3+14}{2}\right) = -\frac{289}{4} = -72.25 \qquad \text{1 bod}$$

pa je $f(x) \geqslant -72.25$ za sve realne brojeve x.

Stoga $f(x)$ može biti samo cijeli broj koji je veći ili jednak -72, 1 bod

a na intervalu $[-100, -10]$ funkcija f može poprimiti cjelobrojne vrijednosti iz skupa $\{-72, -71, -70, \ldots, -11, -10\}$ kojih je 63. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Do vrha stepeništa ima 8 stuba. Na koliko načina možemo stići na vrh ako se možemo penjati po jednu stubu ili po dvije stube?

Rješenje.

Na k-tu stubu ($k \geqslant 3$) možemo u jednome koraku doći sa $k-1$. ili $k-2$. stube. 1 bod

Znači da je broj načina da dođemo na k-tu stubu jednak zbroju brojeva načina za doći na $k-1$. stubu i na $k-2$. stubu. 2 boda

Na 1. stubu možemo doći na 1 način, a na 2. stubu na 2 načina. 1 bod

Dalje nastavljamo po principu zbroja:

na 3. stubu $1+2=3$ načina,

na 4. stubu $2+3=5$ načina,

na 5. stubu $3+5=8$ načina,

na 6. stubu 13 načina,

na 7. stubu 21 način,

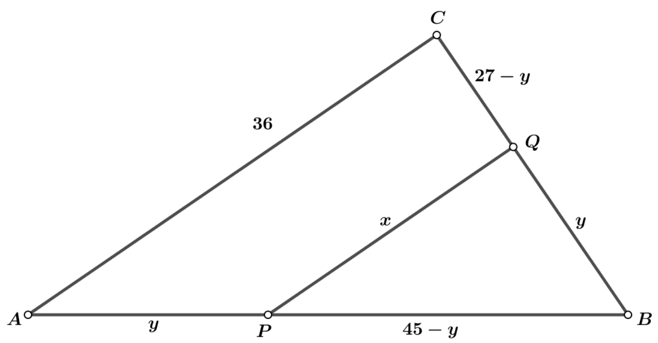
na 8. stubu 34 načina. 2 boda

Zadatak B-2.4.

Duljine stranica trokuta ABC su $|BC| = 27$, $|AC| = 36$, $|AB| = 45$. Neka su P i Q redom točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ takve da je $|AP| = |BQ|$ i $AC \parallel PQ$. Izračunajte površinu trokuta PBQ.

Prvo rješenje.

Uz oznake kao na slici, $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle BAC$ (kutovi s paralelnim kracima) pa je $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$.



Tada je $45 : (45 - y) = 27 : y$, odnosno $y = \dfrac{27 \cdot 45}{27 + 45} = \dfrac{135}{8}$. 2 boda

Koeficijent sličnosti jednak je $k = \dfrac{y}{27} = \dfrac{5}{8}$. 1 bod

Vrijedi $P(\triangle PBQ) = k^2 P(\triangle ABC)$. 1 bod

Površinu trokuta ABC računamo po Heronovoj formuli:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(27+36+45) = 54 \\ P(\triangle ABC) &= \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 9} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 27 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9} = 27 \cdot 2 \cdot 9 = 486, \end{aligned}$$ 1 bod

pa je konačno $P(\triangle PBQ) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^2 \cdot 486 = \dfrac{6075}{32}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju uočavamo slične trokute, $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$.

Uočimo i da je trokut ABC pravokutni trokut, a onda i trokut PBQ. 1 bod

Vrijedi da je $45 : (45 - y) = 27 : y$, odnosno $y = \dfrac{27 \cdot 45}{27 + 45} = \dfrac{135}{8}$. 2 boda

i $36 : x = 27 : y$, a odatle je $x = \dfrac{36y}{27} = \dfrac{45}{2}$. 1 bod

Vrijedi $P(\triangle PBQ) = k^2 P(\triangle ABC)$. 1 bod

Slijedi $P(\triangle PBQ) = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{135}{8} \cdot \dfrac{45}{2} = \dfrac{6075}{32}$. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Ako je $x = 2017 \cdot 2018 \cdot 2021 \cdot 2022 + 4$, izračunajte $\sqrt{x} - 2020^2$.

Rješenje.

