Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

1. Odredi najmanju vrijednost izraza

$$|x+1|+|x-2|+|x-3|,$$

pri čemu je x realni broj.

2. Odredi sve parove (n,k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$n^2+n=k^2+2k-9.$$

3. U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BAC=60^\circ$ i $|AB|>|AC|$. Ako je I središte upisane kružnice, a H ortocentar tog trokuta, dokaži da je $2\sphericalangle AHI=3\sphericalangle ABC$.

4. Odredi sve realne brojeve $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2020} \geqslant 0$ za koje vrijedi

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=1 \qquad \text{i} \qquad a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2020}^2=a_1.$$

5. Ana je prekrila ploču dimenzija 2020×2020 domino pločicama koje se međusobno ne preklapaju, a svaka od njih prekriva točno dva polja ploče. Branka želi obojiti te pločice tako da za svaku vrijedi: među njoj susjednim pločicama najviše su dvije u boji promatrane. Dvije pločice su susjedne ako prekrivaju polja koja imaju zajedničku stranicu.

Koliko je najmanje boja potrebno da bi Branka sigurno mogla obojiti pločice na takav način, neovisno o načinu na koji ih je Ana rasporedila?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

1. Odredi sve parove (n, k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$n^2 + n = k^2 + 2k - 9.$$

2. Neka su a i b realni brojevi takvi da su oba rješenja kvadratne jednadžbe $x^2+ax+b+1 = 0$ prirodni brojevi. Dokaži da je $a^2 + b^2$ složen prirodni broj.

3. Na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC zadana je točka D. Simetrala kuta $\sphericalangle CAD$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Kružnica opisana trokutu ABD siječe dužinu $\overline{AE}$ u točkama A i F, a pravac BF siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki G. Pravac kroz točku G paralelan s $\overline{DF}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki H.

Dokaži da je pravac GE tangenta kružnice opisane trokutu BHG.

4. Odredi sve realne brojeve $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2020} \geqslant 0$ za koje vrijedi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} = 1 \qquad \text{i} \qquad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2020}^2 = a_1.$$

5. Ana je prekrila ploču dimenzija 2020×2020 domino pločicama koje se međusobno ne preklapaju, a svaka od njih prekriva točno dva polja ploče. Branka želi obojiti te pločice tako da za svaku vrijedi: među njoj susjednim pločicama najviše je jedna u boji promatrane. Dvije pločice su susjedne ako prekrivaju polja koja imaju zajedničku stranicu.

Koliko je najmanje boja potrebno da bi Branka sigurno mogla obojiti pločice na takav način, neovisno o načinu na koji ih je Ana rasporedila?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

1. Odredi sve četvorke (a, b, c, d) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$a + b = cd, \qquad ab = c + d.$$

2. Dana su četiri različita realna broja iz intervala $\langle 0, 1\rangle$. Dokaži da među njima postoje dva broja, x i y, takva da vrijedi

$$0 < x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2} < \frac{1}{2}.$$

3. Za točku L koja se nalazi unutar trokuta ABC vrijedi

$$\sphericalangle LBC = \sphericalangle LCA = \sphericalangle LAB = \sphericalangle CAL.$$

Dokaži da je umnožak duljina dviju stranica tog trokuta jednak kvadratu duljine treće stranice.

4. Neka su A i B prirodni brojevi, a S skup svih točaka s cjelobrojnim koordinatama unutar pravokutnika s vrhovima $(0, 0)$, $(A, 0)$, (A, B) i $(0, B)$. Točke s cjelobrojnim koordinatama na rubu tog pravokutnika su obojene crvenom, a unutar skupa S jednom od tri boje: plavom, zelenom ili crvenom.

Za jedinični kvadrat kojemu su sva četiri vrha u S kažemo da je *poseban* ako je točno jedan par njegovih susjednih vrhova istobojan. Dokaži da je broj posebnih jediničnih kvadrata paran.

5. Odredi sve parove (n, k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$3^n = 5k^2 + 1.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. listopada 2020.

1. Neka je n prirodni broj. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da vrijedi

$$(1-z+z^2)(1-z^2+z^4)(1-z^4+z^8)\cdots(1-z^{2^{n-1}}+z^{2^n})=\frac{3z^{2^n}}{1+z+z^2}.$$

2. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x vrijedi

$$f(x)+xf(2-x)=3x-x^2.$$

3. Na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC zadana je točka D. Simetrala kuta $\sphericalangle CAD$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E. Kružnica opisana trokutu ABD siječe dužinu $\overline{AE}$ u točkama A i F, a pravac BF siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki G. Pravac kroz točku G paralelan s $\overline{DF}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki H.

Dokaži da je pravac GE tangenta kružnice opisane trokutu BHG.

4. Neka su A i B prirodni brojevi, a S skup svih točaka s cjelobrojnim koordinatama unutar pravokutnika s vrhovima $(0,0)$, $(A,0)$, (A,B) i $(0,B)$. Točke s cjelobrojnim koordinatama na rubu tog pravokutnika su obojene crvenom, a unutar skupa S jednom od tri boje: plavom, zelenom ili crvenom.

Za jedinični kvadrat kojemu su sva četiri vrha u S kažemo da je *poseban* ako je točno jedan par njegovih susjednih vrhova istobojan. Dokaži da je broj posebnih jediničnih kvadrata paran.

5. Odredi sve parove (n,k) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$3^n=5k^2+1.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.