Uočimo da se svaki od brojeva 2017, 2018, 2021 i 2022 može zapisati koristeći broj $a = 2020$. Pišemo

$$x = (a-3)(a-2)(a+1)(a+2) + 4.$$ 1 bod

Kako je $-3a + 2a = -2a + 1a$, množenjem prve i zadnje zagrade, odnosno druge i treće zagrade dobivamo

$$x = (a^2 - a - 6)(a^2 - a - 2) + 4.$$ 2 boda

Uvedimo supstituciju $t = a^2 - a - 4$

$$x = (t-2)(t+2) + 4 = t^2 - 4 + 4 = t^2.$$ 1 bod

Dobili smo

$$x = (2020^2 - 2020 - 4)^2 = (2020^2 - 2024)^2.$$ 1 bod

Kako je broj u zagradi pozitivan, vrijedi

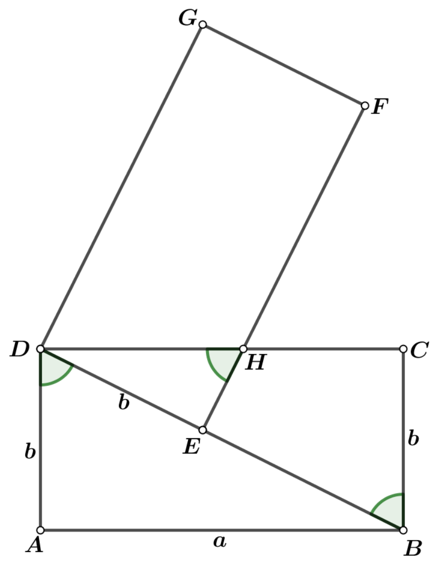
$$\sqrt{x} - 2020^2 = (2020^2 - 2024) - 2020^2 = -2024.$$ 1 bod

Napomena: Ako se uvede supstitucija $t = a^2 - a$ imamo
$x = (t-6)(t-2) + 4 = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$.

Zadatak B-2.6.

Pravokutnik $ABCD$, u kojem je $|AB| > |AD|$, zarotira se oko vrha D u pravokutnik $EFGD$ tako da se vrh A preslika u točku E na dijagonali $\overline{BD}$. Sjecište stranica $\overline{DC}$ i $\overline{EF}$ je točka H. Površina pravokutnika $ABCD$ odnosi se prema površini četverokuta $BCHE$ kao $5:2$. Ako je $\varphi = \sphericalangle ADB$, izračunajte $\dfrac{\sin^2\varphi + 1}{\cos^2\varphi + 1}$.

Rješenje.



Trokut DEH sličan je trokutu ABD po KK-teoremu o sličnosti. 2 boda

Iz $P_{ABCD} : P_{BCHE} = 5:2$ slijedi da je $P_{ABD} : P_{BCHE} = 5:4$, 1 bod

odnosno $\dfrac{P_{ABD}}{P_{DEH}} = 5:1 = k^2$. 2 boda

Dakle, koeficijent sličnosti je $k = \sqrt{5}$. 1 bod

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{\sqrt{5}}{1}$, 1 bod

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|AB|}{|AD|} = \sqrt{5}$. 1 bod

$$\frac{\sin^2\varphi+1}{\cos^2\varphi+1}=\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}$$
$$=\frac{2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\frac{2\operatorname{tg}^2\varphi+1}{2+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{2\cdot 5+1}{2+5}=\frac{11}{7}.$$ 2 boda

Zadatak B-2.7.

Luka je predložio Mili, Niki i Tini da zajedno rješavaju zadatke. Do tog je trenutka svaka od djevojaka već riješila određeni broj zadataka i to različitih u odnosu na ostale. Djevojke su odlučile prihvatiti Lukin prijedlog samo ako otkrije koliko je svaka od njih tri već riješila zadataka. Zbroj brojeva zadataka koje su Mila i Nika riješile i umnoška tih brojeva je 14. Za Milu i Tinu taj zbroj iznosi 11, a za Niku i Tinu 19. Koje brojeve Luka mora dobiti?

Prvo rješenje.

Neka je m broj zadataka koje je riješila Mila, n broj zadataka koje je riješila Nika i t broj zadataka koje je riješila Tina.

Luka treba riješiti sustav

$$\begin{aligned} m+n+mn&=14\\ m+t+mt&=11\\ n+t+nt&=19 \end{aligned}$$ 2 boda

što se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} m+n+mn+1&=15\\ m+t+mt+1&=12\\ n+t+nt+1&=20 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} (m+1)(n+1)&=15\\ (m+1)(t+1)&=12\\ (n+1)(t+1)&=20 \end{aligned}$$ 2 boda

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $n+1=\frac{5}{4}(t+1)$,

a kada to uvrstimo u treću $(t+1)^2=16$. 2 boda

Dakle $t+1=4$ ili $t+1=-4$ 1 bod

no kako su m, n i t prirodni brojevi, $t+1=4$, pa je $t=3$. 1 bod

Tada iz $(n+1)(t+1)=20$ slijedi $n=4$, a iz $(m+1)(t+1)=12$ je $m=2$. 2 boda

Drugo rješenje.

Iz dvije jednadžbe sustava

$$\begin{aligned} m+n+mn &= 14 \\ m+t+mt &= 11 \\ n+t+nt &= 19 \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

izrazimo nepoznanice, primjerice n i t

$$n=\frac{14-m}{m+1}, \quad t=\frac{11-m}{m+1} \qquad \text{2 boda}$$

pa ih uvrstimo u treću jednadžbu

$$\frac{14-m}{m+1}+\frac{11-m}{m+1}+\frac{14-m}{m+1}\cdot\frac{11-m}{m+1}=19. \qquad \text{1 bod}$$

Slijedi niz ekvivalentnih jednadžbi, s nepoznanicom m, koje se svode na kvadratnu.

$$\begin{aligned} (25-2m)(m+1)+(14-m)(11-m) &= 19(m+1)^2 \\ 20m^2+40m-160 &= 0 \\ m^2+2m-8 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{2 boda}$$

Brojevi m, n i t su prirodni pa je jedino rješenje ove jednadžbe $m=2$. 1 bod

Tada je $n=\dfrac{14-m}{m+1}=4$ i $t=\dfrac{11-m}{m+1}=3$. 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Za kompleksne brojeve z i w vrijedi $|z+w|=\sqrt{3}$ i $|z|=|w|=1$. Izračunajte $|z-w|$.

Prvo rješenje.

Primijenimo svojstvo modula kompleksnog broja $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ na broj $z+w$:

$$|z+w|^2=(z+w)\cdot\overline{(z+w)}=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\cdot\overline{z}+w\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{w}.$$ 1 bod

Vrijedi $z\cdot\overline{z}=|z|^2=1$, $w\cdot\overline{w}=|w|^2=1$ i $|z+w|^2=3$, 1 bod

pa je $3=1+w\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{w}+1$, odnosno $w\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{w}=1$. 1 bod

Tada je

$$\begin{aligned}
|z-w|^2&=(z-w)\cdot\overline{(z-w)}=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})\\
&=z\cdot\overline{z}-w\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{w}\\
&=|z|^2-(w\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{w})+|w|^2\\
&=1-1+1=1.
\end{aligned}$$ 2 boda

Stoga je $|z-w|=1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $z=a+bi$ i $w=c+di$. 1 bod

Tada je $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$. 1 bod

Iz $|z+w|=|(a+c)+(b+d)i|=\sqrt{3}$ slijedi

$$(a+c)^2+(b+d)^2=3$$ 1 bod

$$\begin{aligned}
a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2&=3\\
(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2ac+2bd&=3\\
1+1+2ac+2bd&=3\\
2ac+2bd&=1
\end{aligned}$$ 1 bod

Sada možemo izračunati

$$|z-w|=|(a+bi)-(c+di)|=|(a-c)+(b-d)i|$$ 1 bod

$$\begin{aligned}
&=\sqrt{a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2}\\
&=\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-(2ac+2bd)}\\
&=\sqrt{1+1-1}=1.
\end{aligned}$$ 1 bod

Zadatak B-3.2.

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} & y^{2020x}=10, \\ & 6060x+2\log y=7. \end{aligned}$$

Rješenje.

Logaritmiranjem prve jednadžbe dobit ćemo $\log(y^{2020x})=1$, odnosno $2020x\log y=1$ te $x=\dfrac{1}{2020\log y}$. 1 bod

Ako to uvrstimo u drugu jednadžbu slijedi $\dfrac{6060}{2020\log y}+2\log y=7$. 1 bod

Označimo $t=\log y$ i te dobivamo jednadžbu $\frac{3}{t}+2t=7$, odnosno $2t^2-7t+3=0$. 1 bod

Njena rješenja su $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=3$ 1 bod

pa je $y_1=\sqrt{10}$, $y_2=1000$ 1 bod

$x_1=\dfrac{1}{1010}$, $x_2=\dfrac{1}{6060}$. 1 bod

Rješenja su $(x,y)=\left(\frac{1}{1010},\sqrt{10}\right)$ i $(x,y)=\left(\frac{1}{6060},1000\right)$.

Zadatak B-3.3.

Riješite nejednadžbu

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi x)-1}{\operatorname{tg}(\pi x)+1}>1.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo danu nejednadžbu kao $\frac{\operatorname{tg}(\pi x)-1}{\operatorname{tg}(\pi x)+1}-1>0$, te svedimo izraz na lijevoj strani na zajednički nazivnik

$$\frac{(\operatorname{tg}(\pi x)-1)-(\operatorname{tg}(\pi x)+1)}{\operatorname{tg}(\pi x)+1}>0$$ 1 bod

$$\frac{-2}{\operatorname{tg}(\pi x)+1}>0$$ 1 bod

Slijedi $\operatorname{tg}(\pi x)+1<0$, odnosno $\operatorname{tg}(\pi x)<-1$. 1 bod

Odavde je $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\pi x<-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}$, 2 boda

odnosno $-\dfrac{1}{2}+k<x<-\dfrac{1}{4}+k,\ \ k\in\mathbb{Z}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Izraz na lijevoj strani dane nejednadžbe možemo transformirati:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}(\pi x)-1}{\operatorname{tg}(\pi x)+1} &= \frac{\operatorname{tg}(\pi x)-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}(\pi x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+1} && \text{1 bod}\\ &= \operatorname{tg}\left(\pi x-\tfrac{\pi}{4}\right) && \text{2 boda}\end{aligned}$$

Slijedi rješavanje nejednadžbe $\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)>1$.

$$\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}, \qquad \text{2 boda}$$

a odavde je $\dfrac{1}{2}+k<x<\dfrac{3}{4}+k,\ \ k\in\mathbb{Z}$. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Tena i Ante igraju igru: prvo Tena kaže broj 0, pa Ante kaže broj za 1 veći. Zatim Tena kaže broj za 2 veći od Antinog, Ante kaže broj za 3 veći od Teninog ...

Igra završava kad netko kaže broj veći od 5050. Koji je to broj? Tko će pobijediti?

Rješenje.

Pogledajmo kako Tena i Ante formiraju brojeve:

Tena	Ante
0	$0+\mathbf{1}=1$
$1+\mathbf{2}=3$	$3+\mathbf{3}=6$
$6+\mathbf{4}=10$	$10+\mathbf{5}=15$
$15+\mathbf{6}=21$	$21+\mathbf{7}=28$
$28+\mathbf{8}=36$	$\ldots$

Brojeve smo dobili na sljedeći način:

$$0, \qquad 0+1, \qquad 0+1+2, \qquad 0+1+2+3, \qquad 0+1+2+3+4, \qquad \ldots$$

Dakle, u n-tom koraku bit će izgovoren broj $0+1+2+3+\cdots+(n-1)$. 1 bod

Ovaj zbroj jednak je $\dfrac{(n-1)n}{2}$ 1 bod

i treba vrijediti $\dfrac{(n-1)n}{2}>5050$ ili $(n-1)n>10100=100\cdot 101$ 1 bod

tj. $n>101$. Zato je $n=102$ 1 bod

pa je pobijedio Ante (jer je 102 parni broj). 1 bod

Broj koji je on izgovorio je $\frac{102\cdot 101}{2}=5151$. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Duljine dviju stranica trokuta su 7 cm i 4 cm. Kut nasuprot dulje stranice je dva puta veći od kuta nasuprot kraće stranice. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

Rješenje.

Neka je $a = 4, \mathrm{cm}$, $b = 7, \mathrm{cm}$, $\beta = 2\alpha$.

Koristeći poučak o sinusima imamo $\dfrac{4}{\sin\alpha} = \dfrac{7}{\sin 2\alpha}$ 1 bod

iz čega dalje slijedi $4 \sin 2\alpha = 7 \sin\alpha$

odnosno $8 \sin\alpha \cos\alpha = 7 \sin\alpha$.

Sinus kuta u trokutu ne može biti jednak nuli, pa je $\cos\alpha = \frac{7}{8}$. 2 boda

Duljinu treće stranice c odredit ćemo pomoću poučka o kosinusu za stranicu a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$4^2 = 7^2 + c^2 - 2 \cdot 7 \cdot c \cdot \frac{7}{8}$$ 1 bod

odakle dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$c^2 - \frac{49}{4}c + 33 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $c = 4$ i $c = \dfrac{33}{4}$. 1 bod

Međutim, rješenje $c = 4$ treba odbaciti jer za trokut sa stranicama $a = c = 4$, $b = 7$ ne vrijedi $\beta = 2\alpha$. Naime, iz $a = c$ tj. $\alpha = \gamma$ i $\beta = 2\alpha$ slijedi $\alpha = \gamma = 45°$, $\beta = 90°$, što očito ne vrijedi u ovom trokutu. 1 bod

Duljina treće stranice trokuta iznosi $\dfrac{33}{4} = 8.25\,\mathrm{cm}$.

Zadatak B-3.6.

Odredite $\cos x$ ako je

$$\log_{27}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x).$$

Prvo rješenje.

Rješenje zadatka mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x > 0, \qquad -\cos x > 0.$$ 1 bod

Odatle je $2\sin x\cos x - \frac{1}{3}\cos x > 0$, a kako je $\cos x$ negativan, dobivamo $2\sin x - \frac{1}{3} < 0$.

Dakle, uvjeti se svode na $\sin x < \dfrac{1}{6}$, $\cos x < 0$. 1 bod

Logaritme u zadanoj jednakosti prebacimo u bazu 3, a zatim se riješimo logaritama:

$$\frac{1}{3}\log_3\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x) \qquad \text{1 bod}$$

$$\log_3\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = 1 + 3\log_3(-\cos x)$$

$$\log_3\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \log_3 3 + \log_3(-\cos x)^3$$

$$\log_3\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \log_3(-3\cos^3 x) \qquad \text{2 boda}$$

$$\sin 2x - \tfrac{1}{3}\cos x = -3\cos^3 x \qquad \text{1 bod}$$

$$2\sin x\cos x - \tfrac{1}{3}\cos x = -3\cos^3 x$$

Sada podijelimo s $\cos x$ $(\cos x \neq 0)$

$$2\sin x - \tfrac{1}{3} = -3\cos^2 x$$

$$2\sin x - \tfrac{1}{3} = -3(1 - \sin^2 x) \qquad \text{1 bod}$$

$$3\sin^2 x - 2\sin x - \tfrac{8}{3} = 0$$

Ovo je kvadratna jednadžba po $\sin x$ s rješenjima $-\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{3}$. 1 bod

Jedino rješenje je $\sin x = -\frac{2}{3}$ 1 bod

a zbog uvjeta je $\cos x = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Rješenje zadatka mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x > 0, \qquad -\cos x > 0.$$ 1 bod

Odatle je $2\sin x\cos x - \frac{1}{3}\cos x > 0$, a kako je $\cos x$ negativan, dobivamo $2\sin x - \frac{1}{3} < 0$.

Dakle, uvjeti se svode na $\sin x < \dfrac{1}{6}$, $\cos x < 0$. 1 bod

Logaritme u zadanoj jednakosti prebacimo u bazu 3.

$$\frac{1}{3}\log_3\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x).$$ 1 bod

Slijedi

$$\log_3\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = 1 + 3\log_3(-\cos x)$$

$$\log_3\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) - \log_3(-\cos x)^3 = 1$$

$$\log_3\frac{\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x}{(-\cos x)^3} = 1$$ 2 boda

$$\frac{\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x}{(-\cos x)^3} = 3$$ 1 bod

$$\frac{2\sin x\cos x - \frac{1}{3}\cos x}{-\cos^3 x} = 3$$

Kako je $\cos x \neq 0$, slijedi

$$2\sin x\cos x - \tfrac{1}{3}\cos x = -3\cos^3 x$$

$$2\sin x - \tfrac{1}{3} = -3\cos^2 x$$

$$2\sin x - \tfrac{1}{3} = -3(1-\sin^2 x)$$ 1 bod

$$3\sin^2 x - 2\sin x - \tfrac{8}{3} = 0$$

Ovo je kvadratna jednadžba po $\sin x$ s rješenjima $-\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{3}$. 1 bod

Jedino rješenje je $\sin x = -\frac{2}{3}$ 1 bod

a zbog uvjeta je $\cos x = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. 1 bod

Zadatak B-3.7.

Dječje igralište ima oblik trokuta čiji je opseg 36 m, a površina $30\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Ako je mjera jednog kuta $60°$, odredite duljine stranica tog igrališta.

Prvo rješenje.

Neka su duljine stranica trokuta a, b i c, a dani kut od $60°$ zatvaraju stranice s duljinama a i b.

Iz formule za površinu trokuta slijedi $P = \frac{1}{2}ab\sin 60° = 30\sqrt{3}$ slijedi $ab = 120$. 1 bod

Iz podatka o opsegu dobivamo $o = a + b + c = 36$. 1 bod

Koristimo poučak o kosinusu za stranicu c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + b^2 - ab.$$ 1 bod

Kvadriranjem jednakosti $c = 36 - (a + b)$ dobivamo

$$c^2 = 36^2 - 72(a + b) + (a + b)^2$$ 1 bod

pa je

$$a^2 + b^2 - ab = 36^2 - 72(a + b) + (a^2 + 2ab + b^2)$$

odnosno $36^2 - 72(a + b) + 3ab = 0$. 1 bod

Kako je $ab = 120$, dobivamo

$$36^2 - 72(a + b) + 360 = 0$$

pa slijedi $a + b = 23$. Dakle $c = 36 - 23 = 13$. 1 bod

Iz $ab = 120$ i $a + b = 23$ slijedi da su, prema Vieteovim formulama, a i b rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 23x + 120 = 0$. 2 boda

To su $a = 15$ i $b = 8$ (ili obratno). 2 boda

Stranice igrališta dugačke su $8\,\text{m}$, $13\,\text{m}$ i $15\,\text{m}$.

Drugo rješenje.

Neka su duljine stranica trokuta a, b i c, a dani kut od $60°$ zatvaraju stranice s duljinama a i b.

Iz formule za površinu trokuta slijedi $P = \frac{1}{2}ab\sin 60° = 30\sqrt{3}$ slijedi $ab = 120$. 1 bod

Iz podatka o opsegu dobivamo $o = a + b + c = 36$. 1 bod

Koristimo poučak o kosinusu za stranicu c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 3ab$$ 1 bod

Kako je $ab = 120$, a $a + b = 36 - c$, dobivamo

$$c^2 = (36 - c)^2 - 360$$ 2 boda

odakle slijedi $c = 13$. 1 bod

Potrebno je još izračunati a i b.

Vrijedi $a + b = 36 - c = 36 - 13 = 23$ pa jednakost $ab = 120$ vodi na $(23 - b)b = 120$ odnosno na kvadratnu jednadžbu $b^2 - 23b + 120 = 0$ 2 boda

čija su rješenja $a = 15$ i $b = 8$ (ili obratno). 2 boda

Stranice igrališta dugačke su $8\,\text{m}$, $13\,\text{m}$ i $15\,\text{m}$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite nejednadžbu $3^{3x}+3^4 \leqslant 3^{2x+2}+3^{x+2}$.

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $t=3^x$. Tada danu nejednadžbu možemo zapisati kao

$$t^3-9t^2-9t+81 \leqslant 0.$$

Ako iz prvog i trećeg pribrojnika izlučimo t, a iz drugog i četvrtog 9 redom slijedi:

$$t(t^2-9)-9(t^2-9) \leqslant 0$$ 1 bod

$$(t-9)(t^2-9) \leqslant 0$$

$$(t-9)(t-3)(t+3) \leqslant 0$$ 2 boda

Kako je $t+3$ uvijek pozitivno, slijedi $(t-9)(t-3) \leqslant 0$.

Rješenje ove nejednadžbe je $t \in [3,9]$ 2 boda

pa je rješenje dane nejednadžbe $x \in [1,2]$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Pravci s jednadžbama $y=k_1x+2$ i $y=k_2x-3$ su tangente parabole s jednadžbom $y^2=2px$, $p>0$, a zatvaraju kut od 45°. Odredite jednadžbe svih takvih parabola.

Prvo rješenje.

S obzirom da je kut između dva pravca 45° slijedi $\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=1$ odnosno $|k_2-k_1|=|1+k_1k_2|$.

Iz uvjeta dodira $p=2kl$ slijedi $4k_1=-6k_2$ tj. $k_1=-\dfrac{3}{2}k_2$. 1 bod

Slijedi $|k_2+\dfrac{3}{2}k_2|=|1-\dfrac{3}{2}k_2\cdot k_2|$ t.j. $\left|\dfrac{5}{2}k_2\right|=\left|1-\dfrac{3}{2}k_2^2\right|$. 1 bod

Imamo dva slučaja

$$\frac{5}{2}k_2=1-\frac{3}{2}k_2^2 \qquad \text{i} \qquad -\frac{5}{2}k_2=1-\frac{3}{2}k_2^2.$$

Stoga postoje 4 rješenja.

$$\begin{array}{llll} k_1 = -\frac{1}{2} & k_1 = 3 & k_1 = \frac{1}{2} & k_1 = -3 \\ k_2 = \frac{1}{3} & k_2 = -2 & k_2 = -\frac{1}{3} & k_2 = 2. \end{array}$$

2 boda

Odgovarajući parametri su

$$p = -2 \qquad p = 12 \qquad p = 2 \qquad p = -12.$$

Zbog uvjeta $p > 0$ rješenje zadatka su $y^2 = 4x$ i $y^2 = 24x$. 2 boda

Napomena: Nije nužno da učenik odredi oba koeficijenta k_1 i k_2. Dovoljno je da izračuna parametar p pomoću jednog od tih koeficijenata.

Drugo rješenje.

Iz uvjeta dodira je $p = 2k_1 \cdot 2 = 4k_1$ pa je $k_1 = \frac{p}{4}$ 1 bod

i analogno $p = 2k_2 \cdot (-3) = -6k_2$ pa je $k_2 = -\frac{p}{6}$. 1 bod

Sada je $\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right| = 1$ odnosno $|k_2 - k_1| = |1 + k_2 k_1|$

pa redom slijedi

$$\frac{p}{4} + \frac{p}{6} = \left|1 - \frac{p^2}{24}\right|$$

$$\frac{5p}{12} = \frac{|24 - p^2|}{24}.$$

Pomnožimo gornju jednakost s 24 i razdvojimo na dva slučaja.

Prvi slučaj je $10p = 24 - p^2$. 1 bod

Pozitivno rješenje jednadžbe $p^2 + 10p - 24 = 0$ je $p = 2$
pa tražena parabola ima jednadžbu $y^2 = 4x$. 1 bod

Drugi slučaj je $-10p = 24 - p^2$. 1 bod

Pozitivno rješenje jednadžbe $p^2 - 10p - 24 = 0$ je $p = 12$
pa tražena parabola ima jednadžbu $y^2 = 24x$. 1 bod

Zadatak B-4.3.

Ako je $26! = 403\,291\,x61\,126\,605\,635\,58x\,y00\,000$, odredite znamenke x i y.

Rješenje.

Utvrdimo najprije s koliko nula završava broj 26!. Treba odrediti potenciju broja 5 u rastavu tog broja na proste faktore (jer se faktor 2 javlja više puta). 1 bod

Kako je $26! = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, broj 5 se pojavljuje kao faktor brojeva 5, 10, 15, 20 i 25. Uočimo još da je $25 = 5^2$ pa je najveća potencija broja 5 u rastavu broja 26! jednaka 5^6. 1 bod

Broj 26! završava sa 6 nula. Dakle, $y = 0$. 1 bod

Odredimo vrijednost znamenke x. Dani broj mora biti djeljiv s 9 pa je i zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 9. 1 bod

Zbroj znamenaka danog broja je

$$\begin{aligned}
4 + 0 + 3 + 2 + 9 + 1 + x + 6 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 0 + 5 + 6 + 3 + 5 + 5 + 8 + x \\
= 73 + 2x.
\end{aligned}$$
1 bod

Da bi broj $73 + 2x = 8 \cdot 9 + 1 + 2x$ bio djeljiv s 9, mora $1 + 2x$ biti djeljivo s 9, a to je moguće jedino ako je $2x = 8$, odnosno $x = 4$. 1 bod

Tražene znamenke su $x = 4$ i $y = 0$.

Zadatak B-4.4.

Za svaki prirodni broj n, zbroj prvih n članova nekog niza je $S_n = 2.5n^2 - 4.5n$.

Koji članovi tog niza poprimaju vrijednosti između 10 085 i 10 095?

Rješenje.

Opći član niza možemo izračunati na sljedeći način

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} && \text{1 bod} \\
&= \left(2.5n^2 - 4.5n\right) - \left(2.5(n-1)^2 - 4.5(n-1)\right) \\
&= 5n - 7 && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Odredimo n iz uvjeta $10\,085 < a_n < 10\,095$. 1 bod

$$\begin{aligned}
10\,085 < 5n - 7 < 10\,095 \\
10\,092 < 5n < 10\,102 \\
2018.4 < n < 2020.4
\end{aligned}$$
1 bod

Jedini prirodni brojevi u tom intervalu su

$$n = 2019 \qquad \text{i} \qquad n = 2020$$
1 bod

pa su traženi članovi $a_{2019} = 5 \cdot 2019 - 7 = 10\,088$ i $a_{2020} = 5 \cdot 2020 - 7 = 10\,093$. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Dana su tri paralelna pravca a, b i c. Na pravcu a istaknute su točke A, B i C, na pravcu b točke D, E, F i G, a na pravcu c točke H, I, J, K i L. Koliko je najviše trokuta određeno točkama iz skupa $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$?

Prvo rješenje.

Razlikujemo četiri slučaja:

Prvi slučaj. Na svakom od pravaca a, b i c nalazi se po jedan vrh trokuta. S obzirom da tražimo najveći mogući broj trokuta, pretpostavljamo da odabrane trojke točaka nisu kolinearne. Vrh koji je na pravcu a biramo na tri načina, vrh na pravcu b na četiri načina, a vrh na pravcu c na pet načina. Ukupno postoji $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ takvih trokuta. 1 bod

Drugi slučaj. Dva vrha trokuta su na pravcu a, a treći vrh na jednom od ostala dva pravca. Takvih trokuta ima $\binom{3}{2} \cdot (4+5) = 27$. 1 bod

Treći slučaj. Dva vrha su na pravcu b, a treći vrh na jednom od ostala dva pravca. Takvih trokuta ima $\binom{4}{2} \cdot (3+5) = 48$. 1 bod

Četvrti slučaj. Dva vrha su na pravcu c, a treći vrh na jednom od ostala dva pravca. Takvih trokuta ima $\binom{5}{2} \cdot (3+4) = 70$. 1 bod

Konačno, postoji najviše $60 + 27 + 48 + 70 = 205$ takvih trokuta. 2 boda

Drugo rješenje.

Od danih 12 točaka tri točke možemo odabrati na $\binom{12}{3} = 220$ načina. 2 boda

Od tog broja treba oduzeti broj načina za odabir tri točke na istom pravcu (a, b ili c).

Traženi broj je $\binom{12}{3} - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}\right) = 220 - (1 + 4 + 10) = 205$. 4 boda

Zadatak B-4.6.

Odredite površinu skupa svih točaka pridruženih kompleksnim brojevima z za koje vrijedi

$$|z| \leqslant \left|\frac{1}{z}\right| \quad \text{i} \quad \frac{28277\pi}{12} \leqslant \arg\left(\frac{z^{2020}}{1+i}\right) \leqslant \frac{40397\pi}{12}.$$

Rješenje.

Nekja je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrijski oblik kompleksnog broja z.

Iz $|z| \leqslant \left|\frac{1}{z}\right|$ slijedi $|z|^2 \leqslant 1$ pa je $r \leqslant 1$. 2 boda

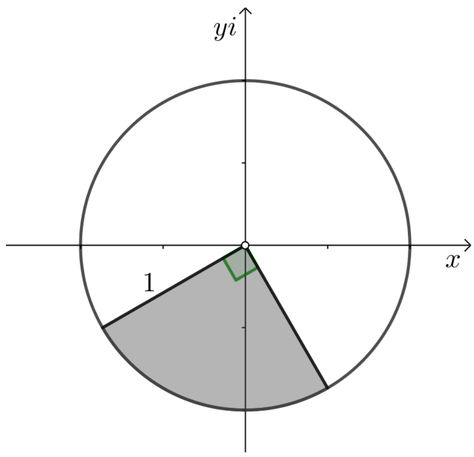
Vrijedi

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{z^{2020}}{1+i}\right) &= \arg\frac{r^{2020}(\cos 2020\varphi + i\sin 2020\varphi)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} && \text{2 boda}\\
&= \arg\left[\frac{r^{2020}}{\sqrt{2}}\left(\cos(2020\varphi - \tfrac{\pi}{4}) + i\sin(2020\varphi - \tfrac{\pi}{4})\right)\right]\\
&= 2020\varphi - \frac{\pi}{4} && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Zato iz dane nejednakosti slijedi

$$\frac{28277\pi}{12} \leqslant 2020\varphi - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{40397\pi}{12},$$

odnosno $\frac{7\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}$. 1 bod



1 bod

Zadani skup točaka je kružni isječak polumjera 1 i središnjeg kuta $\frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Površina je $P = \frac{1}{4}r^2\pi = \frac{\pi}{4}$. 2 boda

Zadatak B-4.7.

Riješite nejednadžbu

$$\log_{\sqrt{5}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+\log_5\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+\log_{25}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+$$
$$\log_{625}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+\ldots+\log_{5^{2^k}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+\ldots \leqslant 4.$$

Rješenje.

Označimo $3^{x^2-x-1}+2=y$.

Dana nejednadžba redom je ekvivalentna s

$$\log_{\sqrt{5}} y+\log_5 y+\log_{25} y+\log_{625} y+\ldots+\log_{5^{2^k}} y+\ldots \leqslant 4$$
$$2\log_5 y+\log_5 y+\frac{1}{2}\log_5 y+\frac{1}{4}\log_5 y+\ldots+\frac{1}{2^k}\log_5 y+\ldots \leqslant 4,$$
$$\left(2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots\right)\log_5 y \leqslant 4.$$ 2 boda

Izraz u zagradi je geometrijski red s prvim članom 2 i količnikom $\frac{1}{2}$ 1 bod

pa je njegov zbroj jednak $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4.$ 2 boda

Slijedi $4\log_5 y \leqslant 4$, odnosno $\log_5\left(3^{x^2-x-1}+2\right)\leqslant 1$ 1 bod

pa dalje imamo

$$0<3^{x^2-x-1}+2\leqslant 5$$ 1 bod
$$3^{x^2-x-1}\leqslant 3$$
$$x^2-x-1\leqslant 1$$ 1 bod
$$(x-2)(x+1)\leqslant 0$$

Konačno rješenje je $x\in[-1,2]$. 2 boda